# III. Ueber die Bezeichnung der hexagonalen Krystallformen.

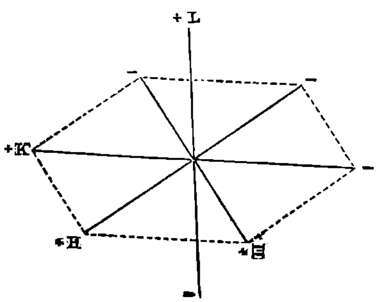
Von Paul Groth.

Bekanntlich bezeichnet die Weiss-Naumann'sche Schule die Formen des hexagonalen Systems ganz analog denen des tetragonalen, und es ist namentlich Naumann's Verdienst, zuerst erwiesen zu haben, wie vollkommen die Analogie beider Krystallsysteme ist, sowohl in Bezug auf ihre Symmetrie, als auch auf die möglichen und vorkommenden Hemiëdrieen und Tetartoëdrieen, derart, dass die Erläuterung des hexagonalen Systems völlig gleichlautet mit der des tetragonalen, wenn man nur die Namen ändert und jedesmal die Zahl der Flächen, Axen und Symmetrie-Ebenen mit $^3/_2$ multiplicirt. Diese Analogie geht nun Hand in Hand mit vollständiger Uebereinstimmung in physikalischer Beziehung. Nennen wir eine Haupt-Symmetrieebene eine solche, in welcher sich mehrere gleichwerthige Richtungen befinden, d. h. Richtungen, welche beliebig mit einander vertauscht werden können, so dass nach der dazu erforderlichen Drehung des Krystalls dieser sich selbst, verglichen mit der vorigen Stellung, congruent bleibt; nennen wir ferner die Normale zu einer solchen Symmetrie-Ebene eine Hauptaxe, so besitzen die hexagonalen und tetragonalen Krystalle nur eine einzige Hauptaxe, welche zusammenfällt mit ihrer optischen, thermischen etc. Axe: sie sind beide physikalisch einaxig. Die Beziehungen zwischen physikalischem Verhalten und Krystallgestalt sind in beiden Systemen so übereinstimmend [1], dass schon hierin, abgesehen von den morphologischen Analogien, ein zwingender Grund vorliegt, tetragonale und hexagonale Formen analog zu stellen und zu bezeichnen. Trotzdem ist dies durch Miller, bei Einführung der Bezeichnung der Flächen durch ihre Indices, nicht geschehen, sondern es werden von demselben im hexagonalen System die Flächen eines Rhomboeders (einer hemiëdrischen Form) zu Axenebenen benützt, während im tetragonalen System hierfür drei Symmetrie-Ebenen, nämlich die Hauptsymmetrie-Ebene und zwei gleichwerthige von den vier normal

[1] Die Details dieser Beziehungen wird der Verfasser in einem baldigst erscheinenden Werke: „Elemente der physikalischen Krystallographie“ ausführlich behandeln.

zu derselben stehenden, gewählt wurden. Hierdurch wurden unzweifelhaft einfache Formen, z. B. die hexagonale Pyramide, zu Combinationen mehrerer Flächencomplexe mit verschiedenen Indices, und jede Analogie mit den entsprechenden tetragonalen Formen geht verloren. Um diesem Uebelstande zu begegnen, hat Schrauf (Physikalische Mineralogie I. Th.) als Axenebene für die hexagonalen Krystalle die Hauptsymmetrie-Ebene und zwei gleichwerthige der anderen Symmetrie-Ebenen gewählt, also zu Axen die Hauptaxe und zwei gleichwerthige Nebenaxen; dadurch ist allerdings die Stellung gleich derjenigen der tetragonalen Krystalle geworden, aber während bei letzteren jede einfache Form, z. B. eine tetragonale Pyramide, die Gesammtheit aller möglichen Flächen mit denselben Indices darstellt — ist die entsprechende hexagonale Form aus Flächen mit zweierlei Indices zusammengesetzt. Bei der Wichtigkeit, welche die sogenannte Miller'sche Bezeichnungsweise wegen ihrer bequemen Verwendbarkeit beim Rechnen besitzt, scheint es nicht überflüssig, den Vorschlag zu einer Bezeichnung der hexagonalen Formen zu machen, welche jene Mängel zu beseitigen geeignet sein dürfte.

