

Studienrichtung Vermessung und Geoinformation
Technische Universität Wien

GEOWISSENSCHAFTLICHE MITTEILUNGEN

Heft 59

Die runde Erde eben dargestellt

**Abbildungslehre
und sphärische Kartennetzentwürfe**



Dr. Kurt Bretterbauer,
em. o. Univ. Prof.
Institut für Geodäsie und Geophysik, Abteilung Höhere Geodäsie

Studienrichtung Vermessung und Geoinformation
Technische Universität Wien

GEOWISSENSCHAFTLICHE MITTEILUNGEN

Heft 59

Die runde Erde eben dargestellt

Abbildungslehre
und sphärische Kartennetzentwürfe



Dr. Kurt Bretterbauer,
em. o. Univ. Prof.
Institut für Geodäsie und Geophysik, Abteilung Höhere Geodäsie

Impressum:

Für den Inhalt verantwortlich:

Em. o. Univ. Prof. Dr. Kurt Bretterbauer
Abtlg. Höhere Geodäsie, TU Wien
Gusshausstrasse 27-29, 1040 Wien

e-mail: kbretter@luna.tuwien.ac.at

Druck: Hochschülerschaft TU Wien
Wirtschaftsbetriebe GmbH
A-1040 Wien

Auflage: 150 Stück

Die Kosten für den Druck wurden aus Drittmitteln der Abtlg. Höhere Geodäsie bestritten.

*„Nicht um Neues zu entdecken, sondern um
das Entdeckte nach meiner Art anzusehen.“*

Goethe

Motivation und Einführung

Nahezu jeder Autor beginnt sein Werk mit einem Vorwort. Darin erläutert er seine Motive zur Abfassung der Schrift und weist den Leser auf Besonderheiten seiner Darstellung hin. Ein wenig sollen damit auch die zu erwartenden kritischen Einwände entschärft werden. Das gilt auch hier.

Durch viele Jahrzehnte war die mathematische Lehre vom Kartennetzentwurf eine Pflichtvorlesung für Hörer der Studienrichtung „Vermessungswesen“ und wurde an der TU Wien seit jeher vom Ordinarius für Höhere Geodäsie gelesen. So habe auch ich diese schöne Theorie viele Jahre mit Freude vorgetragen. Vorbild war mir dabei mein verehrter Lehrer und Vorgänger im Ordinariat, der große Geodät Friedrich Hopfner. Obwohl die physikalische Geodäsie als sein primäres Forschungsgebiet galt, war ihm die mathematische Kartographie ein besonderes Anliegen. Selbst Mathematiker von hohen Graden, stützte er sich dabei auf die Flächentheorie von Gauß und die Verzerrungslehre von Tissot. Dies kommt auch in seiner Inaugurationsrede als Rektor der (damals) Technischen Hochschule Wien zum Ausdruck, der er den Titel „Lambert, Gauß, Tissot“ gegeben hat [Hopfner, 1949].

Die große Wissenserweiterung auch in der Geodäsie hat eine Entrümpelung des Lehrplans erfordert, dem leider auch die genannte Lehrveranstaltung zum Opfer gefallen ist. Da aber ein Geodät ohne Kenntnisse der Abbildungslehre undenkbar ist, mußten die mathematischen Grundlagen des Kartennetzentwurfes in eine andere Vorlesung eingebaut werden. Selbstverständlich muß der Lehrplan neuen Anforderungen angepaßt werden. Es mutet aber seltsam an, daß dies häufig auf Kosten von solchen Grundlagenfächern erfolgt, die den Geodäten erst definieren und ihn von anderen Geowissenschaftlern unterscheiden.

Nun mag man einwenden, es handle sich bei der mathematischen Kartographie um eine tote Wissenschaft, die sich nicht mehr weiter entwickelt. Dem steht entgegen, daß in England und in den USA eine durchaus rege Publikationstätigkeit auf diesem Gebiet herrscht. Auch werden in den letzten Jahren immer wieder Fragen zu kartographischen Problemen gestellt, die offenbar niemand zu beantworten weiß, sodaß sie schließlich meist bei mir landen. Leider werden nun auch von kartographischen Verlagen Atlanten und Kartenwerke veröffentlicht, ohne die verschiedentlich benützten Projektionen zu nennen. Es ist zwar eine reizvolle Aufgabe, die Art der Abbildung aus dem Gradnetz zu ermitteln, aber sicher eine Zumutung für das allgemeine Publikum. Neue Impulse erhält die Kartographie durch die Erkundung des Planetensystems und die Abbildung von Himmelskörpern [Stook, Keller, 1990], die stark von der sphärischen Gestalt abweichen.

Durch die Emeritierung von allen Verpflichtungen befreit, habe ich mich nun an die Ausführung eines lange gehegten Planes gemacht. Als seinerzeit der bekannte Geograph und Kartograph Prof. Erik Amberger die Herausgabe einer umfangreichen „Enzyklopädie der Kartographie und ihrer Randgebiete“ begann, hat er mir die ehrenvolle Aufgabe übertragen, den Band über die Kartennetzentwürfe zu verfassen. Noch bevor ich mich ernsthaft an die Arbeit machen konnte, verstarb Prof. Amberger unerwartet und auf tragische Weise. Die Fortführung der Enzyklopädie wurde dann

leider eingestellt. Nun lege ich in bescheidenerem Rahmen diese Monographie vor. Dabei konnte ich mir erlauben, weniger penibel zu recherchieren, als es für eine Enzyklopädie erforderlich gewesen wäre. Dafür habe ich mir die Freiheit genommen, einige eigene Kreationen aufzunehmen. Der Zweck der Monographie ist es, eine allgemeinverständliche Aufbereitung der mathematischen Grundlagen und die Darstellung von zahlreichen geläufigen, aber auch von einigen exotischen Abbildungen der Kugel. Die Abbildungen des Ellipsoides, die gerade für die Geodäsie von Bedeutung sind, werden hier nicht behandelt. Denn dabei geht es nicht wirklich um Abbildungen im strengen Sinne, sondern um die Schaffung von isothermen Koordinatensystemen, also um die Transformationen der Flächenkoordinaten auf dem Ellipsoid in Koordinaten, die auch als ebene cartesische Koordinaten gedeutet werden können.

Die vorliegende Schrift soll den Nutzern kartographischer Abbildungen auch als eine Art Nachschlagewerk dienen und ihnen helfen, nicht geläufige Projektionen zu ermitteln, oder die für einen bestimmten Zweck geeignetste Abbildung zu finden. Da jeder Nutzer von Karten deren Verzerrungseigenschaften kennen sollte, wird die Lehre von A. Tissot dargestellt. Eine solche Darstellung wirft einige grundsätzliche Fragen auf. Zunächst ist die Mannigfaltigkeit möglicher Abbildungen nahezu unbeschränkt, es kann daher keine Vollständigkeit erzielt werden. Jeder Experte wird manche Abbildung vermissen, andere wieder als überflüssig erachten. Wenn ich einige wirklich exotische Abbildungen aufgenommen habe, so geschah dies in der Absicht zu zeigen, was mit kartographischen Mitteln erreicht werden kann. Diese Entwürfe wurden nicht aus Übermut ersonnen, sondern zur Lösung konkreter Aufgaben. Einige Entwürfe allerdings dürften einer rein intellektuellen Herausforderung entstammen. Eine weitere Frage betrifft die Art der mathematischen Darstellung. Die allermeisten Abbildungen sind völlig elementar, nur die konformen Abbildungen stellen höhere mathematische Anforderungen bis hin zur Theorie der elliptischen Funktionen. Diese Theorie selbst abzuhandeln, hätte gewiß den Rahmen dieser Monographie gesprengt. Dennoch wurde die eine oder andere darauf basierende Projektion aufgenommen. Auch ließe sich eine modernere mathematische Darstellung denken, z.B. auf Grundlage der Tensorrechnung, [Heitz, 1985, 1988], [Chovitz, 1979], [Dermanis; Livieratos, 1983]. Das hätte aber möglicherweise den Kreis verständiger Leser eingeschränkt, deshalb blieb ich bei der klassischen Darstellung.

Ein besonderes Problem bietet die Einteilung der Netzentwürfe in ein Ordnungsschema. Von mehreren Möglichkeiten ist keine eindeutig und wirklich befriedigend; welche Wahl auch immer man trifft, Kritik ist dem Autor gewiß. Die Einteilung nach den Verzerrungseigenschaften erscheint als natürlichste. Dann aber müßten z.B. die verschiedenen perspektiven Abbildungen, die sehr einfach aus einem einzigen Ansatz herzuleiten sind, immer wieder neu behandelt werden. Ich habe deshalb die sich ebenso natürlich anbietende Einteilung in azimutale Abbildungen, und Abbildungen auf Zylinder und Kegel gewählt. Eine weitere Klasse bilden die „konventionellen“ Abbildungen. Damit seien solche bezeichnet, die nicht auf einem analytischen Ansatz, sondern auf einer Übereinkunft beruhen. Dabei wird einfach eine mehr oder minder willkürliche, analytische oder geometrische Vorschrift zur Konstruktion des Gradnetzes gegeben. Diese Bezeichnung wird auch von [Pearson II, 1990] im selben Sinne benützt.

Uneinheitlich ist auch die Terminologie in der Lehre vom Kartenentwurf. Man lese dazu das Vorwort von E. Hammer in seiner Übersetzung des Buches von A. Tissot [1887]. Manche im deutschen Sprachraum verwendete Benennungen klingen gekünstelt, wie z.B. „polständig“, „zwischenständig“ und „äquatorständig“. Ich finde „normal“, „schief“ und „transversal“ einfacher und ansprechender. Wie soll man weiters Abbildungen benennen, die weder flächen- noch winkeltreu sind? Ich habe noch keinen überzeugenden Ausdruck gefunden. Man könnte sie „allgemein“ bezeichnen. Hopfner hat in seiner Antrittsrede und in seiner Vorlesung dafür den

Begriff „aphylaktisch“ gebraucht. In der französischen Ausgabe des Werkes von Tissot findet sich neben anderen merkwürdigen Adjektiven auch „aphylactique“, dessen wahre Bedeutung und Herkunft mir unklar ist. Das Wörterbuch der französischen Sprache von Sachs-Villatte von 1904 kennt nur „aphylle“ (= blattlos). Mangels eines besseren Ausdrucks bleibe ich also bei „aphylaktisch“. Auch habe ich nicht beabsichtigt, historische Streitfragen zu klären. Wer wann welche Projektion angegeben hat, sei hier zweitrangig; allenfalls wird eine Jahreszahl angegeben. Zur Geschichte der Kartographie existieren eigene Werke. Auch wurde nicht versucht, in allen Fällen die Überlegungen nachzuvollziehen, die zur Entwicklung bestimmter Entwürfe geführt haben. Wann und in welchem Land die eine oder andere Projektion verwendet wurde, ist ebenfalls nicht Ziel dieser Abhandlung.

Um den Text nicht immer wieder mit der Erklärung von Bezeichnungen zu überfrachten, ist eine Liste der verwendeten Bezeichnungen vorangestellt. Ich bin zwar kein Freund von genormten Bezeichnungen, aber innerhalb einer geschlossenen Abhandlung erleichtern sie das Lesen. Von wenigen Ausnahmen abgesehen, bietet der Text keine neuen Erkenntnisse, alles ist in der Literatur in einschlägigen Bibliotheken zu finden, wenn auch sehr verstreut. Im Literaturverzeichnis habe ich die gängigsten Lehrbücher und alle jene Publikationen aufgenommen, die ich selbst eingesehen habe. Immer weniger Leute machen sich ja die Mühe, ältere, jedoch keineswegs veraltete Literatur zur Hand zu nehmen.

So möge dieser Band einen Beitrag zur Bewahrung alten, gesicherten Wissens leisten und wohlwollende Leser finden. Schließlich sind die kartografischen Netzentwürfe auch ein Kulturgut von nicht geringem Rang.

Gainfarn, Frühling 2002

Kurt Bretterbauer

ooooo00000ooooo

Liste der benützten Bezeichnungen

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$	ein Ortsvektor
u, v	allgemeine Gauß'sche Flächenparameter
$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$	abkürzende Bezeichnung für partielle Ableitungen
$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$	Tangentenvektor an die Parameterlinie $v = \text{const.}$
$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$	Tangentenvektor an die Parameterlinie $u = \text{const.}$
$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$	}	Fundamentalgrößen 1. Art
$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$		
$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$		
$W = \sqrt{EG - F^2}$		bestimmende Größe des Flächenelements
ds	Streckenelement
ds_1	Streckenelement auf der Parameterlinie $v = \text{const.}$
ds_2	Streckenelement auf der Parameterlinie $u = \text{const.}$
df	Flächenelement
τ	Längen- oder Streckenverzerrung
h	Längenverzerrung auf der Parameterlinie $v = \text{const.}$
k	Längenverzerrung auf der Parameterlinie $u = \text{const.}$
α	Winkel einer Richtung mit der Parameterlinie $v = \text{const.}$, auch Azimut
X, Y, Z	räumliche kartesische Koordinaten
x, y	ebene kartesische Koordinaten
R	Kugelradius
φ, λ	geographische Breite und Länge auf der Kugel
$p = 90^\circ - \varphi$	Poldistanz
q	isometrische Breite
Σ	äquivalente Breite
γ	ebene Meridiankonvergenz, auch Winkel zwischen zwei Flächenkurven
a, b	große und kleine Halbachse der Tissotschen Indikatrix

Dazu noch verschiedenste Bezeichnungen für Hilfsvariable

ooooo00000ooooo

Inhaltsübersicht

Kapitel 1: Abbildungslehre und Verzerrungstheorie	1
1.1 Flächendarstellung in Parameterform, 1	
1.2 Abbildungslehre, 4	
1.2.1 Längenverzerrung, 4	
1.2.2 Flächenverzerrung, 7	
1.2.3 Winkelverzerrung, 9	
1.2.4 Konforme Abbildung, 10	
1.2.5 Gauß'sche Zahlenebene und Riemann'sche Zahlenkugel, 11	
1.3 Geometrie der Kugel, 13	
1.3.1 Konforme Abbildung der Kugel, 14	
1.3.2 Flächentreue Abbildungen der Kugel, 17	
1.3.3 Orthodrome und Loxodrome, 19	
Kapitel 2: Allgemeines zu den Projektionen	22
2.1 Grundsätzliches, 22	
2.2 Über die Verzerrungseigenschaften, 23	
Kapitel 3: Azimutalprojektionen	26
3.0 Allgemeines, 26	
3.1 Perspektive Abbildungen, 26	
3.1.1 Orthographische Projektion, 28	
3.1.2 Externe Projektion, 30	
3.1.3 Stereographische Projektion, 31	
3.1.4 Gnomonische Projektion, 33	
3.1.4.1 Polyederprojektion, 33	
3.1.5 Stereographische Doppelprojektion, 34	
3.2 Analytische Azimutalprojektionen, 35	
3.2.1 Mittabstandstreue Azimutalprojektion, 35	
3.2.2 Flächentreue Azimutalprojektion von Lambert, 36	
3.2.3 Flächentreue Azimutalprojektion von Wiechel, 37	
Kapitel 4: Zylinderprojektionen	38
4.1 Echte Zylinderprojektionen, 38	
4.1.1 Konforme normale Zylinderprojektion, 39	
4.1.2 Konforme transversale Zylinderprojektion, 40	
4.1.3 Plattkarte von Marinus, 41	
4.1.4 Projektion von Cassini-Soldner, 41	
4.1.4 Lambert's flächentreue Zylinderprojektion, 42	

4.1.5 Abarten echter Zylinderprojektionen,	43
4.2 Unechte Zylinderprojektionen,	44
4.2.1 Pseudozylindrische Projektionen unterschiedlicher Eigenschaften,	45
Kapitel 5: Kegelpjektionen	60
5.1 Echte Kegelpjektionen,	60
5.1.1 Zentrale Kegelpjektion,	61
5.1.2 Konforme Kegelpjektionen,	62
5.1.3 Äquivalente Kegelpjektionen,	63
5.2 Polykonische Projektionen,	67
5.3 Unechte Kegelpjektionen,	70
Kapitel 6: Konventionelle Projektionen	73
6.1 Globularprojektionen,	73
6.2 Retroazimutalprojektionen,	78
6.3 Flächentreue Entwürfe,	80
6.4 Konforme Projektionen auf Basis elliptischer Integrale,	86
Literatur	91

oooo00000oooo

Kapitel 1

Abbildungslehre und Verzerrungstheorie

1.1 Flächendarstellung in Parameterform

Es sei $\mathbf{x}(u,v)$ ein Ortsvektor, der bei Variation von u und v in einem bestimmten Bereich eine Fläche überstreicht. Dabei sei vorausgesetzt, die Jacobische Determinante J (Funktionaldeterminante) habe den Rang zwei, d.h. daß wenigstens eine ihrer Unterdeterminanten nicht verschwindet:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.1)$$

Diese Bedingung kann auch durch das Vektorprodukt der partiellen Ableitungen ausgedrückt werden, was bedeutet, daß die Fläche überall eine eindeutige Normale besitzt:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \neq 0. \quad (1.1a)$$

Innerhalb des Definitionsbereichs entspricht dann einem Wertepaar (u,v) ein und nur ein bestimmter, sogenannter regulärer Flächenpunkt. Hält man u fest und variiert v , so beschreibt der Ortsvektor eine Kurve auf der Fläche, analog auch für $v = \text{const.}$ Auf diese Weise erhält man ein Netz von zwei Kurvenscharen, die Parameterlinien (*Abb. 1.1*).

Für geschlossene Flächen muß eine Parameterdarstellung für die ganze Fläche nicht immer möglich sein. Für die Kugel z.B. versagt sie in den Polen, dort verschwindet das Vektorprodukt (1.1a). Die Pole sind also durch das Parametersystem ausgezeichnet, was sich geometrisch nicht begründen läßt, denn die Kugel hat in den Polen Normalenvektoren, überdies sind auf der Kugel alle Punkte gleichberechtigt. Dieser Mangel der Parameterdarstellung wird auch bei den Abbildungen der Kugel hervortreten. Er läßt sich allerdings durch eine Umpolung (wird später behandelt) korrigieren.

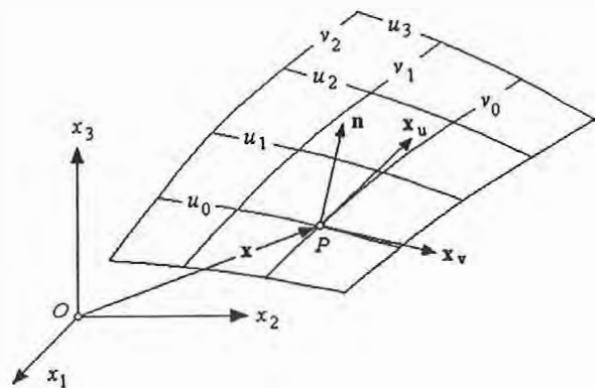


Abb. 1.1: Netz von Parameterlinien

Die Tangentenvektoren an die Parameterlinien $v = \text{const.}$ bzw. $u = \text{const.}$ sind gegeben durch:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}(u, v)}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}(u, v)}{\partial v}. \quad (1.2)$$

Betrachtet man u und v als differenzierbare Funktionen eines weiteren Parameters t (z.B. die Zeit), so beschreibt $\mathbf{x} = \mathbf{x}[u(t), v(t)]$ bei Variation von t eine Flächenkurve c . Charakterisiert man die Ableitungen nach der Zeit durch einen Punkt, dann gilt für den Tangentenvektor an die Kurve:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}, \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt}, \quad \text{daher } d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv. \quad (1.3)$$

Das Verhältnis $\dot{u}/\dot{v} = du/dv$ bestimmt die Tangenten- oder Fortschreitungsrichtung der Kurve. Die Länge des Tangentenvektors ist das Bogenelement der Kurve:

$$ds = |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt. \quad (1.3a)$$

Mit (1.3) wird daraus $ds = |\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv|$ und, wenn man quadriert:

$$ds^2 = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u du^2 + 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v dudv + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v dv^2. \quad (1.4)$$

Unter Verwendung der Fundamentalgrößen E, F und G erhält man die **1. Fundamentalform**:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (1.4a)$$

Sie bestimmt die Metrik einer Fläche und kann auch in Matrixform angeschrieben werden:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \quad (1.4b)$$

Da für alle du, dv stets $ds^2 > 0$, ist die Matrix in E, F, G positiv definit, d.h. $EG - F^2 > 0$. Aus (1.4a) kann man sofort die Bogenelemente der Parameterlinien bilden. Es sei ds_1 das Bogenelement der Linie $v = \text{const.}$, ds_2 jenes der Linie $u = \text{const.}$ Dann gilt (Abb. 1.2):

$$ds_1 = \sqrt{E} du, \quad ds_2 = \sqrt{G} dv. \quad (1.4c)$$

Nun seien zwei Flächenkurven c und c^* betrachtet (Abb. 1.2). Ihre Tangentenvektoren sind:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}, \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{x}_u \dot{u}^* + \mathbf{x}_v \dot{v}^*.$$

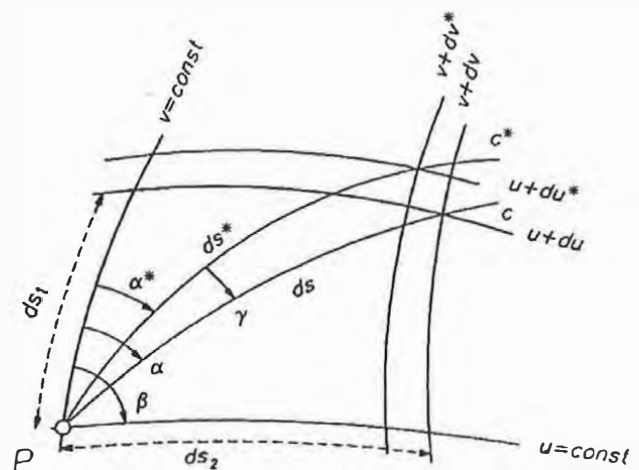


Abbildung 1.2: Zwei Flächenkurven

Der Winkel γ den beide Kurven einschließen, folgt aus dem Skalarprodukt zu:

$$\cos \gamma = \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}^*}{|\dot{\mathbf{x}}| |\dot{\mathbf{x}}^*|} = \frac{E\dot{u}\dot{u}^* + F(\dot{u}\dot{v}^* + \dot{v}\dot{u}^*) + G\dot{v}\dot{v}^*}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \sqrt{E\dot{u}^{*2} + 2F\dot{u}^*\dot{v}^* + G\dot{v}^{*2}}}. \quad (1.5)$$

(Sollte einem Leser das Ergebnis dieses Skalarprodukts seltsam erscheinen, so sei daran erinnert, daß es auf der Basis eines nicht-orthogonalen Systems ausgeführt wurde). Läßt man darin die Kurve c^* in die Parameterlinie $v = \text{const}$ fallen indem man $\dot{v}^* = 0$ setzt, erhält man den Winkel α , den die Kurve c mit der Parameterlinie einschließt (Abb. 1.2); aus dem Cosinus kann sofort auch Sinus und Tangens gebildet werden:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{E\dot{u} + F\dot{v}}{\sqrt{E}\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{E\dot{u} + F\dot{v}}{\sqrt{E}\dot{s}}, \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{EG - F^2}\dot{v}}{\sqrt{E}\dot{s}}, \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}\dot{v}}{E\dot{u} + F\dot{v}}. \end{aligned} \quad (1.5a)$$

Läßt man schließlich die eine Kurve in die Linie $u = \text{const.}$, die andere in die Linie $v = \text{const.}$ fallen, erhält man den Winkel β den beide Parameterlinien einschließen (Abb. 1.2):

$$\cos \beta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{F}. \quad (1.5b)$$

Man erkennt: Verschwindet F im ganzen Definitionsbereich von u, v so bildet das Netz der Parameterlinien ein Orthogonalnetz. In diesem Fall vereinfachen sich die Formeln (1.5a) zu:

$$\cos \alpha = \sqrt{E} \frac{\dot{u}}{\dot{s}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{G} \frac{\dot{v}}{\dot{s}}, \quad \tan \alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\dot{v}}{\dot{u}}, \quad (1.5c)$$

und die 1. Fundamentalform zu:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \quad (1.6)$$

Nun sei ein hinreichend kleines Parallelogramm mit den Seiten $|\mathbf{x}_u|du$, $|\mathbf{x}_v|dv$ betrachtet. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms folgt aus dem Vektorprodukt (Abb. 1.3):

$$\begin{aligned} df &= |\mathbf{x}_u du \wedge \mathbf{x}_v dv| = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv = Wdudv. \\ W^2 &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)^2 = [(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)] = \\ &= \mathbf{x}_u^2 \mathbf{x}_v^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 = EG - F^2. \end{aligned}$$

Damit ist das Flächenelement als Funktion der Gaußschen Fundamentalgrößen gewonnen:

$$df = \sqrt{EG - F^2} dudv = Wdudv. \quad (1.7)$$

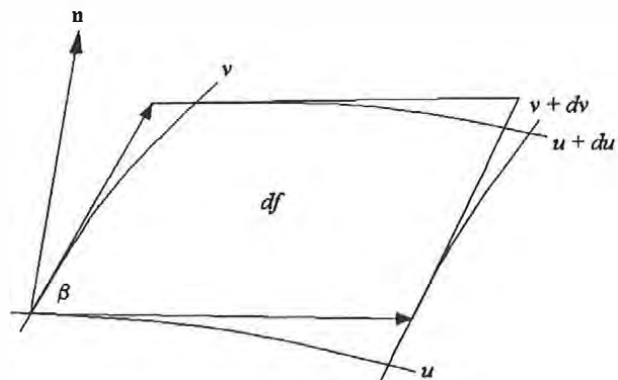


Abbildung 1.3: Flächenelement

1.2 Abbildungslehre

Unter einer Abbildung oder Projektion (von franz. projection = Entwurf) im allgemeinen Sinn versteht man die mathematisch definierte umkehrbar eindeutige Zuordnung einer Punktmenge einer in den Gauß'schen Parametern u, v gegebenen Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ zu einer Punktmenge einer anderen Fläche $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$. Die Parameter beider Flächen sind durch die Beziehungen verknüpft:

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v), \quad u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v}), \quad \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad (1.8)$$

sodaß durch die Abbildung Punkte beider Flächen mit denselben Parametern einander zugeordnet werden können:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}[\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)] = \bar{\mathbf{x}}(u, v). \quad (1.9)$$

Es gilt somit der **Satz 1 von Tissot**: *Jede umkehrbar eindeutige und stetig differenzierbare Abbildung zweier analytischer Flächen kann stets durch*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v), \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(u, v) \quad (1.10)$$

so dargestellt werden, daß einander entsprechende Punkte die gleichen Koordinaten u, v haben.

Alle in Kap. 1.1 hergeleiteten Formeln gelten sinngemäß auch für die zweite Fläche (die Abbildung).

Eine Taylorentwicklung der Gleichungen (1.10) liefert bei Vernachlässigung von Gliedern ab dem 2. Grad:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u + du, v + dv) &= \mathbf{x}(u, v) + \mathbf{x}_u(u, v)du + \mathbf{x}_v(u, v)dv + \dots \\ \bar{\mathbf{x}}(u + du, v + dv) &= \bar{\mathbf{x}}(u, v) + \bar{\mathbf{x}}_u(u, v)du + \bar{\mathbf{x}}_v(u, v)dv + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bei festem (u, v) und veränderlichen (du, dv) stellt (1.11) eine affine Beziehung zwischen den Tangentialebenen beider Flächen dar (sogen. berührende Affinität). Es gilt der

Satz 2 von Tissot: *Jede durch eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen zwei analytischen Flächen vermittelte Verwandtschaft ist im Kleinen affin.*

1.2.1 Die Längenverzerrung

Die Längen- oder Streckenverzerrung τ ist definiert durch das Verhältnis des Streckenelements im Abbild zu jenem im Urbild:

$$\tau = \frac{d\bar{s}}{\text{def } ds} > 0. \quad (1.12)$$

Unter Verwendung der 1. Fundamentalform der Differentialgeometrie ist:

$$\tau^2(u, v, du, dv) = \frac{\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \quad (1.13)$$

Die Längenverzerrung ist im allgemeinen also von Ort und Richtung abhängig. Sie hat dann und nur dann einen von der Richtung unabhängigen Wert, wenn gilt:

$$E = \mu^2(u, v)\bar{E}, \quad F = \mu^2(u, v)\bar{F}, \quad G = \mu^2(u, v)\bar{G}. \quad (1.14)$$

In diesem Fall geht die berührende Affinität in eine Ähnlichkeit über, die Flächen sind einander in den kleinsten Teilen ähnlich. Eine durch (1.14) gekennzeichnete Abbildung ist daher winkeltreu. Eine in allen Punkten winkeltreue Abbildung heißt nach Gauß eine „konforme Abbildung“. Ist insbesondere in (1.14) $\mu(u, v) = 1$, so wäre die Abbildung sogar längentreu, was nur in speziellen Fällen möglich ist, nämlich dann, wenn beide Flächen gleiche Gauß'sche Krümmung haben. Kugel und Ellipsoid können daher nicht längentreu auf Torsen abgebildet werden, vor allem nicht auf Kegel, Zylinder, oder Ebene.

Den Streckenverzerrungen in Richtung der Parameterlinien werden eigene Bezeichnungen zugelegt: Die Verzerrung auf der Parameterlinie $v = \text{const.}$, $dv = 0$, wird h , jene auf der Linie $u = \text{const.}$, $du = 0$, wird k benannt. Es gilt also:

$$h^2 = \bar{E}/E, \quad k^2 = \bar{G}/G. \quad (1.15)$$

Wenn nach (1.13) die Streckenverzerrung in einem Punkt (u, v) von der Richtung abhängt, so ist intuitiv einzusehen, daß ein infinitesimaler Kreis auf der Urfläche im allgemeinen als Ellipse abgebildet wird; das entspricht auch der Affinität im Kleinen. Diese Ellipse trägt den Namen „Tissot'sche Indikatrix“. Extremwertaufgaben, die hier übergangen seien, liefern sowohl die Richtungen (Hauptverzerrungsrichtungen), als auch die Werte der maximalen und minimalen Längenverzerrung. Es sei α der Winkel, den diese Hauptverzerrungsrichtungen mit der Parameterlinie $v = \text{const.}$ einschließen. Für das Urbild findet man:

$$\tan 2\alpha = \frac{2(E\bar{F} - \bar{E}F)\sqrt{EG - F^2}}{2F(E\bar{F} - \bar{E}F) + E(\bar{E}G - E\bar{G})} \quad (1.15)$$

und analog für das Abbild:

$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2(\bar{E}F - E\bar{F})\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}{2\bar{F}(\bar{E}F - E\bar{F}) + \bar{E}(\bar{E}\bar{G} - \bar{E}\bar{G})}. \quad (1.16a)$$

Da gilt: $\tan 2\alpha = \tan(2\alpha \pm 180^\circ)$, liefern die zwei Formeln jeweils zwei Werte für α , die sich um 90° unterscheiden. Mithin stehen die Hauptverzerrungsrichtungen normal aufeinander. Sie bilden die Achsen der Tissot'schen Indikatrix. Es folgt der wichtige

Satz 3 von Tissot: *In jeder reellen, stetig differenzierbaren, nicht konformen Abbildung zweier Flächen aufeinander gibt es genau ein reelles orthogonales Kurvennetz auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein orthogonales Netz entspricht. Mit Ausnahme der winkeltreuen Abbildung ist dies aber das einzige Orthogonalnetz, das sich wieder orthogonal abbildet.*

Dieser Satz ist von weitreichender Bedeutung. Er erlaubt es, in den weiteren Betrachtungen ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf beiden Flächen Orthogonalsysteme vorauszusetzen. Denn es steht ja frei, das Parametersystem in die Hauptverzerrungsrichtungen zu legen. Das bedeutet aber

noch keineswegs Winkeltreue; denn die Orthogonalität $F = \bar{F} = 0$ auf beiden Flächen ist eine notwendige, aber noch keine hinreichende Bedingung für Konformität.

Bilden die Parameterlinien der Urfläche ein Orthogonalnetz, dann ist $F = 0$. Wird dieses System so abgebildet, daß auch die Bilder der Parameterlinien ein Orthogonalnetz darstellen, so ist auch $\bar{F} = 0$. Dann aber folgt aus (1.16) und (1.16a):

$$\tan 2\alpha = \tan 2\bar{\alpha} = 0,$$

d.h. die beiden Hauptverzerrungsrichtungen fallen mit den zwei Scharen von Parameterlinien in Urbild und Abbild zusammen.

Die Halbachsen a und b der Indikatrix, also die Extremwerte der Längenverzerrung, ergeben sich ebenfalls aus einer etwas verwickelten Extremwertaufgabe in völliger Allgemeinheit zu:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overline{EG} - 2F\bar{F} + \overline{EG}}{EG - F^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{EG} - 2F\bar{F} + \overline{EG}}{EG - F^2} \right)^2 - 4 \frac{\overline{EG} - \bar{F}^2}{EG - F^2}} \right\}. \quad (1.17)$$

Legt man in Urbild und Abbild die Parameterlinien in die Hauptverzerrungslinien, ist also $F = \bar{F} = 0$, so reduziert sich (1.17) auf die einfachen Beziehungen:

$$a^2 = \overline{E}/E, \quad b^2 = \overline{G}/G, \quad h^2 = a^2, \quad k^2 = b^2. \quad (1.17a)$$

Außerdem gilt in diesem Fall:

$$\tau^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = h^2 \cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha. \quad (1.17b)$$

Betrachtet man im Urbild eine beliebige Richtung α und eine dazu normale Richtung $\alpha^* = \alpha + \pi/2$, dann ist $\cos \alpha^* = \sin \alpha$. Aufgrund der affinen Beziehung werden diese zwei orthogonalen Richtungen als konjugierte Durchmesser der Indikatrix abgebildet. Für diese zwei Richtungen gilt dann:

$$\tau^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \quad \tau^{*2} = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha, \quad \text{uns daraus:}$$

$$\tau^2 + \tau^{*2} = a^2 + b^2. \quad (1.18)$$

Diese Formel heißt der **Satz von Apollonius** (100 v. Chr.) der besagt: *Die Summe der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser ist gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen der Indikatrix.*

Der Satz gilt allgemein. Ist aber $F = 0$, dann gilt insbesondere:

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2. \quad (1.18a)$$

Um Mißverständnissen vorzubeugen: a und b sind Verhältniszahlen, nämlich die Extremwerte der Längenverzerrung, also dimensionslos; nur um die Indikatrix graphisch darstellen zu können, wird diesen Werten die Dimension einer Länge beigemessen.

Im allgemeinen ist die Bildfläche die Ebene. Um eine Indikatrix in das ebene kartesische System einzeichnen zu können, muß man die Richtung ihrer Achsen kennen (Abb. 1.4). Die Formel (1.16a) liefert nur den Winkel zur Parameterlinie $v = \text{const.}$ Was noch gebraucht wird, ist der Winkel, den die Tangente an diese Parameterlinie mit der y -Achse einschließt. Diesen gewinnt man aus den Abbildungsgleichungen

$$\bar{x} = \bar{x}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{y}(u, v)$$

durch die Beziehung:

$$\tan \Phi = \frac{\partial \bar{x} / \partial u}{\partial \bar{y} / \partial u}. \tag{1.19}$$

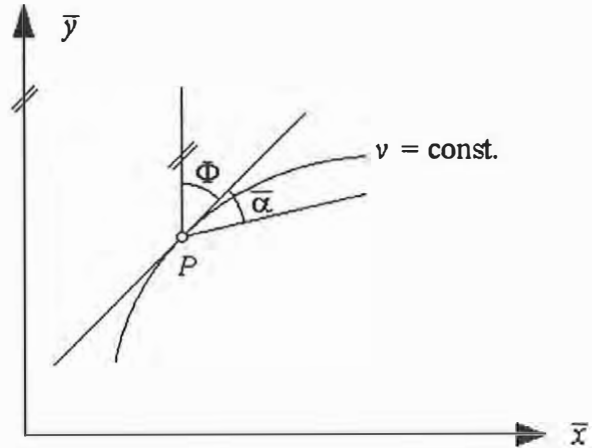


Abb. 1.4: Achsenrichtung der Indikatrix

1.2.2 Die Flächenverzerrung

In Analogie zur Definition der Längenverzerrung ist die Flächenverzerrung gegeben durch:

$$\sigma_{\text{def}} = \frac{d\bar{f}}{df} = \frac{\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{1.20}$$

Multipliziert man die beiden Ausdrücke (1.17) für a^2 und b^2 folgt: $a^2 b^2 = \frac{\overline{EG} - \overline{F}^2}{EG - F^2}$ und damit:

$$\sigma = ab. \tag{1.20a}$$

Dies folgt übrigens auch aus dem Verhältnis der Fläche der elliptischen Indikatrix ($= ab\pi$) zur Fläche des Einheitskreises ($= \pi$).

Unter Berücksichtigung der Formeln (1.5b) und (1.15) kann man (1.20) auch so anschreiben:

$$\sigma = hk \frac{\sin \bar{\beta}}{\sin \beta}. \tag{1.20b}$$

Im Falle $F = 0$, wie das beim üblichen Parametersystem der Meridiane und Breitenkreise der Kugel gegeben ist, ist $\beta = \pi/2$; in der Abbildung aber ist im allgemeinen $\bar{\beta} \neq \pi/2$. Setzt man $\bar{\beta} = \pi/2 - J$, so folgt:

$$\sigma = ab = hk \cos J. \tag{1.21}$$

Flächentreue Abbildungen sind durch $\sigma = 1$ gekennzeichnet. Während die bisherigen Betrachtungen auf die Verhältnisse im Kleinen bezogen waren, gilt die Flächentreue auch im Großen, d.h. entsprechende endliche Flächenstücke haben in Urbild und Abbild gleiche Inhalte. Das folgt sofort aus:

$$\text{Area} = \iint \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \iint \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \, dudv = \overline{\text{Area}}.$$

Man erkennt weiters: Wegen $\sigma = ab = 1$ ist stets entweder $a > 1$ und $b < 1$, oder umgekehrt. Daher muß es zwischen den Achsen der Indikatrix zwei symmetrisch gelegene Richtungen geben, in denen $\tau = 1$ ist, also Längentreue herrscht. Es gilt der

Satz: *In jeder flächentreuen Abbildung gibt es zwei Kurvenscharen, in denen Längentreue herrscht.*

Welche Richtungen haben diese längentreuen Kurvenscharen, die mit dem Index st (für streckentreu) charakterisiert werden sollen? Unter der Annahme $F = \bar{F} = 0$ und vorausgesetzter Längentreue gilt nach (1.13)

$$\frac{\bar{E}du^2 + \bar{G}dv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = 1.$$

Division von Zähler und Nenner durch du^2 und Berücksichtigung von (1.17a) liefert:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\bar{E} - E}{G - \bar{G}} \frac{E(\bar{E}/E - 1)}{G(1 - \bar{G}/G)} - \frac{E(a^2 - 1)}{G} - \frac{E}{G}a^2 = \frac{E}{G} \frac{1}{b^2}.$$

Andererseits gilt nach (1.5c) für eine Richtung im orthogonalen System:

$$\tan^2 \alpha_{st} = \frac{G}{E} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{E}{G} \tan^2 \alpha_{st}.$$

Zusammen mit der vorstehenden Formel folgt endgültig für diese Richtungen im Urbild:

$$\tan \alpha_{st} = \pm a = \pm 1/b. \quad (1.22)$$

Analog zu (1.5c) gilt allgemein für eine Richtung in der Abbildung:

$$\cos \bar{\alpha} = \sqrt{\bar{E}} \frac{du}{d\bar{s}} = \sqrt{\bar{E}} \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}}, \quad \sin \bar{\alpha} = \sqrt{\bar{G}} \frac{dv}{d\bar{s}} = \sqrt{\bar{G}} \frac{dv}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}}.$$

Bedenkt man, daß $ds/d\bar{s} = 1/\tau$ und berücksichtigt abermals (1.5c) und (1.17a) so gewinnt man:

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{a}{\tau} \cos \alpha, \quad \sin \bar{\alpha} = \frac{b}{\tau} \sin \alpha, \quad \tan \bar{\alpha} = \frac{b}{a} \tan \alpha. \quad (1.23)$$

Diese Beziehung gilt allgemein und daher auch für die gesuchten längentreuen Richtungen in der Abbildung. Mit (1.22) folgt demnach:

$$\tan \bar{\alpha}_{st} = \pm b = \pm 1/a. \quad (1.22a)$$

1.2.3 Die Winkelverzerrung

Die Winkelverzerrung wird in Analogie zur Längenverzerrung als das Verhältnis entsprechender Winkelemente definiert. Durch Differentiation der 3. Formel (1.23) erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha} &= \frac{b \cos^2 \bar{\alpha}}{a \cos^2 \alpha} && \text{und mit der 1. Formel (1.23) schließlich:} \\ \frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha} \tau^2 &= ab = \sigma. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Man folgert daraus den **Satz**: *Das Produkt aus Winkelverzerrung und dem Quadrat der Längenverzerrung ist für alle von einem Punkt ausgehenden Richtungen konstant, nämlich gleich der Flächenverzerrung.*

Das bedeutet: Wenn die Längenverzerrung ein Maximum erreicht, muß die Winkelverzerrung ein Minimum haben und umgekehrt. Daher fallen die Richtungen extremer Winkelverzerrung mit den Hauptverzerrungsrichtungen zusammen. Da die extremen Längenverzerrungen mit a und b bezeichnet wurden, folgen die extremen Winkelverzerrungen aus (1.24) zu:

$$\left(\frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha}\right)_1 = \frac{b}{a}, \quad \left(\frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha}\right)_2 = \frac{a}{b}. \quad (1.25)$$

Es gibt also in jedem Punkt stets zwei Bereiche, in denen $d\bar{\alpha}/d\alpha < 1$ bzw. $d\bar{\alpha}/d\alpha > 1$ ist. Diese Bereiche werden durch die Richtungen getrennt, in denen $d\bar{\alpha}/d\alpha = 1$ ist (Separatrix, Abb. 1.5).

In diesem Fall wird (1.25) zu $\tau^2 = ab$ und mit (1.17b) folgt nach einfachen Umformungen:

$$\tan \alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \tan \bar{\alpha}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}. \quad (1.26)$$

Die Verzerrung eines beliebigen Richtungswinkels α erhält man aus der Differenz des Winkels in Abbildung und Urbild. Aus der 3. Formel (1.23) gewinnt man:

$$\tan(\bar{\alpha} - \alpha) = \frac{(b-a)\tan\alpha}{a + b \tan^2 \alpha}. \quad (1.27)$$

Die Verzerrung eines von zwei Richtungen eingeschlossenen Winkels $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$ folgt in analoger Weise zu:

$$\tan \bar{\gamma} = \frac{ab(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1)}{a^2 + b^2 \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}. \quad (1.28)$$

Die maximale Verzerrung, die eine Richtung erleiden kann tritt offenbar dann ein, wenn $d(\bar{\alpha} - \alpha)/d\alpha = 0$, d.h. wenn $d\bar{\alpha}/d\alpha = 1$ ist. Das sind aber genau jene vorher bestimmten Richtungen der Separatrix. Somit ist die maximal mögliche Verzerrung eines Richtungswinkels α

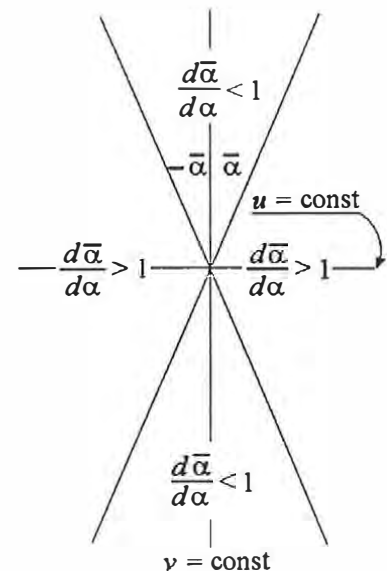


Abb. 1.5: Separatrix

gegeben durch $\omega = \bar{\alpha}_{1,2} - \alpha_{1,2}$. Da es aber zu α_1 eine symmetrisch gelegene Richtung $\alpha_2 = -\alpha_1$ gibt, beträgt die maximale Verzerrung, die ein von zwei Richtungen eingeschlossener Winkel erleiden kann offenbar $\delta = 2\omega = 2(\bar{\alpha}_{1,2} - \alpha_{1,2})$. Diese **maximale Winkelverzerrung** gewinnt man aus (1.26) zu:

$$\tan \omega = \tan(\bar{\alpha}_{1,2} - \alpha_{1,2}) = \frac{\tan \bar{\alpha}_{1,2} - \tan \alpha_{1,2}}{1 + \tan \bar{\alpha}_{1,2} \tan \alpha_{1,2}} = \frac{b - a}{2\sqrt{ab}}$$

und daraus endgültig:

$$\sin \omega = \sin \frac{\delta}{2} = \frac{b - a}{b + a}. \quad (1.29)$$

1.2.4 Konforme Abbildungen

Der Begriff der Konformität wurde bereits früher angesprochen; sie ist durch die Beziehungen (1.14) charakterisiert. Die Indikatrix wird in diesem Fall zu einem Kreis mit dem Radius $a = b = \mu(u, v)$. Konforme, oder winkeltreue Abbildungen werden in der Geodäsie bevorzugt; denn wenn schon Längenverzerrungen unvermeidlich sind, sollen sie wenigstens unabhängig von der Fortschrittrichtung sein, oder anders gesagt, ein rechteckiges Grundstück soll auch in der Abbildung rechteckig bleiben.

Es sei nun auf der Urfläche ein orthogonales und isometrisches Parametersystem (u', v') angenommen, also ein System auf dessen Parameterlinien gleicher Maßstab herrscht. Dann gilt: $F = 0$ und $E = G$ und die 1. Fundamentalform reduziert sich auf:

$$ds^2 = E(u', v')(du'^2 + dv'^2). \quad (1.30)$$

Das Parametersystem bildet also ein Netz von infinitesimalen Quadraten. Die Größe der Quadrate ist von $E(u', v')$, d.h. vom Ort abhängig. Ein Parametersystem, in dem die 1. Fundamentalform die Gestalt (1.30) hat, heißt **isotherm**. Auf einer regulären Flächen lassen sich beliebig viele isotherme Parametersysteme finden, aber auch das cartesische System der Ebene ist isotherm.

Nun denke man sich auf derselben Fläche ein anderes, ebenfalls isothermes Parametersystem gegeben, das mit (x, y) bezeichnet sei. Eine Beziehung $(u', v') \leftrightarrow (x, y)$ ist ebenfalls eine „Abbildung“, wenn auch auf dieselbe Fläche. In dem neuen System gilt analog:

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

Wie schon erwähnt, gehorcht diesem Gesetz auch das ebene cartesische Koordinatensystem, bei dem sogar $\bar{E}(x, y) = 1$ ist. Die Zuordnung beider Systeme ist durch die Beziehungen gegeben:

$$x = x(u', v'), \quad y = y(u', v'), \quad u' = u'(x, y), \quad v' = v'(x, y). \quad (1.31)$$

Auf grund der genannten Eigenschaften dieser Parametersysteme kann die Zuordnung auch als eine Abbildung in die Ebene *gedeutet* werden. Soll diese Abbildung konform sein, so muß gelten:

$$\bar{E}(u', v') = \bar{G}(u', v'), \quad \bar{F}(u', v') = 0, \quad \text{oder} \quad x_{u'}^2 + y_{u'}^2 = x_{v'}^2 + y_{v'}^2 \quad \text{und} \quad x_{u'}x_{v'} + y_{u'}y_{v'} = 0.$$

Man sieht, die Vektoren $(x_{u'}, y_{u'})$ und $(x_{v'}, y_{v'})$ sind orthogonal und haben gleiche Beträge, die Matrix $\begin{pmatrix} x_{u'} & x_{v'} \\ y_{u'} & y_{v'} \end{pmatrix}$ muß daher proportional einer orthogonalen Matrix sein. Soll diese eine positive Determinante haben, muß gelten:

$$x_{u'} = y_{v'}, \quad x_{v'} = -y_{u'}. \quad (1.32)$$

Das sind die aus der Funktionentheorie bekannten **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**. Sie besagen, daß mit

$$z = x(u', v') + iy(u', v'), \quad w = u' + iv', \quad i = \sqrt{-1}, \quad (1.32a)$$

die Funktion $z = f(w)$ eine reguläre analytische, oder holomorphe Funktion der komplexen Variablen w sein muß. Der Übergang von einem isothermen System (u', v') zu einem anderen isothermen System (x, y) wird also durch die holomorphe Funktion $x + iy = f(u' + iv')$ vermittelt. Der umgekehrte Vorgang wird von der inversen Funktion $u' + iv' = g(x + iy)$ geleistet.

Es gilt der **Satz von Gauß** (1822): *Jede beliebige holomorphe Funktion $x + iy = f(u' + iv')$ der komplexen Veränderlichen $(u' + iv')$ liefert eine konforme Abbildung auf die euklidische Ebene, wenn man x und y als kartesische Koordinaten der Ebene deutet. Die x -Koordinate ist der Realteil, die y -Koordinate der Imaginärteil der Funktion:*

$$x = \operatorname{Re}[f(u' + iv')], \quad y = \operatorname{Im}[f(u' + iv')]. \quad (1.33)$$

Diese Funktionen haben eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft. Differenziert man die 1. Gleichung von (1.32) nach v' , die 2. Gleichung nach u' und addiert, sodann die 1. Gleichung nach u' , die 2. nach v' und addiert abermals, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_{u'u'} + x_{v'v'} = 0, \quad y_{u'u'} + y_{v'v'} = 0, \quad \text{oder mit dem Laplace-Operator } \Delta \\ \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0. \end{aligned} \quad (1.33a)$$

Dies sind die homogenen, linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung von Laplace.

1.2.5 Gaußsche Zahlenebene und Riemannsche Zahlenkugel

Faßt man $z = x + iy$ als Punkt der komplexen Zahlenebene auf, so kann dieser auch in trigonometrischer oder Exponentialdarstellung gegeben werden (Abb. 1.6):

$$z = x + iy = \rho(\cos \psi + i \sin \psi) = \rho e^{i\psi}. \quad (1.34)$$

Für die Betrachtung komplexer Zahlen mit großem Absolutbetrag ist aber eine andere Darstellung vorteilhafter. Riemann [Rühs, 1983] hat vorgeschlagen, die komplexe Zahlenebene umkehrbar eindeutig auf eine Zahlenkugel abzubilden.

Man lege die Zahlenebene in den Mittelpunkt der Einheitskugel (Abb. 1.7). Jeder Punkt der Zahlenebene werde durch einen Sehstrahl mit dem „Pol“ Q verbunden und der Strahl mit der Kugel geschnitten, somit der Punkt eineindeutig auf die Kugel abgebildet. Das Innere des Einheitskreises wird auf die untere, das äußere Gebiet auf die obere Halbkugel abgebildet.

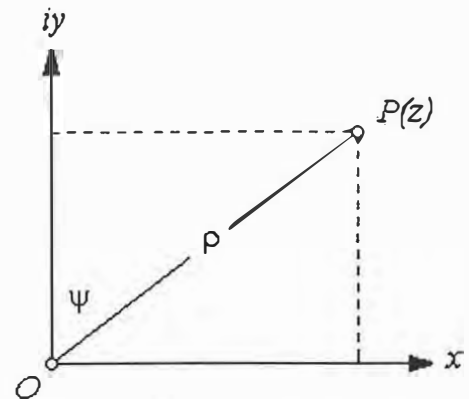


Abb. 1.6: Komplexe Zahlenebene

Dabei sei noch vereinbart, daß dem Pol Q der uneigentliche (unendlich ferne) Kreis $z = \infty$ entspricht. Dem Gegenpol entspricht $z = 0$.

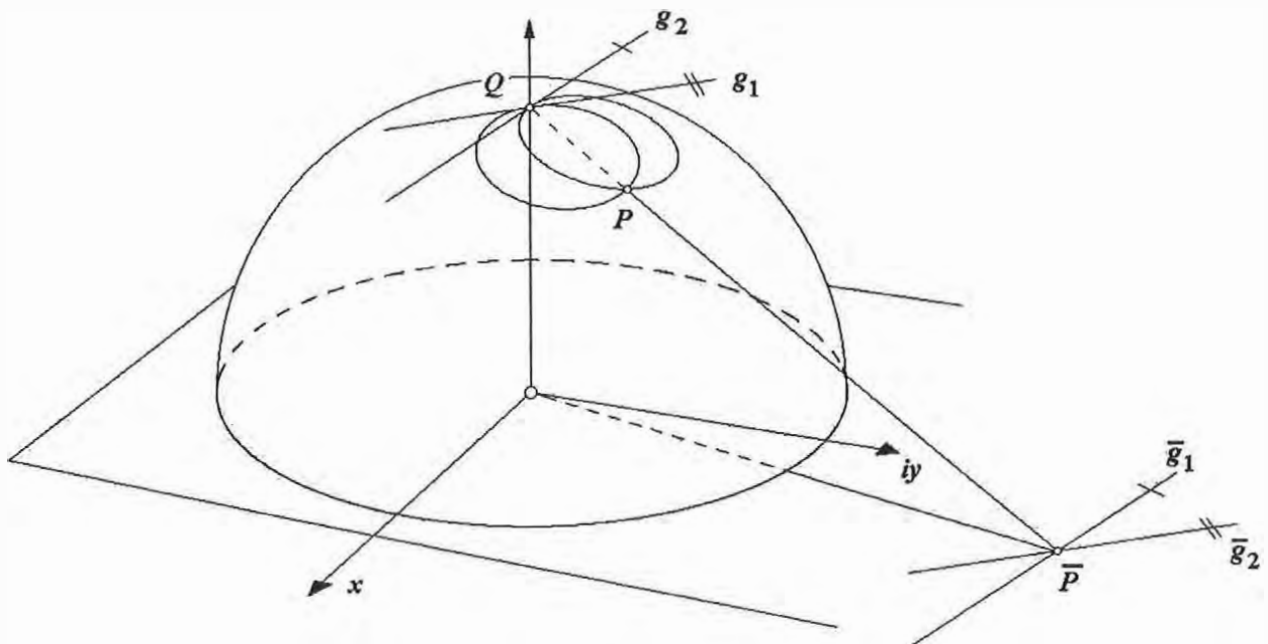


Abbildung 1.7: Riemannsche Zahlenkugel

Bei dieser Abbildung handelt es sich um die wichtige „Stereographische Projektion“. Für $\rho = 1$ sind ihre Abbildungsgleichungen durch (1.34) gegeben:

$$z = e^{i\omega} \rightarrow x + iy = e^{i(u'+iv')} = e^{-v'}(\cos u' + i \sin u'). \quad (1.34a)$$

Trennung von Real- und Imaginärteil gibt:

$$x = e^{-v'} \cos u', \quad y = e^{-v'} \sin u'. \quad (1.35)$$

Tatsächlich erfüllen diese Beziehungen die Differentialgleichungen (1.32). Die Stereographische Projektion hat neben der Winkeltreue noch die bemerkenswerte Eigenschaft der Kreistreue, d.h.

jeder Kreis auf der Kugel wird als Kreis in der Ebene abgebildet; im Sonderfall, wenn dieser Kreis durch den Pol Q geht (Abb. 1.7) entartet der Bildkreis zu einer Geraden (Kreis mit unendlich großem Radius).