Die tetragonalen Formen besitzen eine Hauptsymmetrie-Ebene und vier dazu senkrechte Symmetrie-Ebenen, die paarweise gleichwerthig sind; die Normalen des einen Paares mögen Nebenaxen heissen, die des anderen Zwischenaxen, die Normale zur Basis Hauptaxe; alsdann empfiehlt es sich, zu Axen (für die Bestimmung der Elemente des Krystalls, wozu man ja bekanntlich drei beliebige Kanten desselben nehmen kann): die Hauptaxe und die beiden Nebenaxen (oder die Zwischenaxen, was gleichgiltig ist) zu wählen; und so geschieht es allgemein. Im hexagonalen Systeme haben wir nun bei analoger Wahl der Bezeichnungen ebenfalls eine Hauptaxe, aber drei Neben- und drei Zwischenaxen. Nehmen wir nun die Hauptaxe und zwei Nebenaxen (welche sich unter 60 Grad schneiden) zu Axen und beziehen irgend eine Form, z. B. eine Pyramidenfläche, auf diese, so hat die in einer Polkante anstossende zweite Fläche derselben Form andere Indices; sie hat aber dieselben, wenn wir sie beziehen auf die Hauptaxe, eine der beiden Nebenaxen und die dritte mit dieser gleichwerthige. Führen wir also noch den (an und für sich überflüssigen) Index der dritten Nebenaxe ein, so erhalten wir ein Symbol der Form[1], bestehend aus vier Indices, welches uns in der That als Gesammtheit aller möglichen Flächen mit gleichen Indices die ganze einfache Form liefert. Sei $(\xi h k l)$ das Symbol einer dihexagonalen Pyramide, worin $h$ und $k$ sich auf die Nebenaxen $H$ und $K$ (siehe Figur), $\xi$ (bekanntlich ist $\xi = h - k$) auf die dritte überflüssige $\Xi$, endlich $l$ auf die Hauptaxe $L$ bezieht, so sind, wenn man erwägt, dass die drei Nebenaxen gleichwerthig, also beliebig ver-




[1] Dieses Symbol ist einfach aus den reciproken Werthen des Weiss-schen Zeichens, welches ja ebenfalls vier Axenabschnitte enthält, bestehend.

tauschbar sind (mit der einzigen Beschränkung, dass die Werthe $h$ und $k$ sich stets auf zwei neben einander, also 60 Grad einschliessende Axenhälften beziehen müssen), folgende Flächen möglich:

$$
\begin{array}{cccccc}
(\xi h k l) & (\xi k h l) & (h k \xi l) & (k h \xi l) & (h \xi \bar{k} l) & (k \xi \bar{h} l) \\
(\xi \bar{h} \bar{k} l) & (\xi \bar{k} \bar{h} l) & (\bar{h} \bar{k} \xi l) & (\bar{k} \bar{h} \xi l) & (\bar{h} \xi k l) & (\bar{k} \xi h l) \\
(\xi h k \bar{l}) & (\xi k h \bar{l}) & (h k \xi \bar{l}) & (k h \xi \bar{l}) & (h \xi \bar{k} \bar{l}) & (k \xi \bar{h} \bar{l}) \\
(\xi \bar{h} \bar{k} \bar{l}) & (\xi \bar{k} \bar{h} \bar{l}) & (\bar{h} \bar{k} \xi \bar{l}) & (\bar{k} \bar{h} \xi \bar{l}) & (\bar{h} \xi k \bar{l}) & (\bar{k} \xi h \bar{l})
\end{array}
$$

dies sind aber genau die 24 Flächen einer dihexagonalen Pyramide.

In dem speciellen Falle der hexagonalen Grundpyramide haben die einzelnen Flächen folgende Symbole:

$$
\begin{array}{cccccc}
(0111) & (1101) & (10\bar{1}1) & (0\bar{1}\bar{1}1) & (\bar{1}\bar{1}01) & (\bar{1}011) \\
(011\bar{1}) & (110\bar{1}) & (10\bar{1}\bar{1}) & (0\bar{1}\bar{1}\bar{1}) & (\bar{1}\bar{1}0\bar{1}) & (\bar{1}01\bar{1})
\end{array}
$$

Diese Symbole gestatten die gleiche Verwendung beim Rechnen, z. B. zur Herleitung der Indices einer Fläche, welche durch zwei Zonen gegeben ist — wie die sonst üblichen, aus drei Zahlen bestehenden, wenn man nur einfach den auf die $\Xi$-Axe bezüglichen Index dabei fortlässt. Bekanntlich erhält man das Symbol $(p\,q\,r)$ einer Fläche, welche in zwei Zonen liegt, deren Symbole $[u\ v\ w]$ und $[u'\ v'\ w']$ sind, aus letzteren nach dem Schema:

$$
\begin{array}{c}
u \quad v \quad w \quad u \quad v \quad w \\
\times \quad \times \quad \times \\
u' \quad v' \quad w' \quad u' \quad v' \quad w' \\
\hline
v w' - w v', \quad w u' - u w', \quad u v' - v u' \\
= p \qquad\quad = q \qquad\quad = r
\end{array}
$$