Beide Eigenschaften, Winkeltreue und Kreistreue, lassen sich elementar geometrisch beweisen. Man denke sich in der Bildebene zwei sich schneidende Gerade (Abb. 1.7). Die Sehstrahlen an diese Geraden aus dem Augpunkt Q bilden Ebenen, deren Schnitt mit der Kugel Kreise durch Q ergeben. Schneidet man weiter diese Ebenen mit der Tangentialebene in Q , ergeben sich zwei zu den ursprünglichen Geraden parallele Gerade, die sich unter dem selben Winkel schneiden wie die Geraden in der Bildebene. Diese Geraden in der Tangentialebene können auch als Tangenten an zwei beliebige Kurven gedeutet werden. Aber auch die Tangenten an die Kreise im Punkt P schneiden sich unter dem selben Winkel. Diese Überlegung kann für jeden Punkt der Kugel als Pol angestellt werden, somit ist die Abbildung winkeltreu.

Zum Beweis der Kreistreue denke man sich einen Punkt außerhalb der Kugel und von diesem als Spitze den Tangentenkegel an die Kugel gelegt. Die Berührkurve ist ein Kreis. Nun bilde man die Spitze des Kegels und seine Erzeugenden stereographisch in die Ebene ab. Das ergibt ein Geradenbüschel durch das Bild der Spitze. Das Bild des Berührkreises muß wegen der Konformität eine Kurve sein, die das Geradenbüschel orthogonal schneidet. Der Kreis aber ist die einzige Kurve, die diese Bedingung erfüllt.

1.3 Geometrie der Kugel

Die Parametrisierung der Kugel möge (Abb. 1.8) durch $u \rightarrow \varphi =$ geographische Breite, $v \rightarrow \lambda =$ geographische Länge erfolgen. Die Kurven $\varphi = \text{const.}$ bilden die Breiten- oder Parallelkreise, jene für $\lambda = \text{const.}$ die Meridiane. Die Kugel vom Radius R ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{X} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

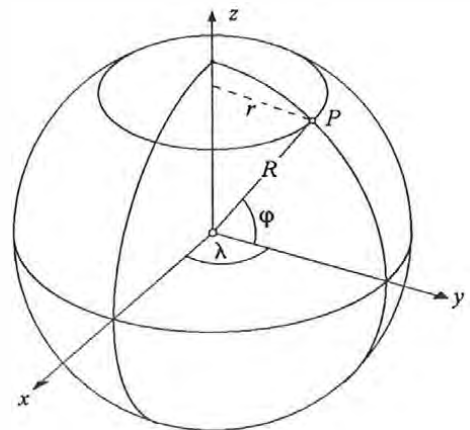


Abb. 1.8: Geogr. Koordinaten

Die Fundamentalgrößen 1. Ordnung sind:

$$\mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi = E = R^2, \quad \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\lambda = F = 0, \quad \mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\lambda = R^2 \cos^2 \varphi. \quad (1.37)$$

Man sieht, das Parametersystem ist zwar orthogonal, aber nicht isometrisch. Bogen- und Flächenelement errechnen sich zu:

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2), \quad df = R^2 \cos\varphi d\varphi d\lambda. \quad (1.38)$$

Im folgenden wird der Einfachheit halber häufig $R = 1$ gesetzt. Es sei nun eine Projektion der Kugel durch allgemeine Abbildungsgleichungen vermittelt: $x = x(\varphi, \lambda)$, $y = y(\varphi, \lambda)$. Die drei Fundamentalgrößen sind dann:

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\lambda = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2, \\
\bar{F} &= \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_\lambda = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \\
\bar{G} &= \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Nun sollen alle früher allgemein gültigen Formeln für die Kugel spezialisiert werden. Es gilt: Streckenverzerrung in Meridian und Parallelkreis:

$$h = \sqrt{\bar{E}}, \quad k = \sqrt{\bar{G}} / \cos \varphi. \tag{1.40}$$

Hauptverzerrungsrichtungen in der Abbildung:

$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2\bar{F}\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}}{2\bar{F} - \bar{E}(\bar{G} - \bar{E}\cos^2\varphi)}. \tag{1.41}$$

Achsen der Indikatrix:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 \\ b^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{E} + \frac{\bar{G}}{\cos^2\varphi} \pm \sqrt{\left(\bar{E} - \frac{\bar{G}}{\cos^2\varphi} \right)^2 + \frac{4\bar{F}^2}{\cos^2\varphi}} \right\}. \tag{1.42}$$

Flächenverzerrung:
$$\sigma = \frac{\bar{W}}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right). \tag{1.43}$$

Der Winkel J um den der rechte Winkel der Parameterlinien der Kugel durch die Abbildung verzerrt wird, folgt aus (1.21) zu:

$$\cos J = \frac{\bar{W}}{hk \cos\varphi}, \quad \sin J = \frac{\bar{F}}{hk \cos\varphi}, \quad \tan J = \frac{\bar{F}}{\bar{W}}. \tag{1.44}$$

Das geographische Netz der Kugel zeigt *Abb. 1.9a*.

1.3.1 Konforme Abbildungen der Kugel

Konforme Abbildungen werden durch Zuordnung isothermer Parametersysteme vermittelt. Um auf dem geographischen Netz Isometrie herzustellen, muß man den Maßstab auf den Meridianen derart ändern, daß er in gleicher Weise mit der Breite variiert, wie der Maßstab auf den Parallelkreisen, d.h. man muß die Dichte der Parallelkreise ändern. Dies wird durch die „isometrische Breite“ q erreicht. Man setzt: $dq = d\varphi / \cos\varphi$. Wenn $\varphi = 0$, dann soll auch $q = 0$ sein. Damit folgt:

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \ln \cot \left(\frac{p}{2} \right), \quad \text{Mercatorfunktion} \quad (1.45)$$

wenn $p = \pi/2 - \varphi$, die Poldistanz bedeutet. Für spätere Anwendungen seien noch die Beziehungen von q zu den hyperbolischen Funktionen angeführt. Aus (1.45) folgt $e^q = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$, daher:

$$\begin{aligned} e^q + e^{-q} &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = \\ &= \frac{2}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{2}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)} = \frac{2}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (1.45a)$$

Jede Formelsammlung gibt den Zusammenhang von $e^q + e^{-q}$ mit den Hyperbelfunktionen, und gemeinsam mit (1.45a) folgt somit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^q + e^{-q}) &= \cosh q = \sec \varphi, \\ \frac{1}{2} (e^q - e^{-q}) &= \sinh q = \sqrt{\cosh^2 q - 1} = \sqrt{\sec^2 \varphi - 1} = \tan \varphi, \\ \tanh q &= \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.45b)$$

Weiters gilt allgemein, hier aber speziell für die geographische Länge λ ausgeschrieben:

$$\sinh i\lambda = i \sin \lambda, \quad \cosh i\lambda = \cos \lambda. \quad (1.45c)$$

Diese Formeln werden gebraucht, wenn man konforme Abbildungen aus einem komplexen Ansatz herleiten will und den Real- und Imaginärteil trennen muß.

An dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß konforme Projektionen auch auf Basis **elliptischer Funktionen** entwickelt werden können, wie dies eindrucksvoll von Adams [1925] oder Lee [1976] gezeigt wurde. Eine Darstellung dieser Theorie kann hier nicht gegeben werden; sie würde langwierige mathematische Betrachtungen erfordern und den Rahmen dieser Monographie sprengen.

Die Umkehrung von (1.45) ist: $\varphi = 2 \arctan e^q - \pi/2$. Somit lautet die isotherme Parameterdarstellung der Kugel:

$$\mathbf{X} = R \begin{pmatrix} \cos(2 \arctan e^q - \pi/2) \cos \lambda \\ \cos(2 \arctan e^q - \pi/2) \sin \lambda \\ \sin(2 \arctan e^q - \pi/2) \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Die Fundamentalgrößen ergeben sich nun zu:

$$E(q, \lambda) = \left(\frac{2e^q}{1+e^{2q}} \right)^2, \quad F(q, \lambda) = 0, \quad G(q, \lambda) = \left\{ \cos(2\arctan e^q - \pi/2) \right\}^2. \quad (1.46b)$$

Tatsächlich ist nun $E = G$, was nicht sofort ersichtlich ist; der Nachweis gelingt, wenn man bedenkt, daß $e^{iq} = \cos q + i \sin q$. Den isothermen Charakter der Parameter (q, λ) erkennt man auch an der Form des Bogenelements. Mit $R = 1$ gilt nach (1.38):

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2.$$

Mit $dq = d\varphi/\cos \varphi$ folgt die typische Form des Bogenelements in isothermen Koordinaten zu:

$$ds^2 = \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2).$$

Nun können im Prinzip beliebige konforme Abbildungen der Kugel produziert werden, indem man Funktionen der Form $x + iy = f(q + i\lambda)$ annimmt. Diese erfüllen dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wegen ihrer großen Bedeutung seien diese nochmals elementar hergeleitet. Eine konforme Abbildung stellt einen funktionalen Zusammenhang zwischen den isothermen Koordinaten der Ebene (x, y) und den isothermen Koordinaten der Kugel (q, λ) dar. Daher gilt:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q} dq + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (1.47)$$

Ist ds ein Bogenelement der Einheitskugel im Azimut A , so sind seine Komponenten im Meridian bzw. Parallel gegeben durch:

$$ds \cos A = \cos \varphi dq, \quad ds \sin A = \cos \varphi d\lambda. \quad (1.47a)$$

Das entsprechende Bogenelement in der Ebene ist nach (1.12) gleich $\tau \cdot ds$. Es schließt mit der x -Achse den Winkel $(A + \gamma)$ ein, worin γ die **ebene Meridiankonvergenz** heißt. Sie ist der Winkel, den das Bild eines Meridians mit der x -Achse einschließt. Die Komponenten dieses Bogenelements in x - und y -Richtung sind demnach:

$$dx = \tau ds \cos(A + \gamma), \quad dy = \tau ds \sin(A + \gamma). \quad (1.47b)$$

Aus (1.47a und b) läßt sich bilden:

$$\begin{aligned} dx &= \tau ds (\cos A \cos \gamma - \sin A \sin \gamma) = \tau \cos \varphi (\cos \gamma dq - \sin \gamma d\lambda), \\ dy &= \tau ds (\sin A \cos \gamma + \cos A \sin \gamma) = \tau \cos \varphi (\sin \gamma dq + \cos \gamma d\lambda). \end{aligned} \quad (1.47c)$$

Zusammen mit (1.47) folgt daraus:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \tau \cos \varphi \cos \gamma, \quad -\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial y}{\partial q} = \tau \cos \varphi \sin \gamma, \quad (1.48)$$

also wieder die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Sie sind, wie es sein muß, unabhängig vom Azimut A .

Aus analogen Überlegungen gelangt man auch zu den inversen Beziehungen:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\cos \gamma}{\tau \cos \varphi}, \quad -\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\sin \gamma}{\tau \cos \varphi}. \quad (1.48a)$$

Aus (1.48) bildet man sofort den Ausdruck für die Längenverzerrung sowie die Meridiankonvergenz von konformen Abbildungen der Kugel:

$$\tau = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \tan \gamma = \frac{\partial y}{\partial q} / \frac{\partial x}{\partial q}. \quad (1.49)$$

Analog aus (1.48a):

$$\tau = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \tan \gamma = \frac{\partial q}{\partial y} / \frac{\partial \lambda}{\partial y}. \quad (1.49a)$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen können aber auch in den geographischen Koordinaten φ und λ ausgedrückt werden (jetzt wieder in der vereinfachten Schreibweise der Differentialquotienten):

$$x_\varphi = \frac{y_\lambda}{\cos \varphi}, \quad x_\lambda = -\cos \varphi y_\varphi. \quad (1.50)$$

Diese Form gilt aber **nur** für die Kugel. Das isotherme Netz der Kugel ist in (Abb. 1.9b) zu sehen.

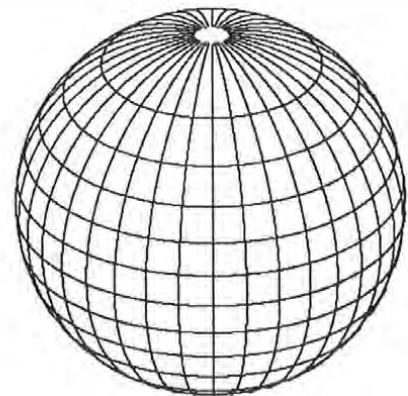
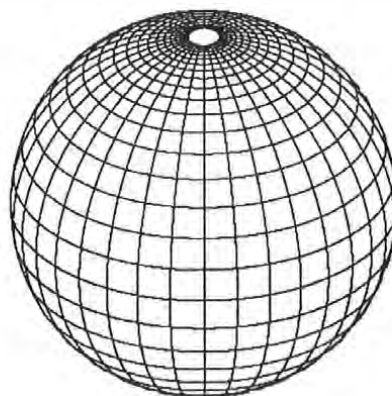
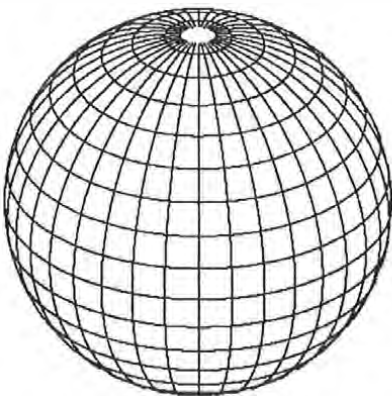


Abb. 1.9a: Geographisches Netz

Abb. 1.9b: Isothermes Netz

Abb. 1.9c: Äquivalentes Netz

1.3.2 Flächentreue (äquivalente) Abbildungen der Kugel

Flächentreue herrscht, wenn $\sigma = ab = 1$, oder in der für die Kugel spezialisierten Form (1.43):

$$x_{\varphi} y_{\lambda} - x_{\lambda} y_{\varphi} = \cos \varphi. \quad (1.51)$$

Den Term auf der rechten Gleichungsseite kann man durch Einführung der „äquivalenten Breite“ Σ eliminieren:

$$d\Sigma = \cos \varphi d\varphi \rightarrow \Sigma = \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi. \quad (1.52)$$

Da $2\pi \sin \varphi$ die Fläche einer Kugelzone vom Äquator bis in die Breite φ darstellt, ist die äquivalente Breite das Verhältnis der Fläche der Kugelzone zur halben Fläche der Einheitskugel. *Abb. 9c* zeigt das Netz der äquivalenten Parameterlinien.

Mit der äquivalenten Breite erhält man die neue Äquivalenzbedingung:

$$x_{\Sigma} y_{\lambda} - x_{\lambda} y_{\Sigma} = 1. \quad (1.52a)$$

Aus (1.52a) lassen sich flächentreue Abbildungen „produzieren“. Angenommen, die eine Abbildungsgleichung sei vorgegeben: $x = x(\Sigma, \lambda)$. Unter der Voraussetzung, daß x_{Σ} und x_{λ} reelle analytische Funktionen von Σ und λ sind, gibt die Integration der Differentialgleichung (1.52a):

$$y = f(x) - \int \frac{d\Sigma}{x_{\lambda}^*}. \quad (1.53)$$

Der Stern soll andeuten, daß x_{λ} als Funktion von Σ und x aufzufassen ist, nicht von Σ und λ . In (1.53) ist $f(x)$ eine beliebig gewählte Funktion von x . Zur Verifikation setzt man:

$$\frac{d\Sigma}{x_{\lambda}^*} = z(\Sigma, x), \quad \frac{1}{x_{\lambda}^*} = \frac{dz}{d\Sigma} \rightarrow \frac{dz}{d\Sigma} x_{\lambda}^* = 1 \quad (1.54)$$

und bildet die partiellen Ableitungen von (1.53):

$$\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \left| \cdot \frac{\partial x}{\partial \Sigma} \right. \\ \frac{\partial y}{\partial \Sigma} = \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial x}{\partial \Sigma} - \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial \Sigma} - \frac{dz}{d\Sigma} \quad \left| \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right. \end{array} \quad \text{subtrahieren.}$$

Erweiterung mit den angegebenen Differentialquotienten und Subtraktion liefert:

$$\frac{\partial x}{\partial \Sigma} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \Sigma} = \frac{dz}{d\Sigma} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{dz}{d\Sigma} x_{\lambda}^* = 1. \quad (1.54a)$$

Damit ist gezeigt, daß (1.53) eine Lösung der Gleichung (1.52a) ist.

Ebenso könnte die Abbildungsgleichung $y = y(\Sigma, \lambda)$ vorgegeben sein. Dann folgt die zweite Abbildungsgleichung aus, wobei $g(y)$ eine beliebige Funktion von y ist:

$$x = g(y) + \int \frac{d\Sigma}{y\lambda}, \quad (1.55)$$

Die vorgegebenen Funktionen $x = x(\Sigma, \lambda)$ bzw. $y = y(\Sigma, \lambda)$ können als vollkommen willkürlich betrachtet werden. Durch die Wahl solcher analytischer Funktionen kann eine Mannigfaltigkeit von flächentreuen Abbildungen hergeleitet werden.

1.3.3 Orthodrome und Loxodrome

Zwei ausgezeichnete Kurven spielen eine besondere Rolle in der Kartographie, vor allem im Zusammenhang mit Navigationsaufgaben: der Großkreis (Orthodrome) und die Azimutgleiche (Loxodrome).

Ein Großkreis kann auf zwei Arten gegeben sein: a) durch zwei Fixpunkte, oder b) durch einen Fixpunkt, das Ausgangsazimut α und die Bogenlänge δ ($\delta = s/R$, wenn s die Bogenlänge in km ist). Der Abb. 1.10 entnimmt man die Beziehungen:

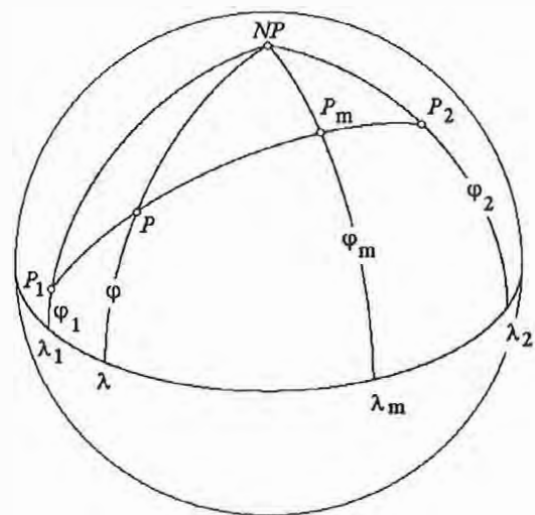


Abb. 1.10: Orthodrome mit Poldreieck

$$\cos \delta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sin \delta} [\cos \varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)], \quad (1.56)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \varphi_1 \tan \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Variante a): Soll ein Großkreis in eine beliebige Abbildung eingezeichnet werden, sind zahlreiche Zwischenpunkte zu berechnen. Dazu muß die Gleichung des Großkreises aufgestellt werden. Die Ortsvektoren zu den zwei Fixpunkten und zu dem laufenden Punkt (ohne Index) sind komplanar, d.h. ihr Spat verschwindet. Daraus gewinnt man die Formel:

$$\tan \varphi \sin(\lambda_2 - \lambda_1) + \tan \varphi_1 \sin(\lambda_2 - \lambda) + \tan \varphi_2 \sin(\lambda - \lambda_1) = 0. \quad (1.57)$$

Mit den Hilfsgrößen:

$$c_1 = \frac{\tan \varphi_2 \cos \lambda_1 - \tan \varphi_1 \cos \lambda_2}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad c_2 = \frac{\tan \varphi_1 \sin \lambda_2 - \tan \varphi_2 \sin \lambda_1}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

kann (1.57) leicht nach φ aufgelöst werden:

$$\varphi = \arctan(c_1 \sin \lambda + c_2 \cos \lambda). \quad (1.57a)$$

Die Auflösung von (1.57) nach λ erfolgt über die Hilfsvariablen M und m , wobei c_1 und c_2 ihre obige Bedeutung behalten:

$$c_1 = m \cos M, \quad c_2 = m \sin M, \quad m = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad M = \arctan(c_2/c_1), \quad \text{und damit:}$$

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{\tan \varphi}{m}\right) - M. \quad (1.58)$$

Die für die Variante b) der Großkreisfestlegung erforderlichen Beziehungen dienen gleichzeitig einer in der Kartographie häufig auftretenden Aufgabe, der sogenannten „Umpolung“. Oft ist es nämlich zweckmäßig, als Parameter nicht Breite und Länge, sondern die sphärischen Polarkoordinaten α und δ einzuführen (Abb. 1.11). Der Ausgangspunkt des Großkreises kann zu einem Pseudopol gemacht werden, der oft der Hauptpunkt HP einer Abbildung genannt wird. Die Kurven $\alpha = \text{const.}$ sind nun Pseudomeridiane, die Kurven $\delta = \text{const.}$ Pseudoparallelkreise. Geht HP in den echten Pol über, so wird $\alpha \rightarrow \lambda$, und $\delta = 90^\circ - \varphi = p$ (Poldistanz). Poldistanz und Länge stellen also auch ein Polar-system dar.

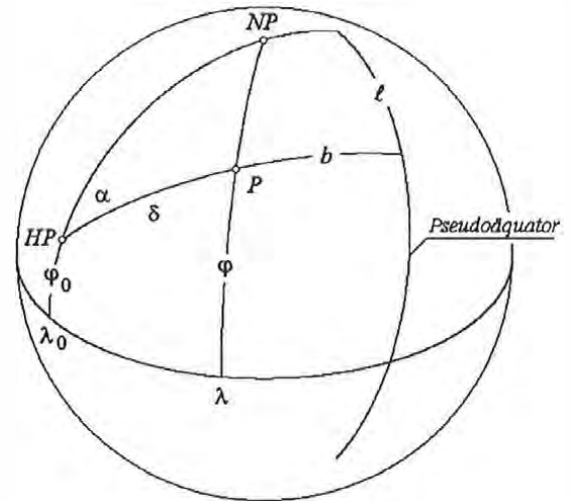


Abb. 1.11: Sphärische Polarkoordinaten

Nach Abb. 1.11 gilt:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos \delta + \cos \varphi_0 \sin \delta \cos \alpha, \quad \sin(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\cos \varphi}, \quad \text{oder}$$

$$\tan(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin \alpha}{\cot \delta \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \alpha}, \quad (1.59)$$

aber auch mit $b =$ Pseudobreite, $\ell =$ Pseudolänge:

$$\sin b = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0),$$

$$\sin \ell = \frac{1}{\cos b} [\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi], \quad (1.59a)$$

$$\cos \ell = \frac{1}{\cos b} [\cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) - \sin \varphi \cos \varphi_0]$$

Besonders einfach wird die Gleichung des Großkreises, wenn man seinen höchsten Punkt (mit $\varphi = \text{max.} = \varphi_m$) einführt (Abb. 1.10); dort wird $\alpha = \pi/2$. Es gilt:

$$\tan \lambda_m = \frac{\tan \varphi_2 \cos \lambda_1 - \tan \varphi_1 \cos \lambda_2}{\tan \varphi_1 \sin \lambda_2 - \tan \varphi_2 \sin \lambda_1}, \quad (1.60)$$

$$\tan \varphi_m = \frac{\tan \varphi_1}{\cos(\lambda_m - \lambda_1)} = \frac{\tan \varphi_2}{\cos(\lambda_m - \lambda_2)}.$$

Die Gleichung des Großkreises läßt sich nun so formulieren:

$$\tan \varphi = \tan \varphi_m \cos(\lambda_m - \lambda), \quad \text{und} \quad \cos \varphi \sin \alpha = \cos \varphi_m. \quad (1.60a)$$

Die zweite Gleichung (1.60a) heißt der **Satz von Clairaut**. Er gilt übrigens für alle geodätischen Linien auf Rotationsflächen.

Die **Loxodrome** ist eine Kurve konstanten Azimuts und deshalb für die Schifffahrt von Bedeutung (Segeln mit konstantem Kurs). Sie ist zwar länger als die Orthodrome, aber einfacher zu navigieren.

Der *Abb. 1.12a* entnimmt man:

$$\tan \alpha = \text{const} = \frac{R \cos \varphi d\lambda}{R d\varphi}, \quad \rightarrow \quad d\lambda = \tan \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (1.61)$$

Man erkennt, daß wieder das Differential der isometrischen Breite auftaucht. Mit (1.45) liefert daher die Integration von (1.61) für die Längendifferenz zweier Punkte der Loxodrome:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan \alpha \left\{ \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right\}. \quad (1.62)$$

Die Bogenlänge der Loxodrome folgt aus:

$$s = \frac{R}{\cos \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{R}{\cos \alpha} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.63)$$

Abbildung 1.12b zeigt den Großkreis (voll) und die Loxodrome (gestrichelt) zwischen den Punkten $P_1(-10^\circ, -40^\circ)$ und $P_2(70^\circ, 75^\circ)$. Für $\alpha = 0^\circ$ geht die Loxodrome in den Meridian, für $\alpha = 90^\circ$ in den Parallelkreis über. Für alle übrigen Azimute und in ihrer vollen Ausdehnung windet sich die Loxodrome unendlich oft um die Pole.

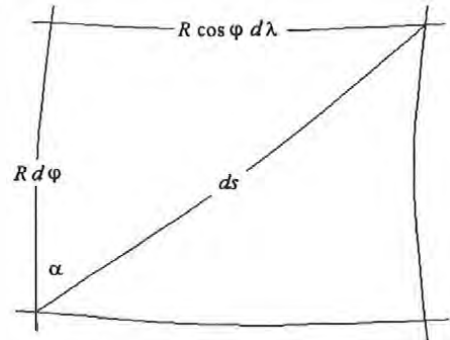


Abb. 1.12a: Bogenelement der Loxodrome

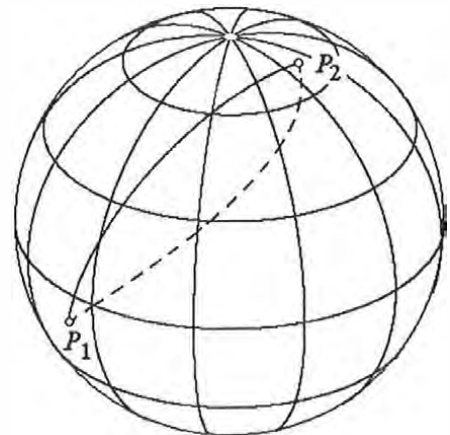


Abbildung 1.12b: Großkreis (voll) und Loxodrome (gestrichelt)

oooooooooooo

Kapitel 2

Allgemeines zu den Projektionen

2.1 Grundsätzliches

Der Begriff „Projektion“ ist als Entwurf, Zeichnung, Bild zu verstehen und nur in eingeschränktem Sinne als echte Abbildung durch Projektion der Kugel aus einem Augpunkt auf die Ebene, nämlich nur bei den sogenannten perspektiven Projektionen. Im allgemeinen beruhen die Projektionen auf einer analytischen Beziehung zwischen den sphärischen Koordinaten der Kugel und den ebenen cartesischen Koordinaten, in einigen Fällen auch auf einer willkürlichen geometrischen Vorschrift (Übereinkunft) zur Konstruktion des Gradnetzes. Letztere Projektionen nenne ich deshalb konventionelle (oder allgemeine) Projektionen. Die Entwürfe werden in den Kapiteln Azimutalprojektionen, echte und unechte Kegelprojektionen, echte und unechte Zylinderprojektionen und konventionelle Projektionen abgehandelt. Übrigens ließen sich, zumindest theoretisch, Kegel-, Zylinderprojektionen und Abbildungen auf eine Ebene unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt betrachten, nämlich als allgemeine Kegelprojektion. Läßt man die Spitze des Kegels gegen Unendlich rücken, entsteht eine Zylinderprojektion, rückt er an die Kugeloberfläche, erhält man die Tangentialebene. Das wird an einem konkreten Beispiel gezeigt.

Wie schon im Vorwort angedeutet, ist die Zahl der möglichen Projektionen nahezu unbeschränkt. Früher war die Einfachheit der Bilder der Meridiane und Parallelkreise (Geraden, Kreise) von großer Bedeutung für die Wahl einer Abbildung, was heute natürlich obsolet ist. Bedenkt man den oft sehr großen Rechenaufwand zur Darstellung eines Gradnetzes in der jeweiligen Abbildung, muß man allen Autoren, denen noch keine Computer zur Verfügung standen, höchste Bewunderung zollen. Der Computer erlaubt, beliebige, auch noch so komplizierte Vorschriften zur ebenen Darstellung des sphärischen Gradnetzes zu verwirklichen. Aus jeder Projektion lassen sich Varianten ableiten, entweder durch Änderung bestimmter Parameter, oder durch Umpolung bzw. Umbeziffern des Gradnetzes. In einigen Fällen werden solche Varianten gezeigt. Auch können zwei verschiedene Entwürfe kombiniert werden. Viele Abbildungen sind durch bloßen Anblick kaum voneinander zu unterscheiden, besonders dann nicht, wenn nur ein Teil der Erdoberfläche dargestellt ist. In viele Projektionen der ganzen Erde (Weltkarten, Planisphären) werden an deren Rändern geographische Formen oft bis zur Unkenntlichkeit verzerrt. Das spricht jedoch keineswegs gegen eine solche Abbildung. Denn man wird das am meisten interessierende Gebiet in das Zentrum der Projektion rücken, wo es in allen Fällen entweder einen Punkt, eine oder zwei Geraden gibt, in denen keinerlei Verzerrungen auftreten, die Projektion also absolut treu ist. Ein solcher Punkt wird häufig der Hauptpunkt der Projektion bezeichnet. Die verzerrungsfreien Geraden sind meist der Zentralmeridian und/oder der Äquator, oder zwei symmetrisch gelegene Parallelkreise. Wird eine Karte der Umgebung solcher Gebiete erstellt, so ist es eher belanglos, welche Projektion gewählt wird, man kann sie kaum unterscheiden.

Entgegen dem geodätischem Brauch und in Übereinstimmung mit den Bildschirm-Koordinatensystem, habe ich in allen Formeln und Abbildungen das ebene System als mathematisch positiv angenommen: die x -Achse weist nach Osten, die y -Achse nach Norden. Der

Kugelradius R ist für die graphische Darstellung nur ein Maßstabsfaktor. Deshalb wird in den Abbildungsgleichungen durchwegs $R = 1$ gesetzt. Die Kontinuumrisse wurden von Dipl. Ing. E. Antes schon vor vielen Jahren im Zuge seiner Diplomarbeit digitalisiert, später von mir noch ergänzt. Im allgemeinen wurde in den Abbildungen ein $30^\circ \times 30^\circ$ -Netz gewählt, in Ausnahmefällen auch $15^\circ \times 15^\circ$, oder $10^\circ \times 10^\circ$. Der Einfachheit halber ist das Gradnetz nur dort beschriftet, wo dies zum Verständnis notwendig erschien. In den allermeisten Abbildungen dieser Arbeit ist der Greenwicher Meridian zugleich auch der Zentralmeridian.

Zur Illustration des Umstandes, daß in bestimmten Bereichen verschiedene Projektionen kaum voneinander zu unterscheiden sind, seien zwei extrem verschiedene Abbildungen gezeigt. *Abb. 2.1a* ist die quadratische Plattkarte (aphylaktisch) und *Abb. 2.1b* die konforme Zylinderprojektion von Mercator (Gradnetz jeweils $30^\circ \times 30^\circ$).

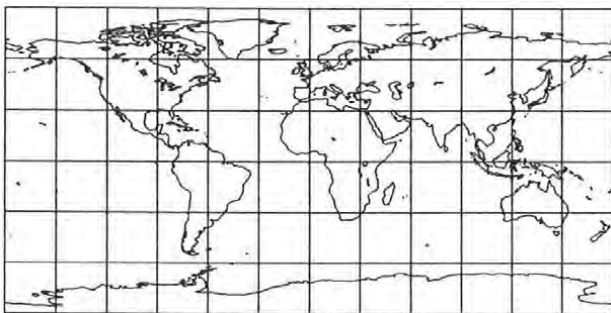


Abb. 2.1a

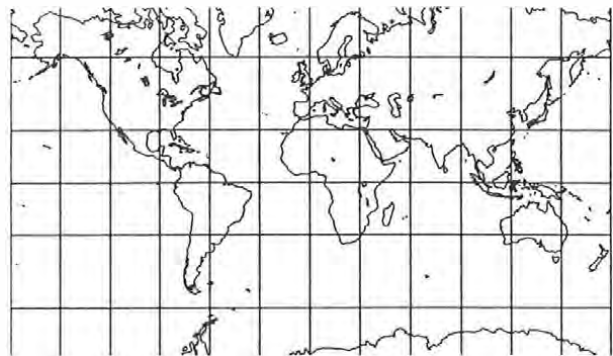


Abb. 2.1b

Man vergleiche die Äquatorzone zwischen $\pm 30^\circ$ Breite.

An einigen Beispielen wird auch gezeigt, wie sich die Bilder von Großkreisen und Loxodromen in den Projektionen darstellen. Auch die Astronomie bedient sich häufig kartographischer Mittel zur Darstellung der Himmelssphäre. Dazu eignen sich allerdings nur relativ wenige Projektionen. Einige wichtige Beispiele werden gezeigt.

Sollen geographische Strukturen aus einer Karte wohldefinierter Projektion digitalisiert werden, benötigt man die Umkehrung der Abbildungsgleichungen, also die Berechnung von geographischer Breite und Länge aus den ebenen Koordinaten x, y . Diese Umkehrung ist meist trivial, häufig aber nur durch Iteration möglich.

2.2 Über die Verzerrungseigenschaften

Die Berechnung der Verzerrungseigenschaften ist oft weniger kompliziert als es nach den strengen Formeln von Kapitel 1 erscheinen mag, für viele Projektionen sehr schwierig, manchmal sogar unmöglich. Sie wird daher nur in einigen exemplarischen Fällen durchgeführt. Um jedoch für alle Abbildungen eine Vorstellung der Verzerrungseigenschaften zu geben, habe ich mich an einen Grundsatz von A. R. Hinks [Geographical Journal, 1934] gehalten: *There is much to be said for the belief that the best way of judging a world-projection is to look at it*. Das setzt allerdings voraus, daß der Betrachter die „wahre“ Form bestimmter Strukturen im Kopf hat, z.B. Kontinuumrisse, oder Sternbilder. Ein besseres Mittel dazu ist eine standardisierte Form, nämlich die Tissot'sche Verzerrungsellipse. Deshalb werden die Indikatrizen in viele Netzbilder eingezeichnet. Das erschien mir instruktiver als die Konstruktion Linien gleicher Verzerrungen, wie dies manche Autoren getan haben z.B. [Canters, F., Declair, H., 1989]. Das Verfahren zur Darstellung der Indikatrizen ist

zudem sehr einfach: Man konstruiert um einen Punkt der Kugel einen sphärischen Kleinkreis mit genügend kleinem Radius (hier $1' = 1$ Seemeile) und bildet diesen punktweise in die Ebene ab. Das läuft auf die Ersetzung der an sich notwendigen Differentialquotienten durch Differenzenquotienten hinaus. Dabei ist folgendes zu beachten: Wie schon in Kap. 1 erläutert, sind die Achsen der Indikatrix a und b Verhältniszahlen, also dimensionslos. Zur graphischen Darstellung aber muß man ihnen die Dimension einer Länge zuteilen und ihre numerischen Werte mit einem entsprechenden Faktor erweitern, sodaß ein gefälliges Bild entsteht. Dazu ein Beispiel: Es seien die nach den strengen Formeln von Kap. 1 berechneten Werte $a = 1.23$, $b = 0.81$, $ab = 1$ (die Abbildung wäre also flächentreu). Dann kann man, wenn es in das Netzbild paßt, diese Werte als 1.23 cm und 0.81 cm deuten, ebenso gut aber auch als 2.46 cm und 1.62 cm, also ihre verdoppelten Werte. Nun ist natürlich die Äquivalenzbedingung $ab = 1$ nicht mehr erfüllt. Für die graphische Darstellung ist dies aber irrelevant, wichtig ist, daß in einer flächentreuen Abbildung alle Indikatrizen ebenfalls flächengleich, oder in einer konformen Projektion ausschließlich Kreise sind. *Abb. 2.2a* und *2.2b* sollen dies anschaulich machen (Gradnetz $30^\circ \times 30^\circ$).

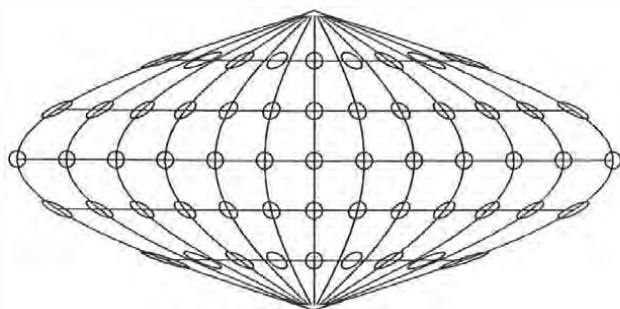


Abb. 2.2a

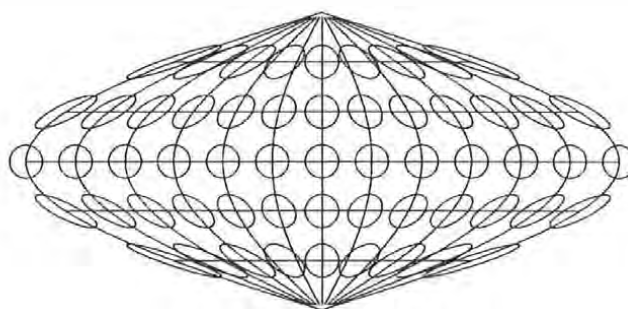


Abb. 2.2b

Es handelt sich um die flächentreue pseudozyklindrische Projektion von Sanson-Flamsteed. In *Abb. 2.2a* sind die Indikatrizen etwas zu klein, in *Abb. 2.2b* vielleicht etwas zu groß dargestellt. Man entnimmt dem bloßen Anblick eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Abbildung: Da die Indikatrizen entlang des Äquators und des Mittelmeridians Kreise gleicher Radien sind, herrscht entlang dieser Geraden absolute Treue. In den Polen ist die Indikatrix im allgemeinen unbestimmt, kann daher nicht dargestellt werden.

Andere Autoren, wie z.B. [Robinson, A. H. e. a., 1988], haben zur Illustration der Verzerrungen ein maskenhaftes menschliches Antlitz an verschiedene Stellen von Projektionen plazierte, wodurch frappierende Wirkungen erzielt werden.

Zur Beurteilung der mittleren Streckenverzerrung in einem Punkt der Abbildung wurden von verschiedenen Autoren Kriterien angegeben [Bugayevskiy, Snyder, 1995]. Einige davon sind:

- Kriterien von Airy:
$$\varepsilon_{A1}^2 = \frac{1}{2} \left[(a-1)^2 + (b-1)^2 \right]. \quad (2.1a)$$

$$\varepsilon_{A2}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (ab-1)^2 \right]. \quad (2.1b)$$

- Kriterium von Airy-Kawraisky:
$$\varepsilon_K^2 = \frac{1}{2} \left[\ln^2 a + \ln^2 b \right]. \quad (2.2)$$

- Kriterium von Jordan:
$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tau-1)^2 d\alpha. \quad (2.3)$$

- Kriterium von Jordan-Kawraisky: $\epsilon_{JK}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 \tau \cdot d\alpha.$ (2.4)

- Kriterium von Klingatsch: $\epsilon_{Kl}^2 = \left[P_\omega \left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + P_\sigma (ab - 1)^2 \right] / (P_\omega + P_\sigma).$ (2.5)

P_ω und P_σ sind Gewichtungsfaktoren, der erste abhängig von der maximalen Winkelverzerrung ω , der andere von der Flächenverzerrung σ . Damit kann ein Ausgleich zwischen Winkel- und Flächenverzerrung erreicht werden.

- Kriterium von Konusova: $\alpha = \arctan \left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right) / (ab - 1) \right].$ (2.6)

Für konforme Abbildungen gilt $\alpha = 0$, für flächentreue $\alpha = \pi/2$, für alle anderen $0 < \alpha < \pi/2$.

Will man ein Kriterium nicht nur für einen Punkt, sondern für ein bestimmtes Gebiet, oder eine ganze Planisphäre erstellen, kann man nach Tschebyscheff so vorgehen. Entweder man ermittelt in geeigneter Weise einen Wert aus τ_{\min} und τ_{\max} , oder bestimmt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\epsilon_M = \frac{1}{F} \int_F \epsilon^2 dF. \quad (2.7)$$

F = Fläche des betrachteten Gebietes, ϵ nach einer der früheren Formeln. Die Auswertung des Integrals erfolgt über eine Summation. Man teilt das Gebiet in k kleine Teilgebiete und bestimmt für jedes das zugehörige ϵ ; dann ist:

$$\epsilon_M = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \epsilon_i^2. \quad (2.8)$$

Achtung! Die Bezeichnungen a und b für die Achsen der Indikatrix suggerieren, daß a die große und b die kleine Halbachse repräsentieren. Das muß keineswegs der Fall sein; a und b sind nur die Extremwerte der Streckenverzerrung.

ooooo00000ooooo

Kapitel 3

Azimutalprojektionen

3.0 Allgemeines

Unter Azimutalprojektionen versteht man Abbildungen auf eine Tangentialebene der Kugel in beliebiger Lage. Der Berührungspunkt wird als Hauptpunkt H bezeichnet. Fällt dieser mit einem der Pole zusammen, wird die Abbildung normal oder polar genannt, liegt er im Äquator, spricht man von äquatorialer oder transversaler Projektion, in allen anderen Fällen heißt die Projektion schief. Legt man durch den Hauptpunkt auf der Kugel eine Schar von Großkreisen, so werden diese in der Bildebene als Geradenbüschel durch den Hauptpunkt abgebildet, d.h. Azimute im Hauptpunkt erscheinen in wahrer Größe. Daher der Name der Abbildung. Eine Schar konzentrischer Kreise um den Hauptpunkt auf der Kugel bildet sich wieder als solche ab. Zusammen mit dem Geradenbüschel hat man ein System von Pseudoparallelkreisen bzw. Pseudomeridianen. Im Falle der polaren Abbildung ist dieses System zugleich das geographische System; die Azimute entarten zu den geographischen Längen. Man unterscheidet perspektive Azimutalprojektionen, bei denen die Abbildung durch reine Projektion mittels Sehstrahlen aus einem Augpunkt entsteht, und analytische Projektionen, die auf einer rein formelmäßigen Beziehung zwischen dem geographischen und dem cartesischen System beruhen. Manche Autoren kennen auch noch unechte (Pseudo-) Azimutalprojektionen. Diese werden im Kapitel über konventionelle Projektionen behandelt.

3.1 Perspektivische Projektionen

In einem Punkt H der Einheitskugel wird die Tangentialebene gelegt und ein cartesisches Koordinatensystem definiert: die x -Achse tangential an den Parallelkreis durch H , die y -Achse tangential an den Meridian. Auf der negativen Seite der Flächennormalen z wird in beliebigem Abstand d vom Kugelzentrum der Augpunkt A angenommen. Ein Punkt P der Kugel wird durch den Sehstrahl AP nach P' abgebildet. Der Großkreis HP schließt mit dem Meridian das Azimut α ein und spannt den Zentriwinkel β auf. Dieser Großkreis wird in die Gerade HP' abgebildet. Nun seien zwei Vektoren definiert: \mathbf{p} (von A nach P) und \mathbf{q} (von A nach P').

Diese Vektoren zu einem Punkt H haben die folgenden Komponenten:

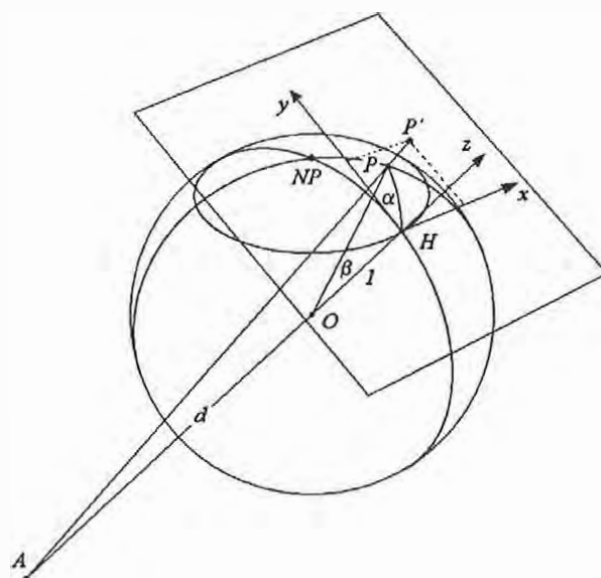


Abb. 3.1

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sin \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha \\ d + \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ d + 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Die Vektoren sind kollinear, daher muß ihr Vektorprodukt verschwinden: $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0$. Mit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ als Basisvektoren des cartesischen Systems gilt:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \sin \beta \sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha & d + \cos \beta \\ x & y & d + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgelöst, folgen die drei Gleichungen:

$$x = \frac{(d + 1) \sin \beta \sin \alpha}{d + \cos \beta}, \quad y = \frac{(d + 1) \sin \beta \cos \alpha}{d + \cos \beta}, \quad z = \frac{x}{y} = \tan \alpha. \tag{3.2}$$

Das sind im Prinzip schon die Abbildungsgleichungen, allerdings in den auf H bezogenen sphärischen Koordinaten. Um sie in die geographischen Koordinaten zu bringen, muß eine Umpolung vorgenommen werden, wie sie im Kap. 1 dargelegt ist. In dem sphärischen Dreieck $NP-H-P$ gilt ($\lambda =$ Längenunterschied zu H):

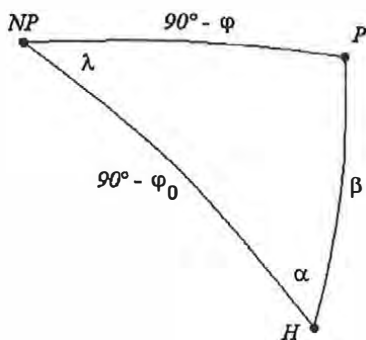


Abb. 3.2

$$\begin{aligned} \sin \beta \sin \alpha &= \sin \lambda \cos \varphi, \\ \sin \beta \cos \lambda &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda, \\ \cos \beta &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda. \end{aligned}$$

In (3.2) eingesetzt, erhält man die Abbildungsgleichungen der allgemeinen, schiefen perspektiven Projektionen zu:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(d + 1) \cos \varphi \sin \lambda}{d + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}, \\ y &= \frac{(d + 1) (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda)}{d + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Je nach Lage von A und H lassen sich aus (3.3) eine Vielzahl von perspektiven Abbildungen herleiten:

- A im Unendlichen: $d \rightarrow \infty$ orthographische Projektion,
- A in beliebigem Abstand außerhalb der Kugel: $1 < d < \infty$ externe Projektion,
- A auf der Kugel: $d = R = 1$ stereographische Projektion
- A im Kugelzentrum: $d = 0$ gnomonische Projektion.

Alle vier Abarten selbst wieder können in polarer, schiefer oder äquatorialer Lage des Hauptpunktes entworfen werden. Je nachdem erhält das geographische Netz eine charakteristische Form. In allen Fällen aber herrscht in H absolute Treue. Die Indikatrizten vieler Azimutalprojektionen lassen sich in einer einzigen, sehr instruktiven Graphik darstellen.

3.1.1 Orthographische Projektion (Parallelprojektion)

Dividiert man Zähler und Nenner von (3.3) durch d und setzt $d = \infty$ und $\varphi_0 = 90^\circ$ folgt:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin \lambda, \\ y &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda. \end{aligned} \quad (3.4)$$

In vielen Fällen sind die Bilder der Meridiane und Parallelkreise einfache algebraische Kurven. Aus einleuchtenden Gründen muß das jedenfalls bei den perspektiven Projektionen so sein. Durch Elimination von φ aus den Abbildungsgleichungen erhält man die Gleichung der Bilder der Meridiane. Das sei am Beispiel der orthographischen Projektion gezeigt. Setzt man in die Gl. für y die Beziehung $\cos \varphi = x/\sin \lambda$ so folgt:

$$y = \sin \varphi \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0 \cot \lambda \quad \rightarrow \quad \sin \varphi = (y + x \sin \varphi_0 \cot \lambda) / \cos \varphi_0.$$

Mit $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ findet man leicht die Gleichung der Bilder der Meridiane zu:

$$\left(\frac{y + x \sin \varphi_0 \cot \lambda}{\cos \varphi_0} \right)^2 + \left(\frac{x}{\sin \lambda} \right)^2 = 1. \quad (3.5)$$

Das sind Ellipsen, deren Achsen nicht mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Durch Elimination von λ gewinnt man in analoger Weise die Gleichung der Parallelkreisbilder zu:

$$\left(\frac{x}{\cos \varphi} \right)^2 + \left(\frac{y - \sin \varphi \cos \varphi_0}{\cos \varphi \sin \varphi_0} \right)^2 = 1, \quad (3.5a)$$

also wieder Ellipsen, deren Mittelpunkte nicht in den Koordinatenursprung fallen. Die orthographische Projektion kann selbstverständlich nur eine Hemisphäre abbilden. Eine allfällige Digitalisierung geographischer Strukturen aus einer orthographischen Projektion erfordert die Umkehrung von (3.4). Diese ist trivial, wenn φ_0 bekannt ist. Sollte dies nicht der Fall sein, muß man die geographischen und die cartesischen Koordinaten der Eckpunkte einer Gradmasche bestimmen und die geographischen Koordinaten der Strukturen innerhalb der Masche aus den gemessenen cartesischen Koordinaten durch einen zweidimensionalen Interpolationsalgorithmus ermitteln.

In den folgenden Abbildungen werden Karten in orthographischen Projektionen für die Hauptpunktlagen $\varphi_0 = 0^\circ$ (äquatoreal), $\varphi_0 = 30^\circ$ (schief) und $\varphi_0 = 90^\circ$ bzw. -90° gezeigt. Die Abbildungsgleichungen gewinnt man durch Einsetzen der Werte von φ_0 in (3.4) zu:

Orthographische Polarprojektion: $x = \cos \varphi \sin \lambda, \quad y = -\cos \varphi \cos \lambda. \quad (3.4a)$

An dieser Abbildung sei auch gleich die strenge Berechnung der Verzerrungsgrößen demonstriert. Es ist:

$$\begin{aligned} x_\varphi &= -\sin \varphi \sin \lambda, \quad y_\varphi = \sin \varphi \cos \lambda, \quad x_\lambda = \cos \varphi \cos \lambda, \quad y_\lambda = \cos \varphi \sin \lambda, \\ \bar{E} &= x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = \sin^2 \varphi, \quad \bar{G} = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 = \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Die Konformitätsbedingung für die Kugel: $\bar{E} = \bar{G} / \cos^2 \varphi$ ist nicht erfüllt, die Abbildung nicht konform, obwohl die Bilder von Meridianen und Parallelkreisen orthogonal sind; sie ist aber auch nicht flächentreu. Nach (1.15), (1.20a) und (1.29) kann man bilden:

$$a = h = \sin \varphi, \quad b = k = 1, \quad \sigma = \sin \varphi, \quad \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\sin \varphi - 1}{\sin \varphi + 1}; \quad (\text{die Abbildung ist also aphyllaktisch}).$$

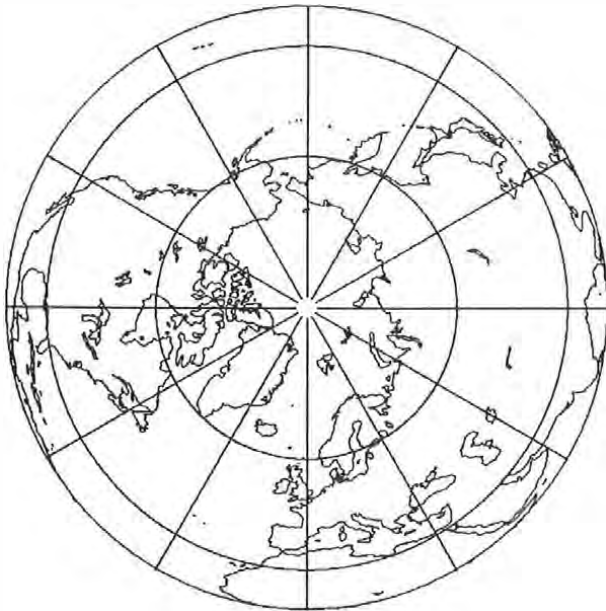


Abb. 3.3a: nördl. Hemisphäre in orthogr. Projektion, $30^\circ \times 30^\circ$

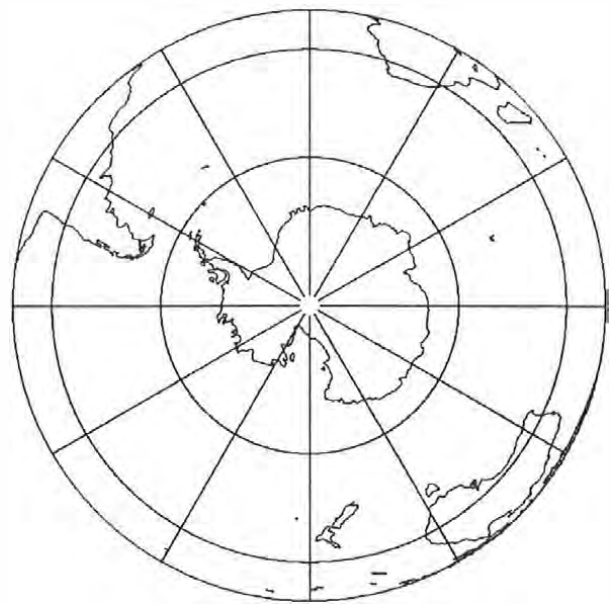


Abb. 3.3b: südl. Hemisphäre in orthogr. Projektion, $30^\circ \times 30^\circ$

Schiefe orthographische Projektion: Für die Abbildungen wurde $\varphi_0 = 30^\circ$ gewählt.