Nach demselben Schema werden die Symbole der Zonen aus denen je zweier Flächen derselben berechnet (siehe v. Lang, Krystallographie). Da dieses Resultat von den Axenwinkeln ganz unabhängig ist, so sieht man leicht ein, dass die gleiche Berechnungsweise auch bei den oben vorgeschlagenen vierzähligen Symbolen möglich ist, sobald man für alle Flächen, welche zur Rechnung dienen, einen Index, welcher sich aber immer auf eine und dieselbe Nebenaxe beziehen muss, unbenutzt lässt, also mit der Hauptaxe und nur zwei Nebenaxen rechnet. Dadurch, dass man vorher für jede Fläche alle vier Indices bestimmt, ist die Reduction sämmtlicher Symbole auf dieselben drei Axen wesentlich erleichtert, die diesbezüglichen Symbole mit drei Indices können sofort abgeschrieben und zur Rechnung nach obigem Schema benutzt werden.

Beispiel: Die gewöhnliche trigonale Pyramide am Quarz liegt in der Zone einer rechten Rhomboëderfläche $+R$ mit der links anstossenden Prismenfläche $p_1$ und der benachbarten linken Rhomboëderfläche $-R$ mit der rechts davon liegenden Prismenfläche $p_2$. Es ist das Symbol

von $+R = (0111)$, für die Rechnung gekürzt $= (111)$
„ $p_1 = (1100)$, „ „ „ „ $= (100)$
das der Zone $= [01\bar{1}]$

von — $R$ = (1101), für die Rechnung gekürzt = (101)
„ $p_2$ = (0110), „ „ „ „ = (110)
von der Zone = [$\bar{1}$11]

Daraus das Symbol der zu bestimmenden Trigonoëderfläche = (211) und vervollständigt durch den Index der dritten Nebenaxe $\xi = h - k$ = (1211)

Für die Hemiëdrieen und Tetartoëdrieen wird nunmehr die gleiche Bezeichnungsweise einzuführen sein, wie im tetragonalen System.

1. Rhomboëdrische Hemiëdrie, entspricht vollkommen der sphenoidischen des tetragonalen Systems, wird also bezeichnet werden müssen mit: $\varkappa\ (\xi h k l)$;

2. Pyramidale Hemiëdrie, entsprechend der gleichbenannten im tetragonalen System, also zu bezeichnen mit: $\pi\ (\xi h k l)$;

3. Trapezoëdrische Hemiëdrie, entsprechend der tetragonalen trapezoëdrischen, $\varkappa''\ (\xi h k l)$.

Durch zweimalige Hemiëdrie entstehen tetartoëdrische Formen, wobei nur zu bemerken ist, dass die gleichzeitige Anwendung der pyramidalen und trapezoëdrischen Hemiëdrie ausgeschlossen werden muss, da sie sowohl im tetragonalen als im hexagonalen System aus raumumschliessenden Gestalten hemimorphe (den Raum nicht umschliessende) Formen liefert. Die beiden möglichen Tetartoëdrieen beider Krystallsysteme werden am kürzesten bezeichnet werden können durch Vorsetzen der Zeichen derjenigen beiden Hemiëdrieen, durch deren Anwendung sie entstehen. Dann sind dieselben im tetragonalen System zu bezeichnen:

1. $\varkappa\pi\ (hkl)$, diese wäre sphenoidische Tetartoëdrie zu nennen, da die aus der ditetragonalen Pyramide entstehenden Formen Sphenoide 3. Stellung sind;

2. $\varkappa\varkappa''\ (hkl)$, trapezoëdrische Tetartoëdrie, analog der des hexagonalen Systems zu benennen; die Viertelflächner der ditetragonalen Pyramiden, nach diesem Gesetze gebildet, entsprechen genau den trigonalen Trapezoëdern, haben aber statt sechs nur vier Flächen, welche demnach die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke besitzen müssen und gleichen in ihren Formen den rhombischen Sphenoiden, den hemiëdrischen Gestalten der Pyramiden des rhombischen Krystallsystems.

Keine von beiden Arten von Tetartoëdrieen im tetragonalen System ist bisher in der Natur nachgewiesen worden, dagegen sind die ihnen entsprechenden zwei hexagonalen Tetartoëdrieen an den Krystallen einer ganzen Reihe von Substanzen verwirklicht, nämlich:

1. $\varkappa\pi\ (\xi hkl)$, die rhomboëdrische (Dioptas);

2. $\varkappa\varkappa''\ (\xi khl)$, die trapezoëdrische (Quarz, überjodsaures Natrium, unterschwefelsaures Blei etc.).

Strassburg in Elsass.

Mineralogisches Institut der Universität. Juli 1874.