Abb. 3.4a: schiefe orthogr. Proj. $\varphi_0 = 30^\circ$

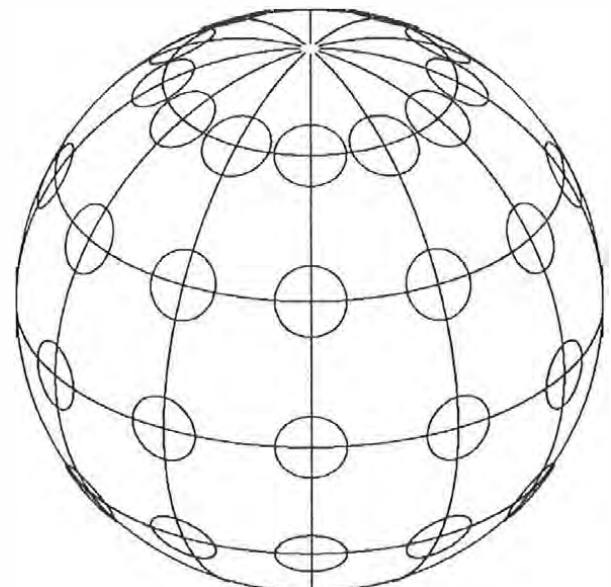


Abb. 3.4b: Indikatrizen

Orthographische Äquatorialprojektion: Für $\varphi_0 = 0^\circ$ gibt Gl. (3.4):

$$x = \cos\varphi \sin\lambda, \quad y = \sin\varphi. \quad (3.6)$$

Diese Projektion wird gerne für Darstellungen der Planeten benützt, weil sie jenen Anblick bietet, den man im Fernrohr hat.

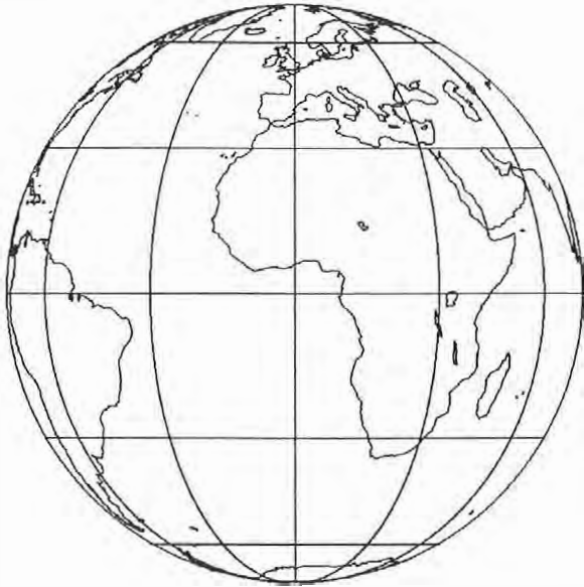


Abb. 3.5a: orthogr. Äquatorealproj.

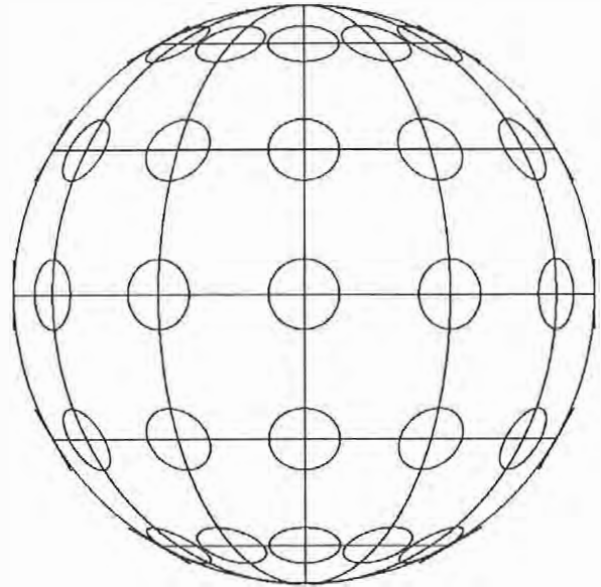


Abb. 3.5b: Indikatrizen

3.1.2 Externe Projektion



Abb. 3.6a: Externe Projektion,
 $\varphi_0 = 45^\circ, \lambda_0 = 17^\circ, d = 1.5$

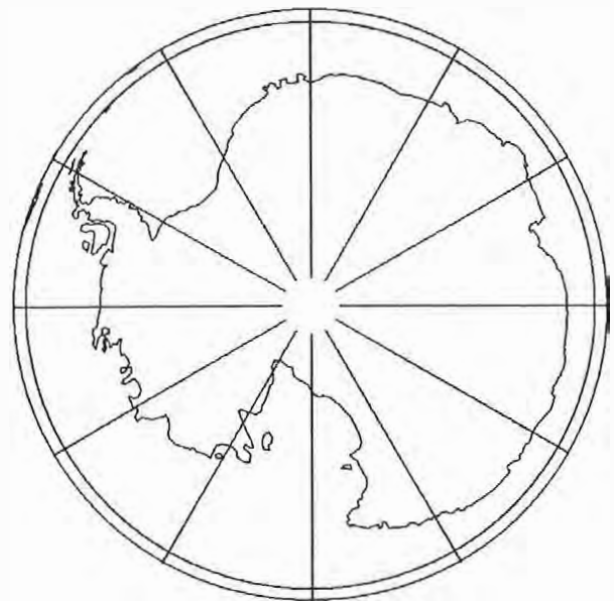


Abb. 3.6b: Externe Projektion,
 $\varphi_0 = -90^\circ, d = 1.3$

Gibt man d einen beliebigen endlichen Wert (in Einheiten des Kugelradius), erhält man eine Abbildung, die einer photographischen Aufnahme der Erde aus dem Weltraum entspricht, wenn die Aufnahmerichtung exakt durch den Kugelmittelpunkt geht. Der Fall einer davon abweichenden Aufnahmerichtung wird hier nicht behandelt, weil dies schon in das Gebiet der Photogrammetrie fällt. Eine entsprechende Lösung findet man z.B. in [Dumitrescu, 1977], [Lichtenegger]. Wählt man d klein, z.B. $d = 1.5$, zeigt die externe Projektion einen Anblick den man gewinnt, wenn man einen Globus in der ausgestreckten Hand hält (Abb. 3.6a und b). Aus diesem Grund wird sie in [Finsterwalder, 1993] betrachtungstreue Azimutalprojektion genannt. Tatsächlich aber wurde sie schon von dem französischen Kartographen la Hire benützt, der glaubte, durch geeignete Wahl von d eine flächentreue Projektion zu gewinnen. Das ist natürlich nicht möglich.

3.1.3 Stereographische Projektion

Der Augpunkt A liegt im Antipodenpunkt von H und $d = 1$. Diese Abbildung geht bereits auf Hipparch (190 – 125 v. Chr.) zurück. Die Abbildungsgleichungen sind:

$$x = \frac{2 \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}, \quad y = \frac{2(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}. \quad (3.7)$$

Die hervorstechenden Eigenschaften dieser Projektion sind die Konformität und die Kreistreue (jeder Kreis auf der Kugel wird wieder als Kreis abgebildet). Das macht sie besonders für Sternkarten geeignet. Die Winkeltreue wurde schon im Kap. 1.2.5 geometrisch bewiesen, doch sei dies auch analytisch getan. Man bildet die Ableitungen, wobei vereinfachend der gemeinsame Nenner mit N bezeichnet wird. Es ist nach einfachen Manipulationen:

$$\begin{aligned} x_\varphi &= -2 \sin \lambda (\sin \varphi + \sin \varphi_0) / N^2, \\ y_\varphi &= 2(\cos \lambda + \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda) / N^2, \\ x_\lambda &= 2 \cos \varphi (\cos \lambda + \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda) / N^2, \\ y_\lambda &= 2 \cos \varphi \sin \lambda (\sin \varphi + \sin \varphi_0) / N^2. \end{aligned}$$

Nach (1.50) lauten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Kugel in geographischen Koordinaten: $x_\varphi = y_\lambda / \cos \varphi$, $x_\lambda = -\cos \varphi \cdot y_\varphi$. Man überzeugt sich, daß diese Beziehungen erfüllt sind, die Projektion also konform ist. Eine komplexe Darstellung der stereographischen Projektion findet man in [Adams, 1934, 1952].

Bleibt noch die Kreistreue zu beweisen. Auch dies gelingt anschaulich geometrisch. Man denke sich von einem Punkt außerhalb der Kugel den Tangentenkegel an die Kugel gelegt. Die Gesamtheit der Berührungspunkte bildet einen Kreis. Nun werden die Kegelspitze und die Erzeugenden stereographisch auf die Ebene abgebildet. Die Bilder der Erzeugenden sind das Geradenbüschel durch das Bild der Kegelspitze. Nun fragen wir nach dem Bild des Berührungskreises. Wegen der Konformität muß diese Kurve normal auf alle Erzeugenden stehen. Die einzige Kurve, die dies erfüllt, ist ein Kreis.

Es macht nicht viel Sinn, ein größeres Gebiet der Erdkugel abzubilden, als von 90° sphärischer Distanz vom Hauptpunkt umschlossen wird. Die Verzerrungen nehmen dann rasch zu, der Antipodenpunkt zu H wird als uneigentlicher (unendlich ferner) Kreis abgebildet. Die Abb. 3.7a und 3.7b zeigen Projektionen mit $\varphi_0 = 90^\circ$ und $\varphi_0 = 40^\circ$; Abb. 3.8a mit $\varphi_0 = 0^\circ$ (Netze $30^\circ \times 30^\circ$).

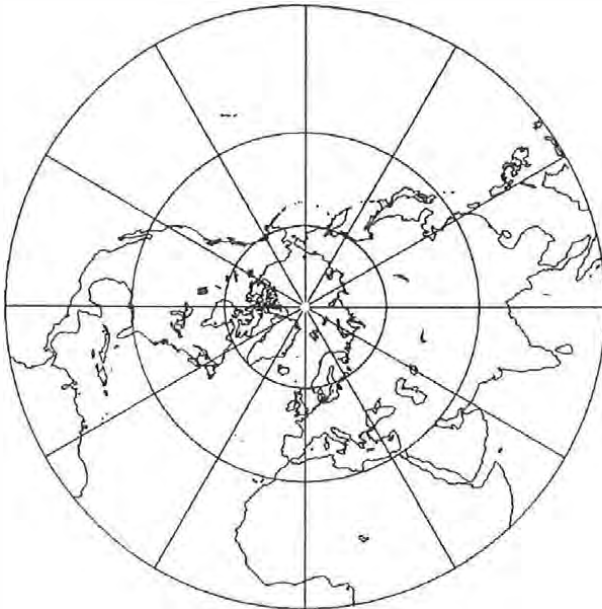


Abb. 3.7a: Stereogr. Polarprojektion



Abb. 3.7b: schiefe stereogr. Projektion



Abb. 3.8a: Stereogr. Äquatorialproj.

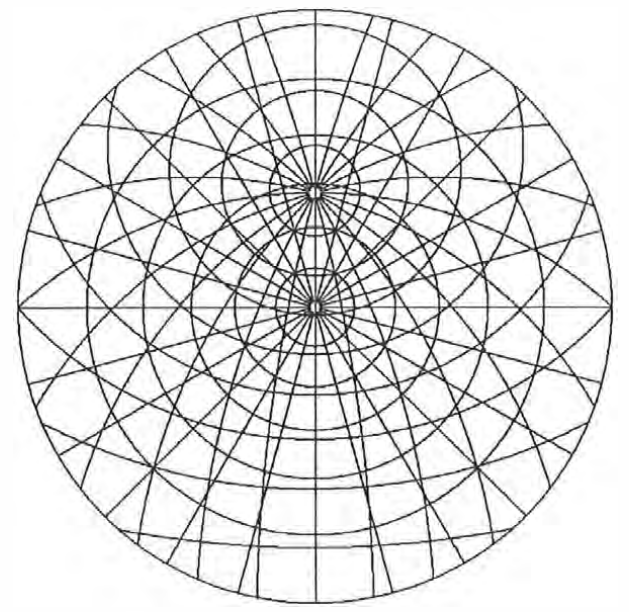
Abb. 3.8b: Nomogramm zur Transformation
von Sternkoordinaten

Abb. 3.8b ist der Entwurf für eine Sternkarte. Es ist eine Art Nomogramm, aus dem bei bekannten Sternkoordinaten die Einstelldaten Azimut und Zenitdistanz abgegriffen werden können. Die Karte ist für $\varphi_0 = 45^\circ$ ausgelegt. Die konzentrischen Kreise in Abb. 3.8b sind Kreise gleicher Zenitdistanz, das Geradenbüschel Linien gleichen Azimutes; das Zentrum der Kreise ist der Zenit. Die nicht-konzentrischen Kreise sind Linien gleicher Deklination, der Mittelpunkt des innersten Kreises ist der Himmelspol, die Kurven durch diesen sind Linien gleichen Stundenwinkels.

3.1.4 Gnomonische oder Zentral-Projektion

Die Projektion erfolgt aus dem Zentrum der Kugel ($d = 0$). Damit folgen aus (3.3) die Abbildungsgleichungen zu:

$$x = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}, \quad y = \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda}{\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}. \quad (3.8)$$

Die gnomonische Projektion bildet alle Großkreise der Kugel als Gerade ab. Die Meridianbilder bilden also ein Geradenbüschel durch das Bild des Poles, die Parallelkreise sind Kegelschnitte; je nach Lage des Hauptpunktes treten alle Arten von Kegelschnitten auf. Der Parallelkreis durch den Hauptpunkt ist eine Parabel, jene Kreise nördlich davon sind Ellipsen, südlich davon Hyperbeln. Im übrigen ist die Abbildung aphyllaktisch. Es ist nicht möglich, eine ganze Hemisphäre abzubilden, der Großkreis mit 90° sphärischer Distanz von H ist schon der unendlich ferne Kreis.

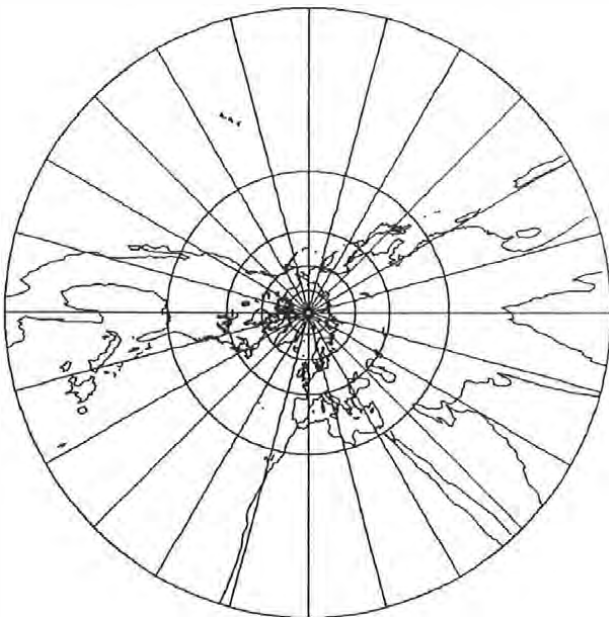


Abb. 3.9a: Gnomon. Polarprojektion
 $15^\circ \times 15^\circ$ -Netz

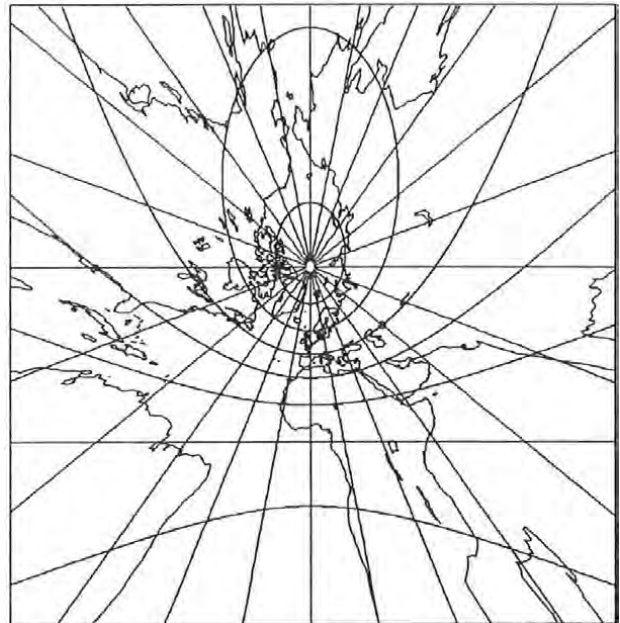


Abb. 3.9b: Schiefe gnomon. Projektion
 $\varphi_0 = 45^\circ$

3.1.4.1 Polyederprojektion

Die sehr geringen Verzerrungen der gnomonischen Projektion in der näheren Umgebung des Hauptpunktes können für Karten auch großer Gebiete in Form der Polyederprojektion genutzt werden. In einer ausgewählten Gradmasche der Kugel zieht man die Sehnen zwischen den vier Eckpunkten. Somit entsteht ein ebenes Trapez, auf das die Gradmasche gnomonisch abgebildet wird. Auf diese Weise läßt sich die ganze Kugel mit einem Polyeder umspannen.

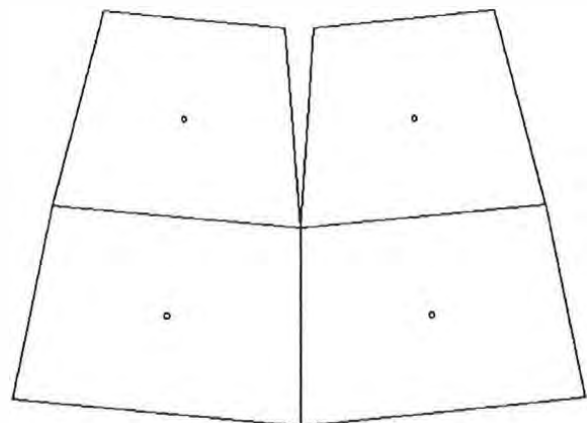


Abb. 3.9d: Kartenblätter der Polyederproj.

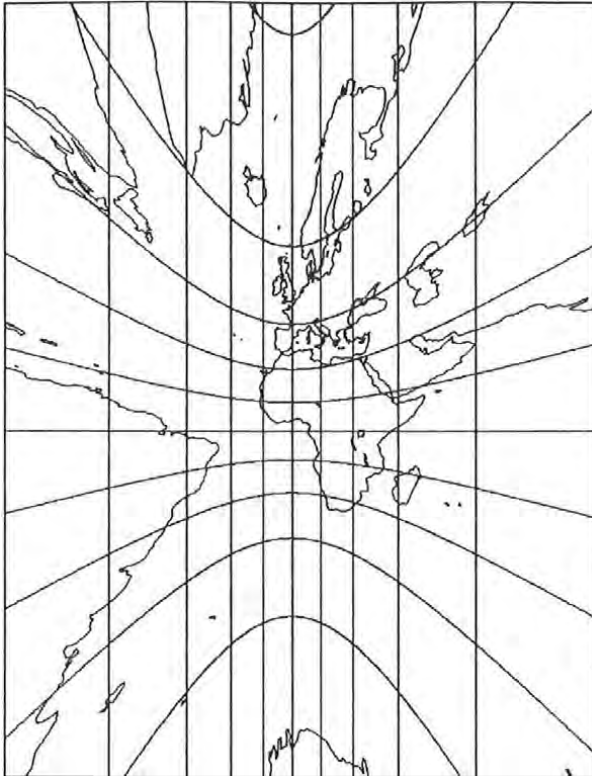


Abb. 3.9c: Gnomon. Äquatorealprojektion

Sinngemäß nennt man solche Karten auf Basis der Polyederprojektion auch Gradabteilungskarten. Nachteilig ist, daß sich keine vier Blätter ohne Klaffungen aneinander legen lassen. Linker und rechter Rand eines Kartenblattes sind die Bilder der Meridiane der Gradmasche. Oberer und unterer Rand des Blattes dagegen sind **nicht** die Bilder der Parallelkreise, sondern der Großkreisbögen zwischen den Eckpunkten des Trapezes. Die Projektion selbst kann auch auf andere Weise erfolgen, z.B. durch die zentrale Kegelprojektion.

3.1.5 Stereographische Doppelprojektion von Solovjew

Die Kugel wird aus dem Südpol stereographisch auf eine im Nordpol tangierende Kugel vom doppelten Erdradius projiziert. Von dieser Kugel erfolgt eine weitere stereographische Projektion aus dem Südpol der neuen Kugel auf die Tangentialebene im Nordpol.

Die Abbildungsgleichungen sind aus Abb. 3.10a leicht abzuleiten. Mit der Poldistanz $p = 90^\circ - \varphi$ lauten sie:

$$x = 4 \tan\left(\frac{p}{4}\right) \sin \lambda, \quad y = -4 \tan\left(\frac{p}{4}\right) \cos \lambda. \quad (3.9)$$

Auch dieser Entwurf kann in schiefer oder äquatorealer Lage angewendet werden.

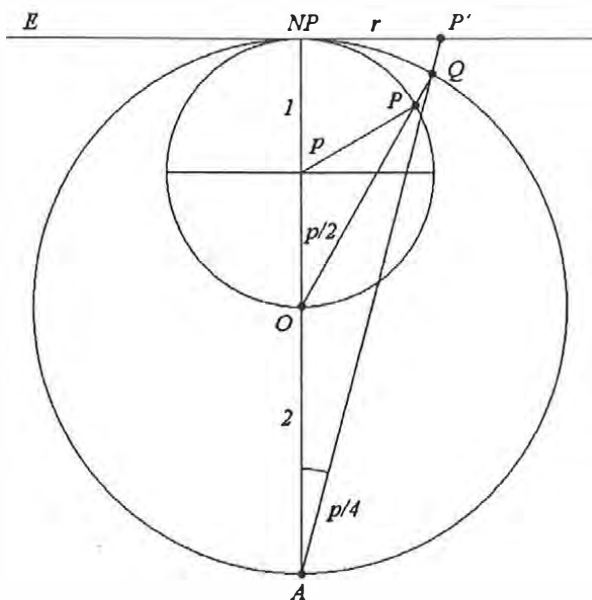


Abb. 3.10a: Stereogr. Doppelprojektion

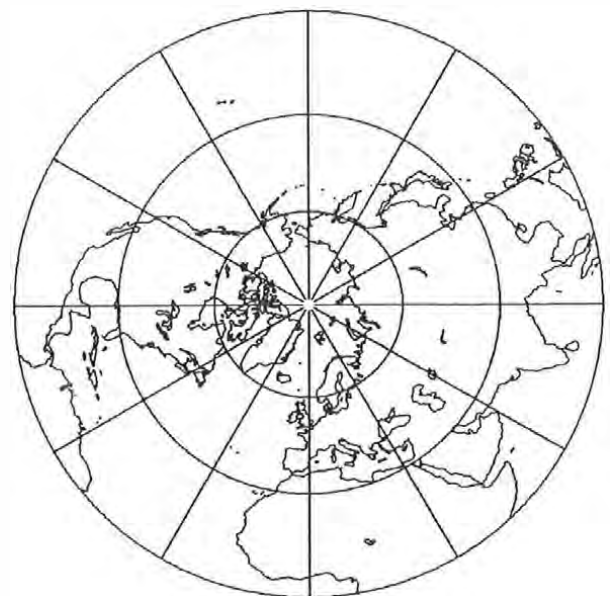


Abb. 3.10b: Polare stereogr. Doppelprojektion

3.2 Analytische Azimutalprojektion

Allen Azimutalprojektionen ist gemeinsam, daß die Bilder der Großkreisschar durch den Hauptpunkt und jene der Parallelkreise um diesen ein Geradenbüschel bzw. eine Schar konzentrischer Kreise sind. Bezeichnet man das Azimut in H mit α , den sphärischen Abstand von H mit δ , so lassen sich die allgemeinen Abbildungsgleichungen in der Form darstellen:

$$x = f(\delta)\sin\alpha, \quad y = f(\delta)\cos\alpha. \quad (3.10)$$

Darin ist $f(\delta)$ eine beliebige Funktion von δ . Im Falle der perspektiven Azimutalprojektionen war diese Funktion durch die echte geometrische Projektion aus einem Augpunkt bestimmt. Bei den polaren Abbildungen insbesondere war $\delta = 90^\circ - \varphi$, $\alpha = \lambda$. Man kann also in (3.10) δ eine Pseudopoldistanz, α eine Pseudolänge nennen. Wie bei den perspektiven Abbildungen kann man polare, schiefe und äquatoriale Varianten bilden.

Von besonderem Interesse ist jene Azimutalprojektion, in der die sphärischen Distanzen von H in wahrer Größe dargestellt werden. Sie heißt folgerichtig:

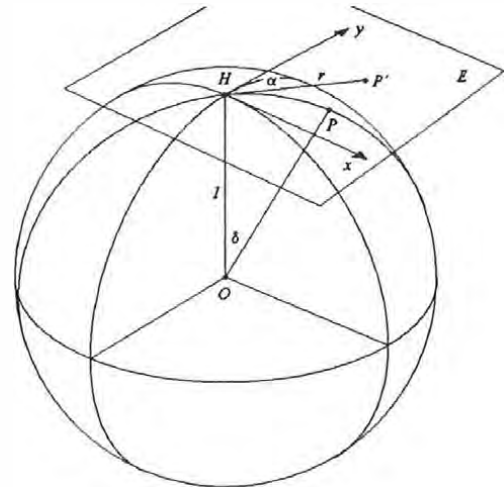


Abb. 3.11: Analyt. Azimutalproj.

3.2.1 Mittabstandstreue Azimutalprojektion

Die Abbildungsgleichungen gewinnt man, wenn $f(\delta) = \text{rad}(\delta)$ gesetzt wird. In polarer Lage führt dies somit zu:

$$x = \text{rad}(90^\circ - \varphi)\sin\lambda, \quad y = \text{rad}(90^\circ - \varphi)\cos\lambda. \quad (3.11)$$

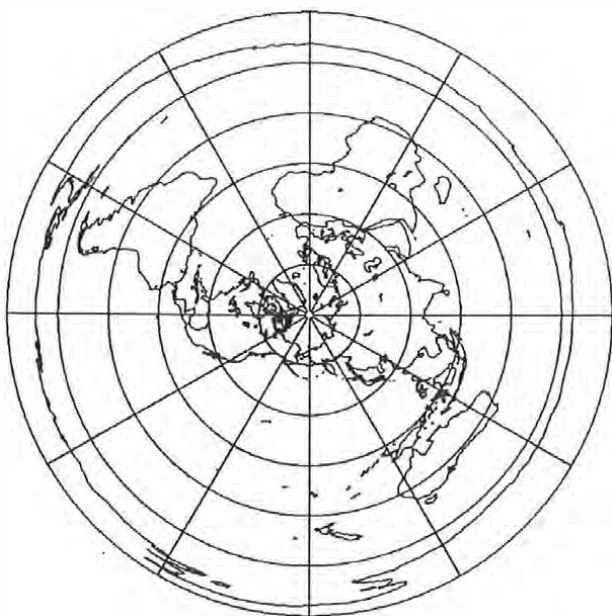


Abb. 3.12: Mittabstandstreue Polarprojektion



Abb. 3.12b: Schiefe mittabstandstreue Proj. Hauptpunkt in London $\varphi_0 = 51.5^\circ$

Die mittabstandstreue Azimutalprojektion bildet die ganze Kugel in einen Kreis mit Radius gleich dem halben Kugelumfang ab. An dieser Abbildung sei exemplarisch gezeigt, wie sich die Verzerrungseigenschaften im Pol verhalten. Man findet leicht nach (1.40): $h = 1$, $k = (\pi/2 - \varphi)/\cos\varphi$. Da im polaren Fall Meridian- und Parallelkreisbilder orthogonal sind, ist $J = 0$, also nach (1.21) $h \cdot k \cdot \cos J = \sigma = k$, oder $\sigma = ab = (\pi/2 - \varphi)/\cos\varphi$. Die Achsen der Indikatrix folgen nach (1.18a) aus $a^2 + b^2 = h^2 + k^2 = 1 + \sigma^2$ und $ab = \sigma$ zu: $a = 1$, $b = (\pi/2 - \varphi)/\cos\varphi$. Fragt man nun nach den Werten von b und σ im Pol, so erhält man den unbestimmten Wert $0/0$, obwohl im Pol (Berührungspunkt) absolute Treue herrschen muß. Anwendung der Regel von de l'Hospital ergibt aber tatsächlich den Wert 1. Am Südpol dagegen, der als Kreis abgebildet wird, wachsen b und σ über alle Grenzen. Die Anwendung in schiefer oder äquatorialer Lage erfordert eine Umpolung.

3.2.2 Flächentreue Azimutalprojektion von J. H. Lambert (1772)

Das Halbmessergesetz $f(\delta)$ von (3.10) wird so festgelegt, daß der Entwurf flächentreu wird. Bildet man aus (3.10) allgemein den Ausdruck für σ und setzt $\sigma = 1$, erhält man eine Differentialgleichung, deren Lösung $f(\delta) = 2\sin(\delta/2)$ ergibt, somit sind die Abbildungsgleichungen:

$$x = -2\sin(\delta/2)\sin\alpha, \quad y = 2\sin(\delta/2)\cos\alpha. \quad (3.12)$$

Die Projektion bildet die ganze Erde in einen Kreis ab, dessen Fläche gleich der Kugelfläche ist.

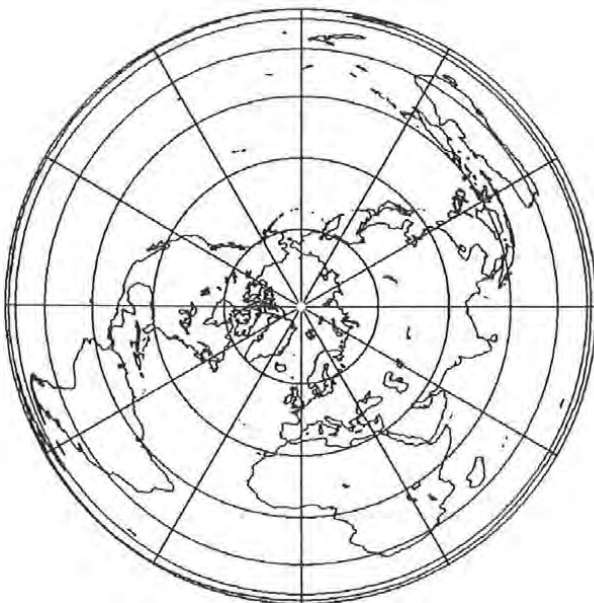


Abb. 3.13a: Lambert's flächentreue Azimutalprojektion in Pollage

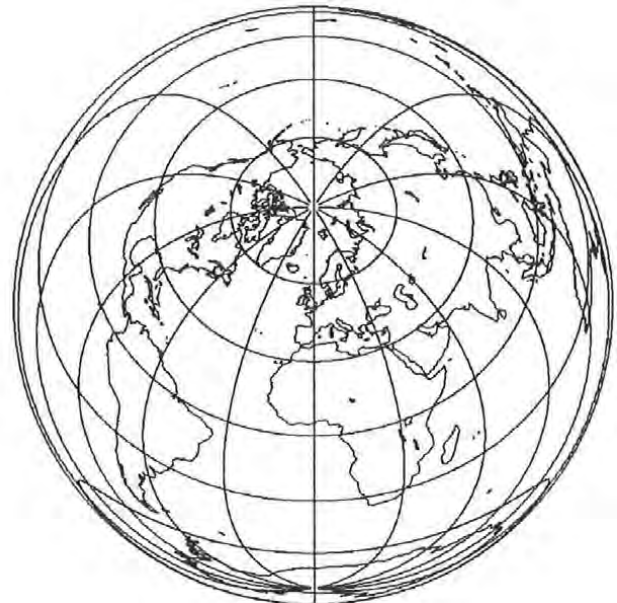


Abb. 3.13b: Lambert's flächentreue Azimutalprojektion in schiefer Lage, $\varphi_0 = 50^\circ$

Man beachte: Die orthographische Projektion bildet die Halbkugel in einen Kreis vom einfachen, die stereographische Projektion in den Kreis mit doppeltem Erdradius ab. Die gnomonische Projektion beansprucht für die Halbkugel schon die unendlich ausgedehnte Ebene. In allen Azimutalprojektionen in polarer Lage haben die Bilder der Meridiane und Parallelkreise dieselbe Form, nämlich Geradenbüschel durch den Hauptpunkt und konzentrische Kreisschar um diesen. Der Unterschied liegt nur in den verschiedenen Radiengesetzen der Kreisscharen. Das sieht man am besten in Abb. 3.14, wo auch die Verzerrungsellipsen von sechs perspektiven Abbildungen in polarer Lage dargestellt sind.

Bestimmte Entwürfe könnte man „pseudoazimutale“ Projektionen nennen, z.B. solche von Airy, oder **Molovichko**. Sie unterscheiden sich im Anblick kaum von den behandelten Entwürfen, werden deshalb nicht wiedergegeben.

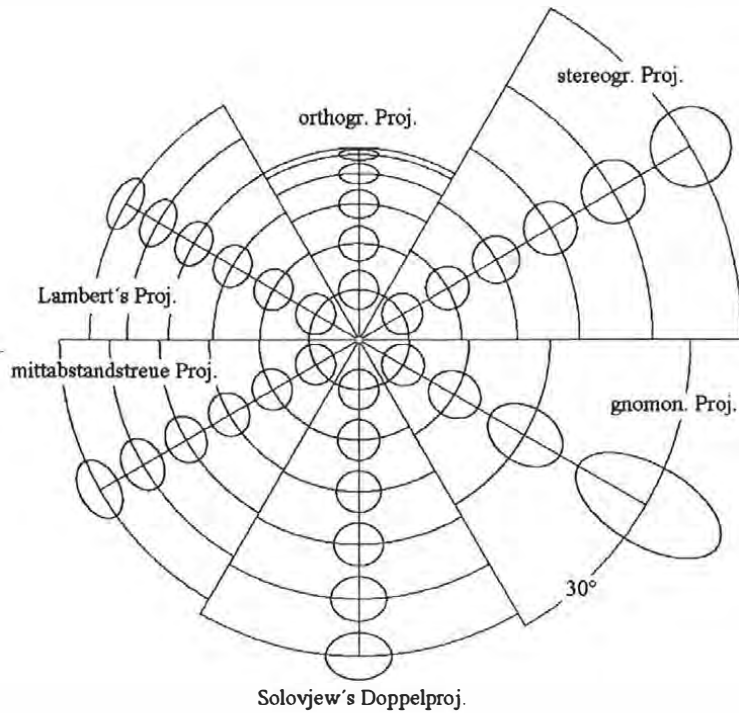


Abb. 3.14: Tissot'sche Verzerrungsellipsen im Vergleich; Parallelkreisabstand 15°

3.2.3 Flächentreue Azimutalprojektion von Wiechel (1879)

Eine Variante der Lambert'schen polaren flächentreuen Azimutalprojektion hat Wiechel angegeben.

$$x = 2 \sin(p/2) \sin(\lambda + p/2), \quad y = 2 \sin(p/2) \cos(\lambda + p/2), \quad p = 90^\circ - \varphi. \quad (3.13)$$

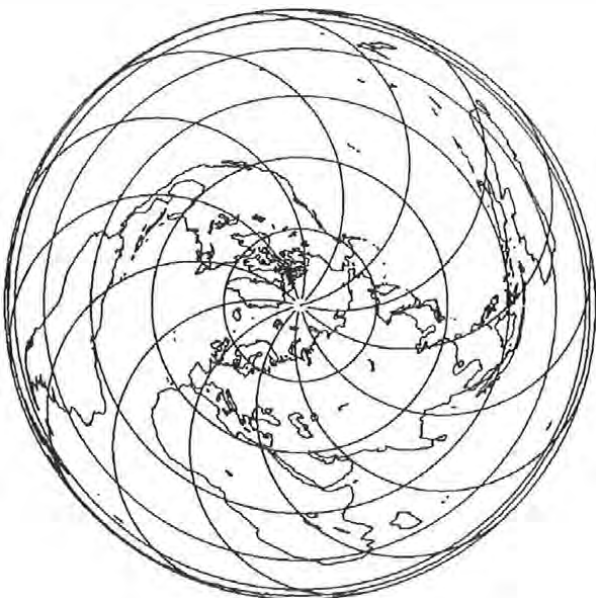


Abb. 3.15a: Azimutalprojektion von Wiechel

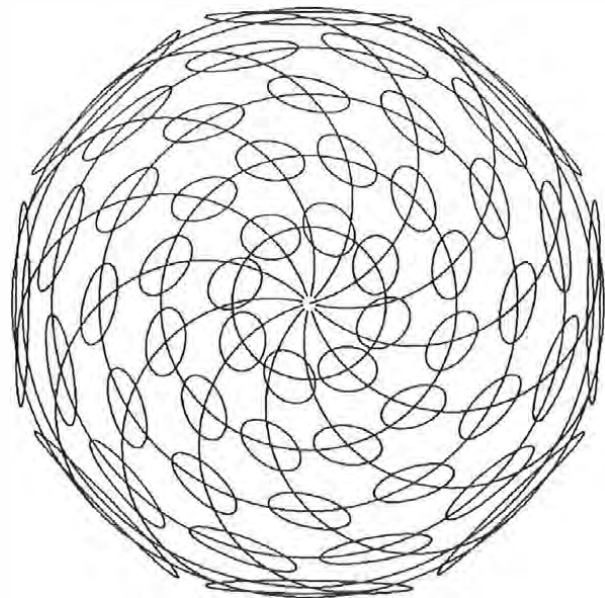


Abb. 3.15b: Verzerrungsellipsen

Kapitel 4

Zylinderprojektionen

4.0 Allgemeines

Man unterscheidet echte und unechte (Pseudo-) Zylinderprojektionen. Der Zylinder kann die Kugel entlang eines Großkreises berühren, oder in zwei symmetrisch gelegenen Kleinkreisen schneiden. Geht die Achse des Zylinders durch die Pole, spricht man von normaler, liegt sie im Äquator, von transversaler Zylinderprojektion. Eine beliebige Lage heißt wie üblich schief. Es sei zunächst normale Lage angenommen. Echt heißt die Abbildung dann, wenn die Bilder der Meridiane und Parallelkreise zueinander orthogonale Geradenscharen sind. Konformität ist also hier möglich. Im anderen Falle heißt sie unecht, Konformität ist ausgeschlossen. Ist der Kugelradius $R = 1$, so kann der Radius des Zylinderschnitts durch den Faktor $n \leq 1$ definiert werden. Dieser Radius ist $n = \cos(\pm\varphi_0)$. Berührung liegt bei $n = 1$ vor. Der Fall $n > 1$ ist bedeutungslos. Die Zylindererzeugende, die den gewählten Hauptpunkt der Projektion enthält, wird je nach Lage zur x - oder y -Achse gemacht und der Zylinder nach erfolgter Abbildung längs der dem Hauptpunkt diametralen Erzeugenden aufgeschnitten und in die Ebene ausgerollt. Prinzipiell existieren nur wenige echte Zylinderabbildungen, sieht man von den möglichen zahlreichen Varianten ab, die durch Wechsel der Lage oder durch Einführung von Parametern zur Minimierung der Verzerrungen entstehen. Sehr groß dagegen ist die Zahl der unechten Zylinderprojektionen samt ihren Abwandlungen.

4.1 Echte Zylinderprojektionen

Geht man von der Vorstellung einer perspektiven Abbildung der Kugel aus dem Zentrum auf einen Zylinder in normaler Lage aus, so werden die Meridiane in die Erzeugenden des Zylinders abgebildet. Die Erzeugende zu einem ausgewählten Meridian wird die y -Achse. Für $n = 1$ erscheint der Äquator längentreu als orthogonale Gerade zur y -Achse und liefert die x -Achse. Im Falle $n < 1$ wird der Äquator in diesem Verhältnis verjüngt. Die Bilder der Parallelkreise sind parallele Gerade zur x -Achse. Die allgemeinen Gleichungen dieses Netzes aus orthogonalen Geraden sind:

$$x = n \cdot \lambda, \quad y = f(\varphi). \quad (4.1)$$

Durch Wahl verschiedener Funktionen $f(\varphi)$ lassen sich beliebige echte, normale Zylinderprojektionen produzieren. Aber schon vor einer Spezialisierung lassen sich Aussagen über die Verzerrungen treffen. Wegen der Orthogonalität der Netzlinien kann Konformität erreicht werden. Es ist also $J = 0$ und es gelten die Differentialquotienten:

$$x_\varphi = 0, \quad x_\lambda = n, \quad y_\varphi = f'(\varphi), \quad y_\lambda = 0, \quad \text{und weiter:}$$

$$\bar{E} = [f'(\varphi)]^2, \quad \bar{G} = n^2, \quad h = a = f'(\varphi), \quad k = b = \frac{n}{\cos\varphi}.$$

Die Definition der isometrischen Breite (1.45) bzw. der äquivalenten Breite (1.52) war:

$$dq = d\varphi / \cos \varphi, \quad d\Sigma = \cos \varphi \cdot d\varphi, \quad \text{also folgt:}$$

$$h = f'(\varphi) = y_\varphi = \frac{y_q}{\cos \varphi} = \cos \varphi \cdot y_\Sigma; \quad \sigma = \frac{\cos \varphi \cdot y_\Sigma \cdot n}{\cos \varphi} = n \cdot y_\Sigma. \quad (4.2)$$

Aus diesen Beziehungen können konforme und flächentreue (äquivalente) Projektionen hergeleitet werden.

4.1.1 Konforme normale Zylinderprojektion von Mercator (G. Kremer, 1569)

Bei Konformität muß neben $J = 0$ auch $h = k$ sein, als nach (4.2) $y_q = n$. Damit folgen aus (4.1) die Abbildungsgleichungen der konformen, normalen Zylinderprojektionen zu:

$$x = n \cdot \lambda, \quad y = n \cdot q. \quad (4.3)$$

Dies hätte man auch direkt aus dem Lösungsansatz der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (1.32a u. 33) finden können: $y + ix = n(q + i\lambda)$; (**Achtung!** Aus Gründen der Übereinstimmung mit den Bildschirmkoordinaten wurden hier zum Unterschied von Kap. 1 x und y vertauscht). Trennung von Real- und Imaginärteil und für $n = 1$ gewinnt man die Gleichungen der berühmten Mercatorabbildung:

$$x = \lambda, \quad y = q = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4.4)$$

Die Projektion bildet die ganze Kugel in einen unendlich langen Streifen der Ebene ab, dessen Breite gleich dem Äquatorumfang ist. Sie ist sehr gut zur Darstellung einer Äquatorzone bis in mittlere Breiten geeignet. In Richtung der Pole wachsen die Verzerrungen extrem schnell an. Ihre große Bedeutung aber liegt in der Tatsache, daß Loxodromen als Gerade abgebildet werden, was für die Schifffahrt wichtig ist (Steuern mit konstantem Kurs). Allerdings ist die zurückgelegte Distanz größer als beim Steuern entlang von Großkreisen. In diesem Fall muß jedoch der Kurs ständig geändert werden. Zur besonderen Demonstration (nicht als Beispiel einer Schiffsroute) zeigt *Abb. 4.1a* Loxodrome und Großkreis zwischen den Punkten Buenos Aires ($-34^\circ 36'$, $58^\circ 27'$ w. Gr.) und Peking ($39^\circ 55'$, $116^\circ 23'$ ö. Gr.).

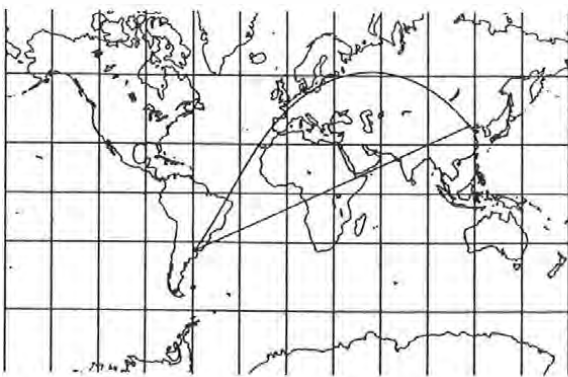


Abb. 4.1a: Mercatorproj. mit Loxodrome und Großkreis

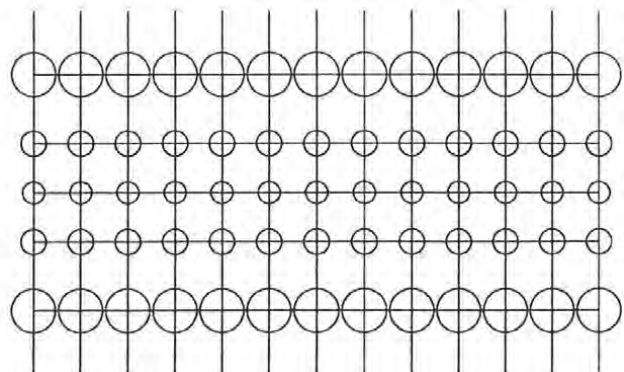


Abb. 4.1b: Mercatorproj., Verzerrungsellipsen 30°×30°

Obwohl die Loxodrome in *Abb. 4.1a* wesentlich kürzer als der Großkreis erscheint, ist sie in Wahrheit, nämlich auf der Kugel, länger!

Die Projektion kann auch in schiefer und transversaler Lage des Zylinders angewendet werden. Die schiefe Lage spielt z.B. eine große Rolle im Abbildungssystem der Schweizer Landesvermessung. Die transversale Lage wiederum ist als Vorstufe der weltweit angewendeten Meridianstreifenprojektion von großer Bedeutung. In jedem Fall muß eine Umpolung vorgenommen werden. Führt man eine neue „Pseudobreite“ η und eine „Pseudolänge“ ϑ ein, so haben die Abbildungsgleichungen in den neuen Koordinaten exakt dieselbe Form wie in (4.3), nur muß man x und y vertauschen, will man die Orientierung des Koordinatensystems beibehalten. Das transversale Gegenstück zur Mercatorprojektion ist die

4.1.2 Konforme transversale Zylinderprojektion von Lambert

Sofort können die Abbildungsgleichungen in den neuen Koordinaten angeschrieben werden:

$$x = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right), \quad y = \vartheta. \quad (4.5)$$

Das Netz in diesen Koordinaten würde sich nicht von der Mercatorabbildung unterscheiden, es soll aber das geographische Netz dargestellt werden.

Nach *Abb. 4.2* gibt die Auflösung des Dreiecks NP - P - Q :

$$\begin{aligned} \cos \eta \cos \vartheta &= \cos \varphi \cos \lambda, \\ \cos \eta \cos \vartheta &= \sin \varphi, \\ \sin \eta &= \cos \varphi \sin \lambda. \end{aligned} \quad (4.5a)$$

Damit wird (4.5) transformiert; bedenkt die allgemeinen goniometrischen Beziehungen:

$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, und $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, und setzt man darin $\alpha = (\pi/2 + \eta)$, so findet man leicht: $\tan(\pi/4 + \eta/2) = \sqrt{(1 + \sin \eta)/(1 - \sin \eta)}$ und damit aus (4.4) schließlich:

$$x = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda} \right\} = \operatorname{ar} \tanh(\cos \varphi \sin \lambda), \quad y = \arctan \left(\frac{\tan \varphi}{\cos \lambda} \right). \quad (4.6)$$

Auch diese Projektion ließe sich aus dem komplexen Ansatz:

$$y + iy = 2 \left\{ \arctan e^{q+i\lambda} - \pi/4 \right\}$$

herleiten. Die Trennung von Real- und Imaginärteil ist nicht ganz einfach, gelingt aber, wenn man die Euler'sche Formel berücksichtigt. In den *Abb. 4.3 a* und *b* sind die Bilder der Meridiane und Parallelkreise Sinus-ähnliche bzw. Ellipsen-ähnliche Kurven.

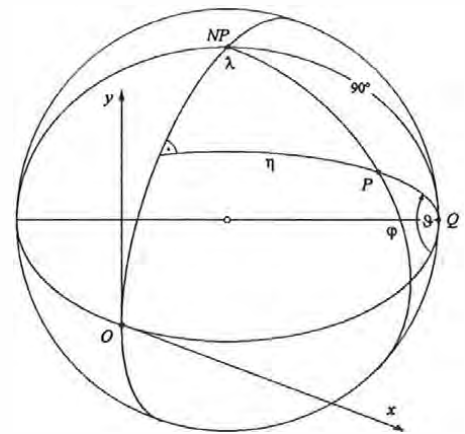


Abb. 4.2: Umpolung

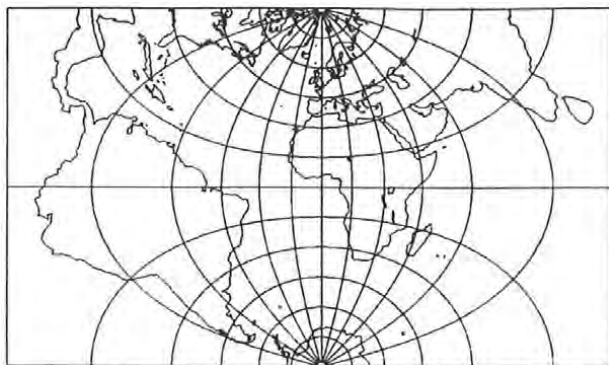


Abb. 4.3a: Konforme transversale Zylinderprojektion von Lambert

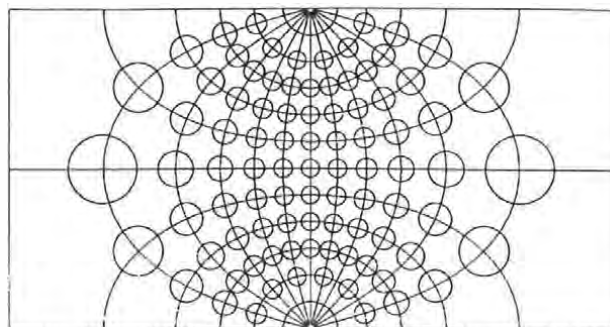


Abb. 4.3b: Verzerrungsellipsen, Netz $15^\circ \times 15^\circ$

4.1.3 Plattkarte von Marinus von Tyros (100 n. Chr.)

$$x = \lambda, \quad y = n \cdot \varphi. \quad (4.7)$$

Dies ist wohl die einfachste kartographische Abbildung überhaupt, das Netzbild besteht aus Rechtecken, im Falle $n = 1$ aus Quadraten. Dann spricht man von der „Quadratischen Plattkarte“ (platt = eben). Die Projektion ist aphyllaktisch.

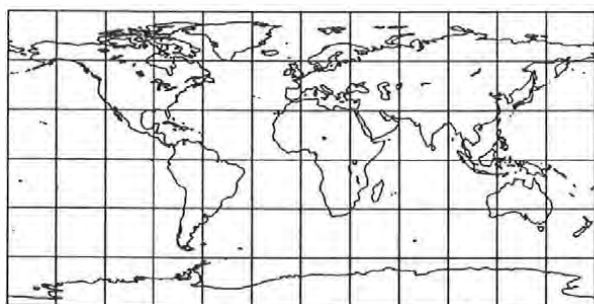


Abb. 4.4a: Quadratische Plattkarte

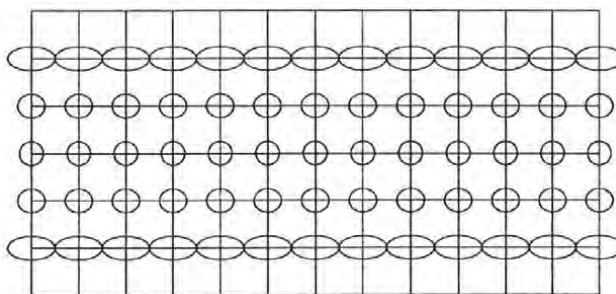


Abb. 4.4b: Verzerrungsellipsen

Das transversale Gegenstück zur Plattkarte ist die

4.1.4 Projektion von Cassini-Soldner (1700 bzw. 1800)

Die Zylinderachse liegt im Äquator. Die Tangente an den Berührmeridian wird zur y -Achse, jene an den Äquator zu x -Achse. Die ebenen Koordinaten von P sind die wahren Längen im Berührmeridian bzw. im Großkreis normal auf den Berührmeridian. In diesem Großkreis herrscht also Streckentreue, nicht aber im Parallelkreis! Die Abbildungsgleichungen lauten daher in den in Abb. 4.2 eingeführten Pseudokoordinaten:

$$x = \eta, \quad y = \vartheta. \quad (4.8)$$

Ersetzt man in den Transformationsformel (4.5a) x durch η , y durch ϑ , so erhält man:

$$x = \arcsin(\cos \varphi \sin \lambda), \quad y = \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{\cos \lambda}\right). \quad (4.8a)$$

Die Abbildung ist aphyllaktisch; ihre in der Umgebung des Ursprunges O (Abb. 4.5) sehr günstigen Verzerrungseigenschaften haben Soldner zur Benützung des Entwurfs in schiefer Lage für eine Karte von Bayern veranlaßt.

In der Abb. 4.6 sind zur Illustration wieder Großkreis und Loxodrome eingezeichnet und zwar zwischen den Punkten Maracaibo ($10^{\circ}40'$, $71^{\circ}37'$ w. Gr.) und Moskau ($55^{\circ}45'$, $37^{\circ}35'$ ö.Gr.). Die weiter nördlich verlaufende Kurve ist der Großkreis. $15^{\circ} \times 15^{\circ}$ Netzmaschenweite.

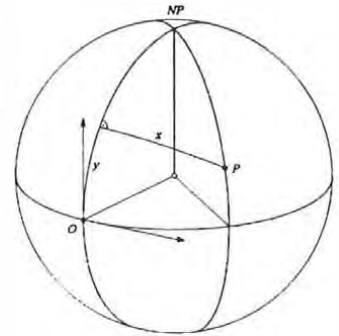


Abb. 4.5

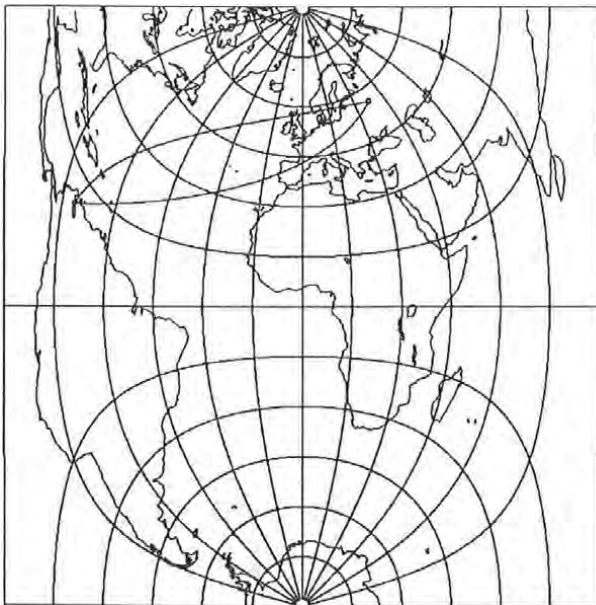


Abb. 4.6a: Cassini-Soldner Projektion

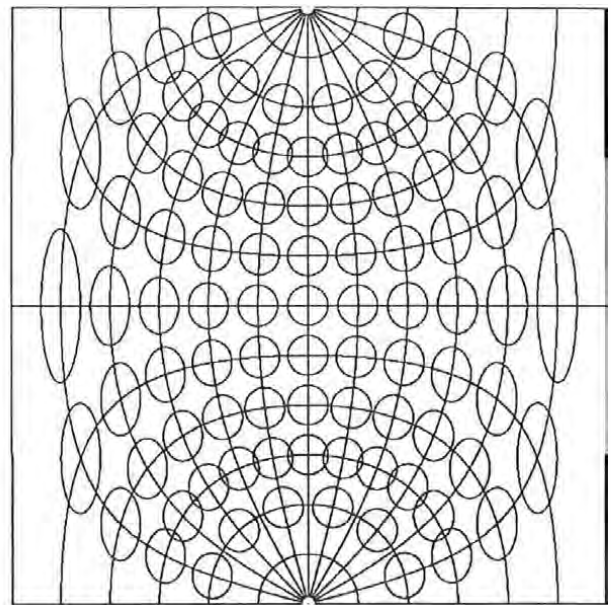


Abb. 4.6b

Manche Autoren reihen diesen Entwurf in die pseudoazimutalen Projektionen ein.

4.1.5 Lambert's flächentreue normale Zylinderprojektion

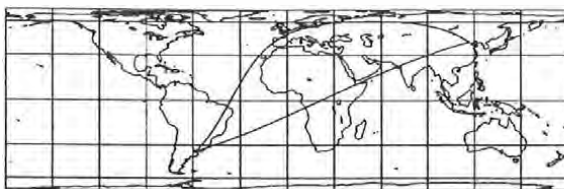


Abb. 4.7a

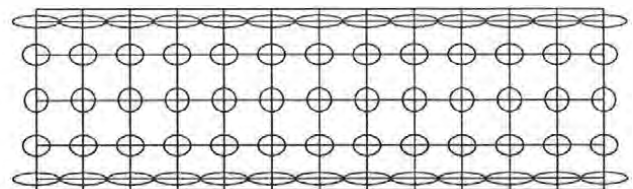


Abb. 4.7b

In der Bedingungen (4.2) setzt man $\sigma = 1$ und gewinnt damit die allgemeinen äquivalenten normalen Zylinderprojektionen:

$$x = n \cdot \lambda, \quad y = \Sigma/n. \quad (4.9)$$

Speziell Lambert's äquivalente Zylinderprojektionen erhält man für $n = 1$ und $\Sigma = \sin \varphi$:

$$x = \lambda, \quad y = \sin \varphi. \quad (4.9a)$$

Die Loxodrome in *Abb. 4.7a* ist *keine* Gerade! In manchen Abbildungen mag dieser Eindruck entstehen, ist aber allein in der Mercator-Projektion möglich. Wie in allen flächentreuen Projektionen gibt es zwei Kurvenscharen entlang denen Streckentreue herrscht. Dies ist besonders einfach und eindrucksvoll am Beispiel der Lambert'schen Zylinderprojektion zu zeigen (*Abb. 4.8*). Auch zu dieser Projektion gibt es Anwendungen in schiefer und transversaler Lage. *Abb. 4.9* zeigt den schiefen Fall mit Hauptpunkt in 30° Breite.

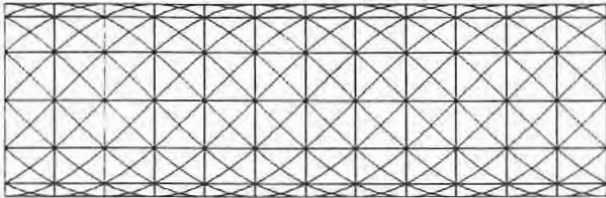
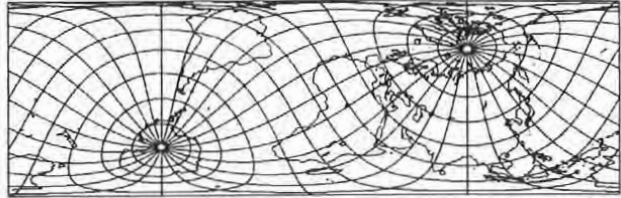


Abb. 4.8: Linien mit Streckentreue in der normalen äquivalenten Zylinderproj.



*Abb. 4.9: Schiefe äquivalente Zylinderproj.
 $\varphi_0 = 30^\circ$*

Erweitert man die Gleichung für y in 4.9a mit $n = \cos(45^\circ)$, so erhält man die **flächentreue Zylinderprojektion mit zwei längentreuen Parallelen**. Sie bietet prinzipiell nichts Neues, das Kartenbild wird gefälliger, weil die polnahen Gebiete nicht so stark komprimiert werden wie in *Abb. 4.7a*.

4.1.6 Abarten echter Zylinderprojektionen

Es gibt viele Varianten der echten Zylinderprojektionen, alle (wenn in normaler Lage) mit dem charakteristischen Merkmal des Netzes von orthogonalen Geradenscharen. Die Netzbilder sind einander sehr ähnlich, sodaß zur Demonstration ein einziges Beispiel (Projektion von Gall) genügt. Von den anderen werden nur die Abbildungsgleichungen angeschrieben. Mit einer Ausnahme (**Behrmann**) sind alle aphyllaktisch. Durch Umpolung lassen sich weitere schiefe oder transversale Abwandlungen hervorbringen.

J. Gall's stereographische Zylinderprojektion (1855): Man denke sich einen normalen Zylinder, der die Kugel in $\pm 45^\circ$ Breite schneidet, und ein Projektionszentrum (Augpunkt) das um den Äquator wandert. Die Punkte der Kugel jenes Meridians, der dem Augpunkt jeweils gegenüber liegt, wird stereographisch auf den Zylinder abgebildet. Die leicht herzuleitenden Gleichungen der (aphyllaktischen) Abbildung sind:

$$x = \lambda / \sqrt{2}, \quad y = (1 + 1/\sqrt{2}) \tan(\varphi/2). \quad (4.10)$$

C. Braun (1867) geht in gleicher Weise vor, nur projiziert er auf einen im Äquator berührenden Zylinder (Abbildung ist aphyllaktisch):

$$x = \lambda, \quad y = \tan(\varphi/2). \quad (4.10a)$$

Verlegt man den Augpunkt in das Kugelzentrum, liegt die **Zentrale Zylinderprojektion** vor (aphyllaktisch):

$$x = \lambda, \quad y = \tan \varphi. \quad (4.10b)$$

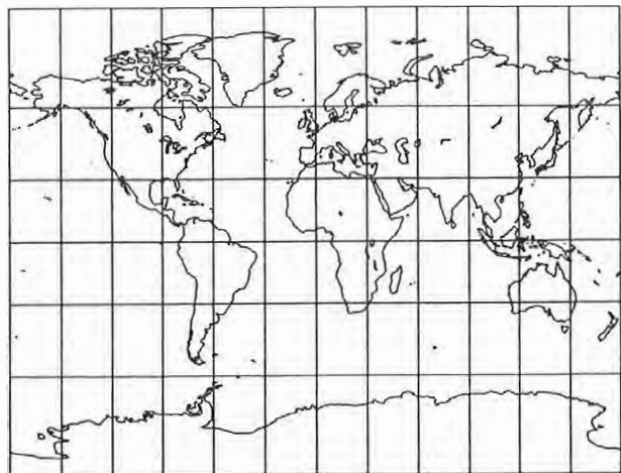


Abb. 4.10: Gall's stereogr. Zylinderproj.

J. Wetch (1830) wendet die zentrale Zylinderprojektion in transversaler Lage an.

W. Behrmann (1910) gibt eine direkte Abart von Lambert's flächentreuer Zylinderprojektion:

$$x = \lambda \sec 30^\circ, \quad y = \sin \varphi \cdot \sec 30^\circ. \quad (4.10c)$$

O. M. Miller (1942) (aphylaktisch): $x = \lambda/\sqrt{2}$, $y = 1.25 \ln(\pi/4 + 0.4\varphi)$. (4.10d)

A. A. Pavlov (aphylaktisch): $x = \lambda$, $y = a_0\varphi + \frac{a_1}{3}\varphi^3 + \frac{a_2}{5}\varphi^5$, (4.10e)
 $a_0 = 1$, $a_1 = -0.1531$, $a_2 = -0.0267$

N. A. Urmajev (aphylaktisch): $x = \lambda$, $y = a_0\varphi + \frac{a_1}{3}\varphi^3$, (4.10f)
 $a_0 = 0.9281$, $a_1 = 1.1143$

4.2 Unechte Zylinderprojektionen (pseudozyklindrische Projektionen)

Im Gegensatz zu den echten Zylinderprojektionen nach Gl. 4.1, bei denen n eine Konstante ist, wird nun an Stelle von n eine weitere Funktion $g(\varphi)$ gesetzt. Somit lauten die allgemeinen Abbildungsgleichungen der normalen unechten Zylinderprojektionen (auch Halbzylinderprojektionen genannt):

$$x = \lambda \cdot g(\varphi), \quad y = f(\varphi). \quad (4.11)$$

Man erkennt: Die Bilder der Parallelkreise sind wieder eine zur x -Achse parallele Geradenschar, jedenfalls kann $f(\varphi)$ so gewählt werden, daß $f(0) = 0$ und der Äquator somit die x -Achse darstellt. Die Meridianbilder dagegen sind irgendwelche Kurven, die nicht orthogonal zu den Parallelkreisbildern sein können. Somit ist **Konformität ausgeschlossen**, Flächentreue hingegen möglich.

Die Verzerrungen sind: $x_\varphi = \lambda \cdot g'(\varphi)$, $x_\lambda = g(\varphi)$, $y_\varphi = f'(\varphi)$, $y_\lambda = 0$. Damit:

$h = \sqrt{f'^2(\varphi) + \lambda^2 g'^2(\varphi)}$, $h = g(\varphi)/\cos \varphi$, und mit Gl. 1.44: $\cos J = g(\varphi)f'(\varphi)/hk \cos \varphi$. Gl. 1.44 gibt: $\sigma = hk \cos J = g(\varphi)f'(\varphi)/\cos \varphi$. Flächentreue ist erreicht, wenn gilt: $g(\varphi)f'(\varphi)/\cos \varphi = 1$. Somit lautet die **allgemeine Äquivalenzbedingung** für Halbzylinderprojektionen:

$$x = \lambda \cdot g(\varphi), \quad y = f(\varphi), \quad \text{Nebenbedingung: } g(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{f'(\varphi)}. \quad (4.12)$$

Setzt man voraus, daß für $\varphi = 0$ auch $y = 0$, so folgt: $f(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{g(\varphi)} d\varphi$. (4.12a)

Damit lassen sich flächentreue unechte Zylinderprojektionen produzieren. Tatsächlich gibt es davon eine ganze Reihe sehr bekannter Kartenprojektionen.

4.2.1 Flächentreue Zylinderprojektionen

Teilt man den Hauptmeridian und den Äquator längentreu und erfüllt die Äquivalenzbedingung, gewinnt man die

Sinusoidalprojektion von Sanson-Flamsteed (1650 bzw. 1729)

$$x = \lambda \cos \varphi, \quad y = \varphi. \quad (4.13)$$

Berechnet man die Achsen der Indikatrix und spezialisiert sie für die Pole ($\varphi = \pm 90^\circ$), so ergibt sich:

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{4 + \lambda^2} + \lambda \right\}, \quad b = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{4 + \lambda^2} - \lambda \right\}.$$

Obwohl die Pole eindeutig als Punkte der y -Achse abgebildet werden, erhält man für die Achsen verschiedene Werte je nach Länge. Dies ist wieder ein Beispiel für die Sonderstellung der Pole.

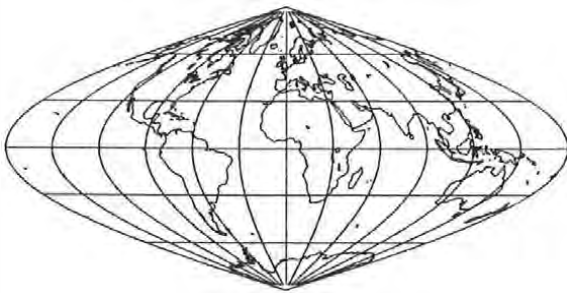


Abb. 4.11a: Sanson-Flamsteed, $30^\circ \times 30^\circ$

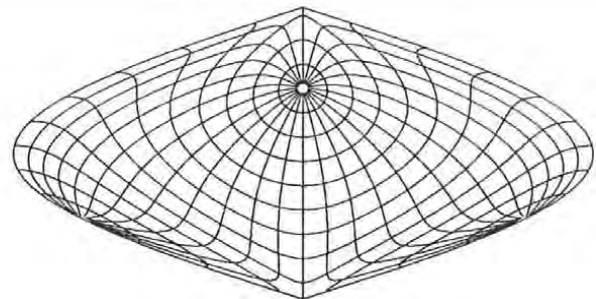


Abb. 4.11b: Schiefe Sinusoidalproj. $\varphi_0 = 40^\circ$

Die Meridianbilder des Normalfalles sind Sinuslinien, daher auch der Name. Die Abbildung kann auch als ein Sonderfall der unechten flächentreuen Kegelprojektion von **Bonne** gedeutet werden.

Die Sinusoidalprojektion war Vorbild für mehrere Abwandlungen. Die folgenden drei Entwürfe sind flächentreu und in ihrem Netzbild dem Entwurf von Sanson-Flamsteed so ähnlich, daß eine Wiedergabe nicht lohnt.

Parabolischer Entwurf von Craster (1929)

Der Name kommt von den parabelförmigen Meridianbildern. Die Abbildungsgleichungen sind:

$$x = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \lambda \left\{ 1 - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{3} \right) \right\}, \quad y = \sqrt{3\pi} \sin \left(\frac{\varphi}{3} \right). \quad (4.13a)$$

Ein ähnlicher Entwurf mit hyperbolischen Meridianen stammt von **Putnin (1934)** [Snyder, 1989].

Eumorphischer Entwurf von Boggs (1929)

So wird die Abbildung bei [Snyder, 1989] genannt. In den Abbildungsgleichungen tritt ein Hilfswinkel auf, der durch eine transzendente Gleichung mit der geographischen Breite verknüpft

ist. Diese Gleichung ist vom Kepler-Typ und nur iterativ lösbar, wozu sich das Verfahren von Newton anbietet [Schwarz, 1986].

Wenn $\varphi = \pm 90^\circ$, dann gilt: $x = 0$, $y = 0.49931(\varphi + \sqrt{2} \sin \varphi)$, sonst:

$$x = \frac{2.00276 \cdot \lambda}{\sec \varphi + 1.11072 \sec \Theta}, \quad y = 0.49931(\varphi + \sqrt{2} \sin \Theta), \quad \sin 2\Theta + 2\Theta = \pi \sin \varphi. \quad (4.13b)$$

Ein weiterer flächentreuer, sehr ähnlich gestalteter Entwurf trägt bei [Snyder, 1989] den Namen

Quartisch-authalische Projektion von Siemon (1937)

$$x = \lambda \cos \varphi \sec(\varphi/2), \quad y = 2 \sin(\varphi/2). \quad (4.13c)$$

Homalographische Projektion von Mollweide (1805)

Bei diesem flächentreuen Entwurf stellt die x -Achse wieder den Äquator dar, die Parallelkreise sind parallele Gerade zur x -Achse. Der Mittelmeridian bildet die y -Achse. Alle übrigen Meridiane sollen als Ellipsen abgebildet werden, der Meridian $\lambda = \pm 90^\circ$ speziell als Kreis. Wegen der geforderten Flächentreue muß der Inhalt dieses Kreises gleich der Fläche der Halbkugel sein, woraus sofort der Radius dieses Kreises folgt ($R = 1$): $r^2 \pi = 2\pi$, $r = \sqrt{2}$, (Abb. 4.12).

Die Meridiane $\lambda = \pm 180^\circ$ bilden eine Ellipse, deren Fläche gleich der ganzen Kugeloberfläche sein muß; ihre große Halbachse hat daher die Länge $2r$. Die Abstände der Parallelkreisbilder von der x -Achse erhält man aus der Forderung, daß die Fläche eines aus $A-B-C-D$ gebildeten Abschnitts des Kreises $\lambda = \pm 90^\circ$ gleich der entsprechenden Kugelzone sein muß. Eine einfache Rechnung ergibt die Gleichung zwischen dem Hilfswinkel Θ und der Breite φ :

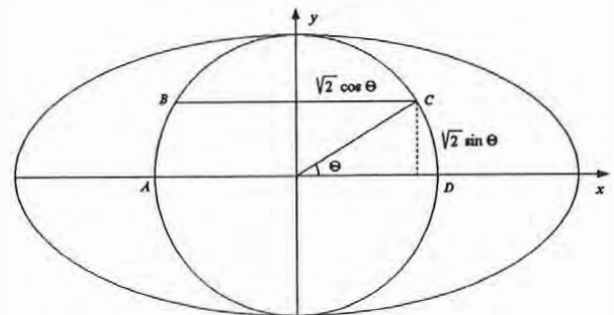


Abb. 4.12

$$\sin(2\Theta) + 2\Theta = \pi \sin \varphi. \quad (4.14)$$

Hier hat diese transzendente Gleichung ihren wahren Sinn erhalten, wogegen sie **Boggs** nur ohne tiefere Begründung von **Mollweide** übernommen wurde. Die Abbildungsgleichungen selbst sind dann:

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \lambda \cos \Theta, \quad y = \sqrt{2} \sin \Theta. \quad (4.14a)$$

Mollweides Entwurf wurde vielfach für Weltkarten benützt.

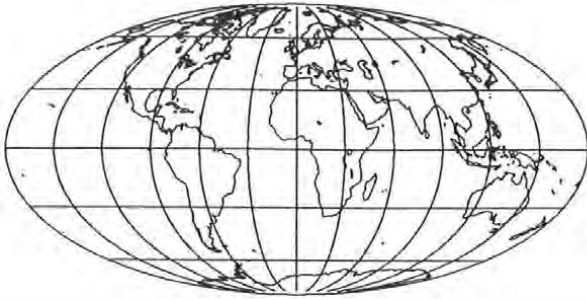


Abb. 4.13a: Mollweide-Projektion

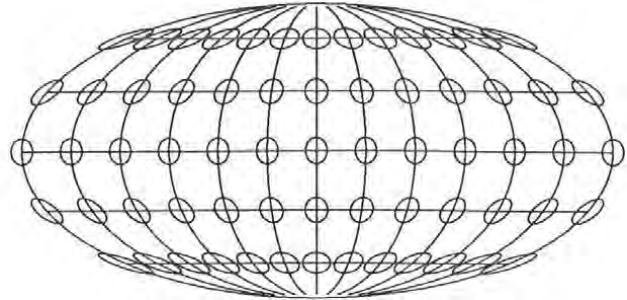


Abb. 4.13b

Der Abb. 4.13b entnimmt die Tatsache, daß entlang des Mittelmeridians die große Achse der Indikatrix die Richtung wechselt. Es muß also zwei Punkte auf diesem Meridian geben, in denen neben der Äquivalenz auch Konformität, d.h. absolute Treue herrscht. In welcher Breite dies eintritt läßt sich ermitteln, indem man die Ausdrücke für a und b bestimmt und $a = b$ setzt.

Flächentreue Projektion von Prepetit-Foucault, (Abb. 4.14):

$$x = \lambda \cos \varphi \cos^2(\varphi/2), \quad y = 2 \tan(\varphi/2). \quad (4.15)$$

Flächentreue Projektion von Kawraisky I (1934), (Abb. 4.15):

$$x = (\lambda/\alpha\beta) \cos \varphi \cdot \sec(\beta\varphi), \quad y = \alpha \sin(\beta\varphi), \quad \alpha = 1.455, \quad \beta = 0.75. \quad (4.16)$$

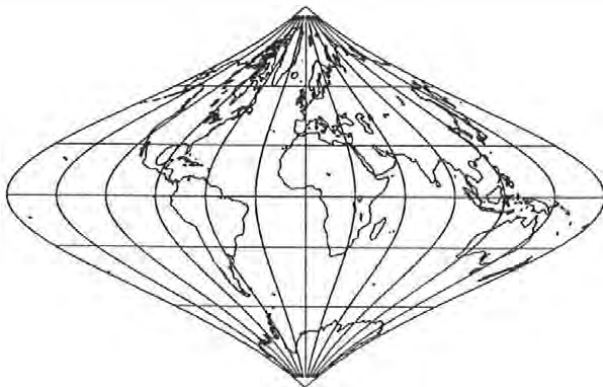


Abb. 4.14: Proj. von Prepetit-Foucault

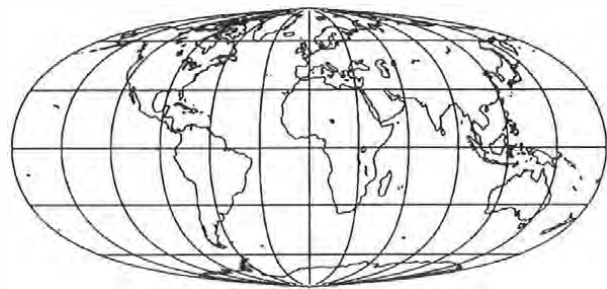


Abb. 4.15: Proj. von Kawraisky I

Da die Entwürfe flächentreu sind, erübrigt sich die Darstellung der Verzerrungsellipsen.

Flächentreuer Entwurf von Collignon (1865)

Collignon bildet die halbe Erdkugel in ein auf der Spitze stehendes Quadrat, die ganze Erde in einen Rhombus ab (Abb. 4.16a und b). Die Abbildungsgleichungen sind:

$$x = \frac{2\lambda}{\pi} (\sqrt{\pi} - y), \quad y = \sqrt{\pi} \left\{ 1 - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right\}. \quad (4.17)$$

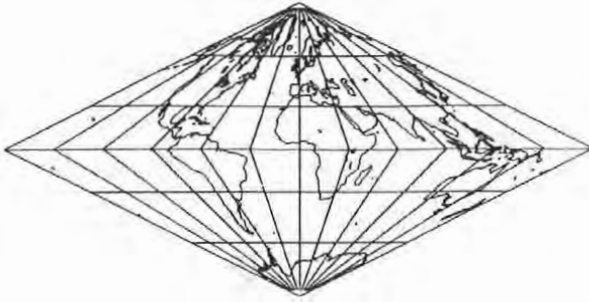


Abb. 4.16a: Entwurf von Collignon

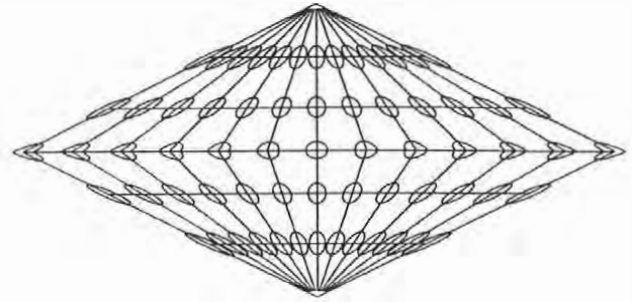


Abb. 4.16b

Nachteil des Entwurfes ist der Knick im Äquator, was sich auch in den eigenartigen Formen der Verzerrungsellipsen zeigt.

Aphylaktischer Entwurf von Bretterbauer I

Der scharfe Knick im Äquator des Entwurfes von Collignon kann durch die folgenden Abbildungsgleichungen gemildert werden:

$$x = \lambda \sqrt{1 - 2\varphi/\pi}, \quad y = \varphi. \quad (4.18)$$

Wird der Faktor von φ in der Wurzel kleiner als $2/\pi$ angenommen, werden die Polbilder Gerade.



Abb. 4.17: Entwurf von Bretterbauer

Loximutalprojektion von Siemon (1935) bzw. Tobler (1966)

Der Name wurde von Tobler eingeführt und soll die Tatsache charakterisieren, daß Loxodromen, die vom Hauptpunkt H im Mittelmeridian in der Breite $\varphi_0 = 40^\circ$ ausgehen, als Gerade in wahrer Länge und korrektem Azimut in H abgebildet werden, aber auch nur solche!

$$x = \frac{\lambda(\varphi - \varphi_0)}{\ln \left\{ \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)} \right\}}, \quad (4.19)$$

$$y = \varphi.$$

Zur Illustration der speziellen Eigenschaft ist in Abb. 4.18 die Loxodrome zwischen Buenos Aires und dem Hauptpunkt eingetragen. Die Projektion ist aphylaktisch.



Abb. 4.18: Loximutalprojektion

Flächentreue Projektion von Schjerning (1904)

Diese herzförmige Projektion kann sowohl als unechte Zylinder- als auch als unechte Kegelpjektion gedeutet werden. In ihrer originalen Fassung erscheinen die Kontinente in Ostwest-

-Richtung gequetscht, deshalb wurde hier die y-Koordinate halbiert, wodurch ein wesentlich besseres Bild entsteht.

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\lambda \cos \varphi}{2(\pi/2 - \varphi)}, \\
 x &= (\pi/2 - \varphi) \sin u, \\
 y &= (\pi/2 - \varphi) \cos u.
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$



Der Entwurf wird oft auch eine Abwandlung der Projektion von Stab-Werner bezeichnet.

Abb. 4.19: Entwurf von Schjernerjng, Variante von Bretterbauer

Homolosine Projektion von Goode (1923)

Dieser Entwurf ist eine Kombination der Projektionen von Sanson-Flamsteed und Mollweide. Da die Projektion von Sanson die polnahen Gebiete übermäßig stark zusammendrängt, hatte Goode die Idee, diese Gebiete nach Mollweide abzubilden. Möglich ist ein nahtloser Übergang zwischen den Projektionen, weil beide in einem bestimmten Parallelkreis gleichen Maßstab haben. Die Breite dieses Parallelkreises findet man durch Gleichsetzen der x-Werte von Gl. 4.13 und 4.14a: $\cos \varphi_0 = 2\sqrt{2} \cos \Theta_0 / \pi$. Durch Elimination von φ mittels Gl. 4.14 erhält man:

$$8 \cos^2 \Theta_0 + (\sin 2\Theta_0 + 2\Theta_0)^2 = \pi^2. \text{ Die Lösung gibt: } \Theta_0 = \pm 32^\circ 41' 21.4'' \rightarrow \varphi_0 = \pm 40^\circ 44' 12.0''.$$

Der Maßstab entlang der y-Achse ist jedoch in den beiden Projektionen verschieden. Deshalb decken sich diese zwei Parallelkreise nicht. Abb. 4.20 zeigt beide Projektionen übereinandergelegt. Die nach Mollweide abgebildeten Polkappen müssen deshalb um Δy näher zum Äquator gerückt werden. Es muß gelten: $y_{Moll} + \Delta y = y_{Sanson}$, also:

$$\Delta y = \varphi_0 - \sqrt{2} \sin \Theta_0 = -0.0528. \tag{4.21}$$

Abb. 4.21 demonstriert die fertige Homolosineprojektion. Deutlich ist der Knick in den Meridianen beim Übergang zwischen beiden Abbildungen zu sehen.

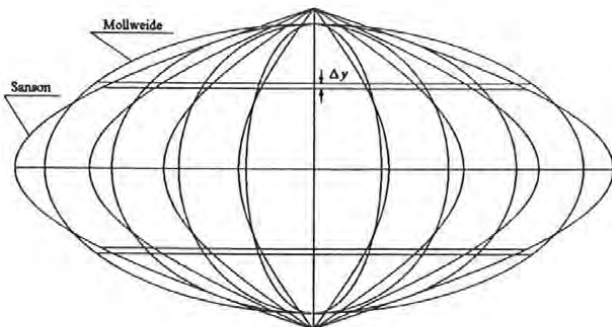


Abb. 4.20: Sanson und Mollweide, 45°x45°



Abb.4.21: Homolosineprojektion, 30°x30°

Goode selbst hat den Entwurf in zerlappter Form mit verschiedenen Zentralmeridianen angewendet. Die Zerlappung kann so geschehen, daß eine Weltkarte fast nur die Kontinente, kaum die Ozeane zeigt. Dabei können Nord- und Südhälfte eines Kontinents verschiedene Zentralmeridiane haben, was sehr geringe Verzerrungen zur Folge hat.

Die Verzerrungen dieser flächentreuen Abbildung sind sehr moderat. Interessant sind die Indikatrizien entlang des Parallels φ_0 . Im Schnittpunkt von Zentralmeridian und diesem Parallel herrscht absolute Treue (Abb. 4.22).

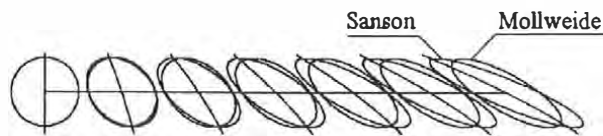


Abb.4.22

Abb. 4.23 gibt das Beispiel einer Zerlappung mit den Mittelmeridianen 65° w. Gr. bzw. 15° ö. Gr. Netzmaschen $10^\circ \times 10^\circ$. Die Homolosineprojektion war in den USA eine der wichtigsten Abbildungen für Atlanten.

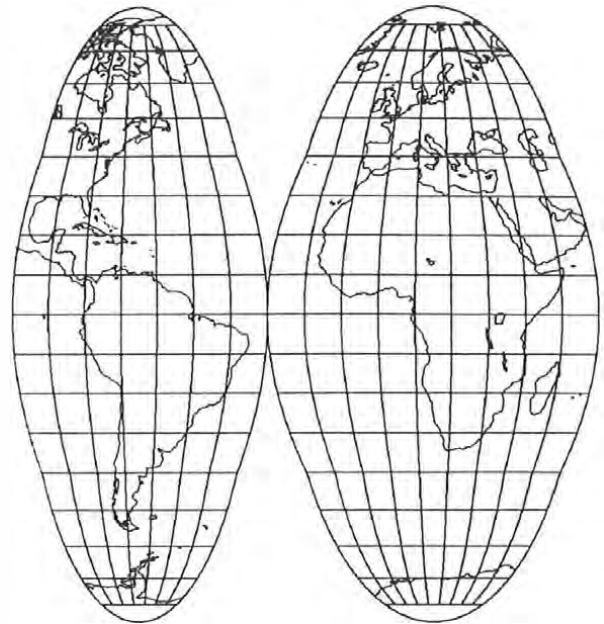


Abb. 4.23: Zerlappte Homolosineproj.

Eine ganze Reihe teils flächentreuer, teils aphyllaktischer Halbzylinderprojektionen wurde 1906 von Eckert angegeben. Da die Netzbilder und die Verzerrungseigenschaften von jeweils zwei Entwürfen sehr ähnlich sind, werden keine Indikatrizien und nur ausgewählte Beispiele von Weltkarten gezeigt.

Eckert's trapezförmige Weltkarte I (aphyllaktisch) (Abb. 4.24)

Ein sehr einfach zu konstruierendes Gradnetz, wichtig, als noch Handzeichnung nötig war.

$$x = \lambda \left(1 - |\varphi|/\pi\right), \quad y = \varphi. \quad (4.22)$$

Eckert's trapezförmige Weltkarte II (flächentreu), Netzform und Indikatrizien kaum von Variante I zu unterscheiden.

$$x = \frac{2\lambda}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{4 - 3\sin|\varphi|}, \quad y = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left(2 - \sqrt{4 - 3\sin|\varphi|}\right). \quad (4.22a)$$

Eckert's aphyllaktischer Entwurf III (Abb. 4.25)

$$x = \lambda \sqrt{1 - (2\varphi/\pi)^2}, \quad y = 2\varphi. \quad (4.22b)$$

Eckert's flächentreuer Entwurf IV, ganz ähnlich Entwurf III

$$\begin{aligned} \Theta + \sin \Theta \cos \Theta + 2 \sin \Theta &= (4 + \pi) \sin \varphi/2, \\ x = \lambda(1 + \cos \Theta), \quad y &= \sqrt{\pi} \sin \Theta. \end{aligned} \quad (4.22c)$$

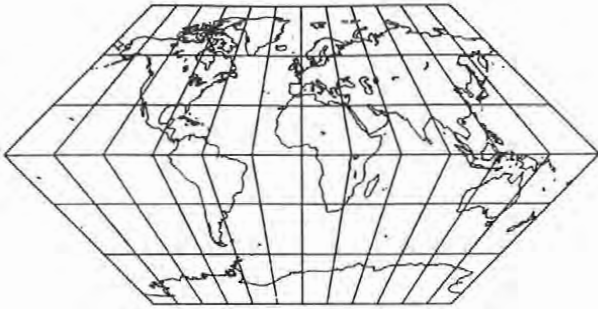


Abb. 4.24: Eckert I

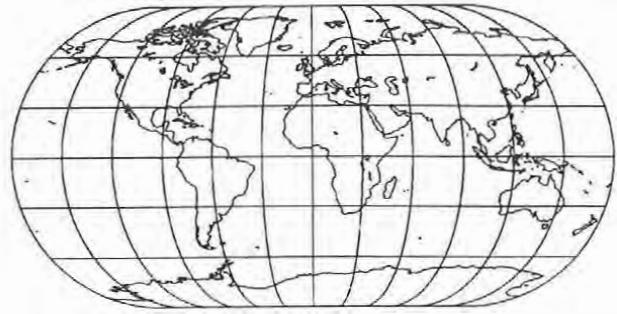


Abb. 4.25: Eckert III

Aphylaktischer Entwurf von Eckert V

$$x = \lambda(1 + \cos \varphi), \quad y = 2\varphi. \quad (4.22d)$$

Flächentreuer Entwurf von Eckert VI

$$\Theta + \sin \Theta = (1 + \pi/2),$$

$$x = \lambda(1 + \cos \Theta), \quad y = 2\Theta. \quad (4.22e)$$

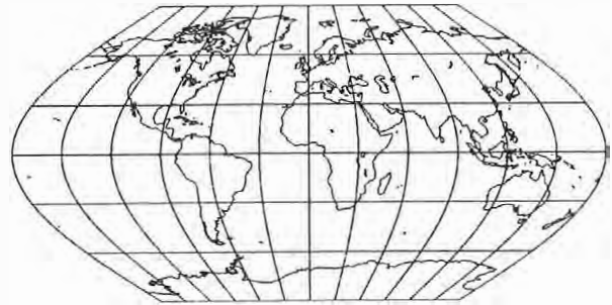


Abb. 4.26: Eckert V

Elliptischer Entwurf von Hammer I (1892), flächentreu (Abb. 4.27)

$$u = \frac{2}{1 + \cos \varphi \cos(\lambda/2)}, \quad x = 2\sqrt{u} \cos \varphi \sin(\lambda/2), \quad y = \sqrt{u} \sin \varphi. \quad (4.23)$$

Aphylaktischer Entwurf von Hammer II

$$u = \arccos \{ \cos(\lambda/2) \cos \varphi \},$$

$$v = \arctan \{ \sin(\lambda/2) / \tan \varphi \}, \quad (4.23a)$$

$$x = \sin(u/2) \cos v,$$

$$y = 2 \sin(u/2) \sin v.$$



Abb. 4.27: Ellipt. Entwurf von Hammer I

Ist von Hammer I praktisch nicht zu unterscheiden.

Ganz ähnliches Gradnetz haben die aphylaktischen Entwürfe von

Nell-Hammer: $x = \lambda(1 + \cos \varphi), \quad y = \varphi + \sin \varphi,$ und von (4.24a)

Fournier: $x = \lambda \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$ (4.24b)

Flächentreuer Entwurf von Wagner I (1941), (Abb. 4.28)

$$u = \arcsin(0.90632 \cdot \sin \varphi), \quad v = \arccos \{ \cos(\lambda/3) \cos u \}, \quad w = \arccos(\sin u / \sin v),$$

$$x = 5.33448 \cdot \sin(v/2) \sin w, \quad y = 2.48206 \cdot \sin(v/2) \cos w. \quad (4.25)$$

Aphylaktischer Entwurf von Winkel (1914), (Abb. 4.29)

$$x = \frac{\lambda}{2} (\cos \varphi_0 + \cos \varphi), \quad \varphi_0 = 50^\circ 28', \quad y = \varphi. \quad (4.26)$$



Abb. 4.28: Entwurf von Wagner



Abb. 4.29: Entwurf von Winkel

Von **McBryde-Thomas** (1949) wurden drei flächentreue Entwürfe angegeben, die sich so wenig unterscheiden, sodaß nur die Demonstration eines Entwurfes lohnt.

McBryde-Thomas I sinusoidale Projektion

$$\begin{aligned} \Theta/2 + \sin \Theta &= (1 + \pi/4) \sin \varphi, \\ x &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \cos \Theta \right) \cdot \lambda, \quad y = \Theta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

McBryde-Thomas II parabolische Projektion
(4.27a)

$$\begin{aligned} \Theta &= \arcsin(0.95258 \cdot \sin \varphi), \\ x &= \sqrt{\frac{6}{7}} \lambda \left\{ 2 \cos \left(\frac{2}{3} \Theta - 1 \right) \right\}, \quad y = \frac{9}{\sqrt{7}} \sin \left(\frac{\Theta}{3} \right). \end{aligned}$$



Abb. 4.30: McBryde-Thomas I

Es gibt auch noch die von [Snyder, 1989] „quartisch“ genannte **Projektion von McBryde-Thomas III**. In den originalen Abbildungsgleichungen von McBryde-Thomas, aber auch anderer Autoren, treten häufig numerische Faktoren auf. Ihre Begründung finden sie in dem Versuch, die Verzerrungen zu minimieren. Manchmal aber treten in beiden cartesischen Koordinaten idente Multiplikatoren auf, die zusammen mit dem Erdradius nichts anderes als einen Maßstabfaktor darstellen. In Gl. 4.27 z.B. ist dieser Faktor $\sqrt{6/(4 + \pi)}$; er wurde daher ignoriert.

Denoyer's halbelliptischer Entwurf (aphylaktisch)

$$x = \lambda \cos \left\{ \left(0.95 - \lambda/12 + \lambda^3/600 \right) \cdot \left(0.9 \cdot \varphi + 0.03 \cdot \varphi^5 \right) \right\}, \quad y = \varphi. \quad (4.28)$$

Das Netzbild unterscheidet sich kaum von Abb. 4.30.

Projektion von Robinson (1974), aphyllaktisch

Die Abbildung wird nicht durch mathematisch definierte Funktionen, sondern durch zwei breitenabhängige Wertetabellen vermittelt, die Robinson empirisch durch Versuche bestimmt hat. Der Entwurf sollte die Parallelkreise als Gerade, die Meridiane als Ellipsen darstellen und möglichst geringe Verzerrungen aufweisen.

Diese Absicht ist so gut gelungen, daß die National Geographical Society die Robinson-Projektion zu ihrer Standardabbildung für Weltkarten gemacht hat. Mit Kugelradius $R = 1$ lauten die Abbildungsgleichungen:

$$x = 0.8487 \cdot \alpha \cdot \lambda, \quad y = 1.3523 \cdot \beta. \quad (4.29)$$

α und β sind nebenstehender Tabelle zu entnehmen.



Abb. 4.31: Robinson-Projektion

φ°	α	β
0	1.0000	0.0000
5	0.9986	0.0620
10	0.9954	0.1240
15	0.9900	0.1860
20	0.9822	0.2480
25	0.9730	0.3100
30	0.9600	0.3720
35	0.9427	0.4340
40	0.9216	0.4958
45	0.8962	0.5571
50	0.8679	0.6176
55	0.8350	0.6769
60	0.7986	0.7346
65	0.7597	0.7903
70	0.7186	0.8435
75	0.6732	0.8936
80	0.6213	0.9394
85	0.5722	0.9761
90	0.5322	1.0000

Tabelle 4.1

Es stellt sich die naheliegende Frage warum die beiden Konstanten in (4.29) nicht ausmultipliziert und tabelliert wurden wie in [Bretterbauer, 1994] geschehen. Da die Werte nur von 5° zu 5° tabuliert sind, muß dazwischen interpoliert werden, wozu von verschiedenen Autoren Interpolations- und Approximationsalgorithmen verwendet werden [Snyder, 1990], [Beineke, 1991], die alle unbefriedigend sind, ja teilweise zu merklichen Fehlern führen. Das beste Verfahren liefert die Interpolation durch natürliche kubische Spline-Funktionen [Bretterbauer, 1994]. Eine genauere Analyse der Robinson'schen Tabelle zeigt außerdem gewisse Unregelmäßigkeiten, sodaß durchaus die Möglichkeit besteht, die an sich schon hervorragenden Eigenschaften der Projektion noch zu verbessern.

Asymmetrischer flächentreuer Entwurf von Hatano (1972), (Abb. 4.32)

Wenn $\varphi < 0$ dann ist $c_1 = 1.43763$, $c_2 = 1.93052$, sonst $c_1 = 1.67595$, $c_2 = 1.75859$.

$$\begin{aligned} u &= c_1 \sin \varphi - \varphi, & v &= -2 - 2 \cos \varphi, & w &= \varphi/2 - u/v, \\ x &= 0.85 \cdot \lambda \cos w, & y &= c_2 \sin w. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aphylaktischer Entwurf von Ortelius (1570), (Abb. 4.33)

$$x = \lambda \{1 + \cos(2\varphi/\pi)\}, \quad y = \pi \sin(2\varphi/\pi). \quad (4.31)$$

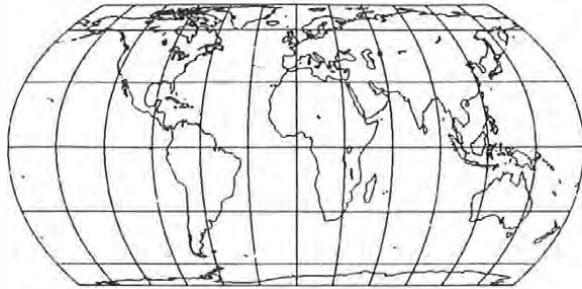


Abb. 4.32: Projektion von Hatano

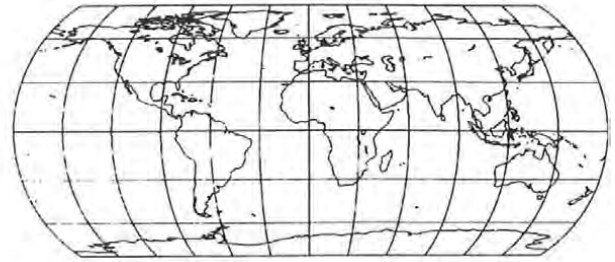


Abb.4.33: Projektion von Ortelius

Aphalaktischer Entwurf von Bretterbauer III (Abb. 4.34)

$$x = \lambda \cos(\varphi/2), \quad y = 2 \tan(\varphi/2). \quad (4.33)$$

Aphalaktischer Entwurf von Bretterbauer IV (Abb. 4.35)

$$\begin{aligned} \varphi_0 = 50^\circ, \quad x_1 = \lambda \cos \varphi_0, \quad y_1 = \varphi, \quad x_2 = \lambda \cos \varphi \cos(\varphi/2), \quad y_2 = 2 \tan(\varphi/2), \\ x = (x_1 + x_2), \quad y = (y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (4.33a)$$

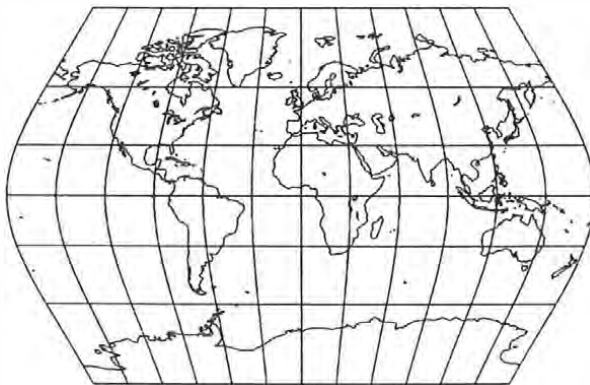


Abb. 4.35: Entwurf von Bretterbauer III

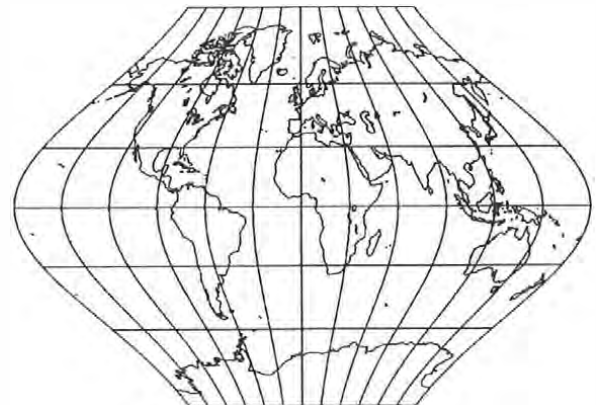


Abb. 4.35: Entwurf von Bretterbauer IV

Aphylaktischer Entwurf von Michailov (1985), (Abb. 4.36)

$$\begin{aligned} \varphi_0 = 60^\circ, \quad u = 0.8 + 0.003 \cdot \varphi, \\ x = \lambda \sqrt{\pi^2 - 4u^2 \varphi^2}, \quad y = 2 \cos \varphi_0 \cdot u \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (4.34)$$



Abb. 4.36: Entwurf von Michailov

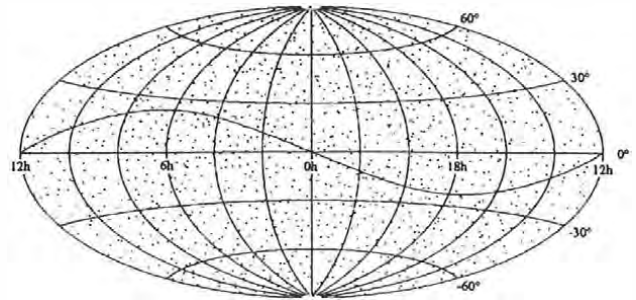


Abb. 4.37: Entwurf von Aitoff mit Sternen und Ekliptik

Aphylaktischer Entwurf von Aitoff (1889), (Abb. 4.37)

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \varphi \cos(\lambda/2), & v &= \sqrt{1-u^2}, & w &= \arctan(v/u), & z &= \sin \varphi/v, \\
 x &= 2 \cdot w \cdot \sqrt{1-z^2}, & y &= w \cdot z.
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

Das Netzbild dieses Entwurfes ist sehr ähnlich Abb. 4.27, d. i. der elliptische Entwurf von **Hammer II**. Zur Abwechslung werden nicht die Kontinuumrisse, sondern alle Sterne des FK 6 bis zur mag. = 6 einschließlich und die Ekliptik dargestellt (Abb. 4.37).

Aphylaktischer Entwurf von Mayr (1964), (Abb. 4.38)

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda \cdot \sqrt{\cos \varphi}, & y &= \int_0^\varphi \sqrt{\cos \varphi} \cdot d\varphi.
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

Das Integral ist nicht geschlossen, sondern nur durch numerische Integration lösbar, wozu es verschiedene Verfahren gibt; hier wurde das Runge-Kutta Verfahren 5. Ordnung nach Butcher benützt [Schwarz, 1986].

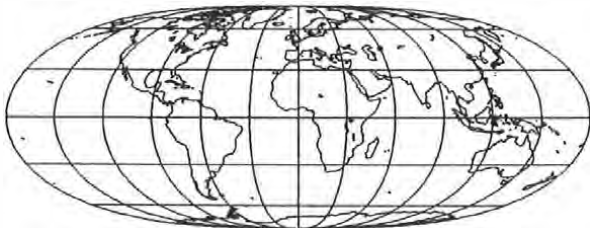


Abb. 4.38: Entwurf von Mayr

Aphylaktischer Entwurf von Aitoff-Wagner

$$\begin{aligned}
 u &= \arccos\{\cos(5\lambda/18)\cos(7\varphi/9)\}, \\
 v &= \arccos\{\sin(7\varphi/9)/\sin u\}, \\
 x &= 3.6 \cdot u \cdot \sin v, & y &= 1.28571 \cdot u \cdot \cos v.
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Das Netzbild ist kaum von jenem des Entwurfes Wagner (Abb. 4.28) zu unterscheiden.

In der folgenden Abbildung von **Wagner-Kavraiskey** taucht wieder in den originalen Abbildungsgleichungen ein gemeinsamer Faktor der ebenen Koordinaten auf, der auch hier ignoriert wurde (Abb. 4.39).

Flächentreuer Entwurf von Wagner-Kavraisky, aphyllaktisch (Abb. 4.39)

$$\begin{aligned} u &= \arcsin(\sqrt{3/2} \sin \varphi), \\ x &= (2/3)\lambda \cos u, \quad y = u. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Entwurf von Wagner II, nahezu flächentreu (Abb. 4.40)

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\pi\sqrt{3}, \quad c_2 = 4\pi + 3\sqrt{3}, \quad \Theta = c_1 \sin \varphi - 2\varphi - \sin(2\varphi), \\ x &= (1/\pi)\sqrt{3c_1/c_2} \cdot \lambda \cdot \cos \Theta, \quad y = \sqrt{c_1/c_2} \cdot \sin \Theta. \end{aligned} \quad (4.38a)$$



Abb. 4.39: Entwurf von Wagner-Kavraisky

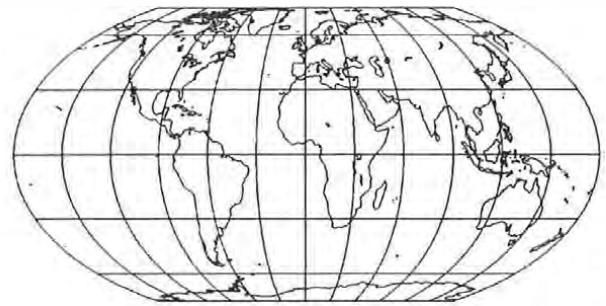


Abb. 4.40: Entwurf von Wagner II

Aphyllaktischer Entwurf von Urmajev (1950), (Abb. 4.41)

$$\begin{aligned} u &= \arcsin(0.8 \cdot \sin \varphi), \\ x &= 0.877383 \cdot \lambda \cdot \cos \varphi, \quad y = 1.42469(u + 0.138175 \cdot u^3). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aphyllaktischer Entwurf von Bretterbauer V, (Abb. 4.42)

$$x = 5 \sin(\pi/2 - \varphi) \cdot \sin(\lambda/2), \quad y = 3 \cos(\pi/2 - \varphi). \quad (4.40)$$

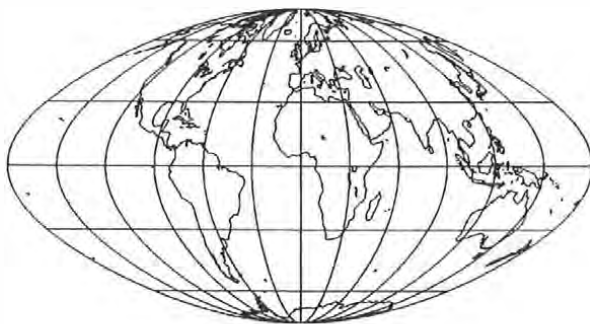


Abb. 4.41: Entwurf von Urmajev

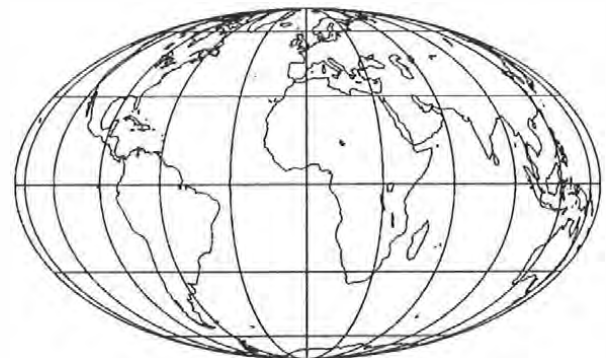


Abb. 4.42: Entwurf von Bretterbauer V

Eine ganze Reihe von Entwürfen wurde von W. Tobler angegeben, von denen zwei hier, weitere an anderer Stelle mitgeteilt werden.

Vermittelnde Projektion von Tobler (Abb. 4.43)

Tobler bildet das Mittel aus Lambert's flächentreuer Zylinderprojektionen und der Projektion von Sanson-Flamsteed:

$$x = 2 \cdot \lambda \cos \varphi / (1 + \cos \varphi), \quad y = \varphi + \sin \varphi. \quad (4.41)$$

Ein anderer Entwurf, der aus Mittelbildung von zwei verschiedenen Projektionen entsteht ist die

Aphylaktische Tripelprojektion von Winkel

Sie entsteht aus dem Entwurf von Aitoff und der Plattkarte, also:

$$\begin{aligned} u &= \arccos\{\cos \varphi \cos(\lambda/2)\}, \quad v = \sin \varphi / \sin u, \\ x_1 &= 2u \sqrt{1-v^2}, \quad y_1 = u \cdot v, \quad x_2 = \lambda \cos \varphi_0, \quad y_2 = \varphi, \\ x &= x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

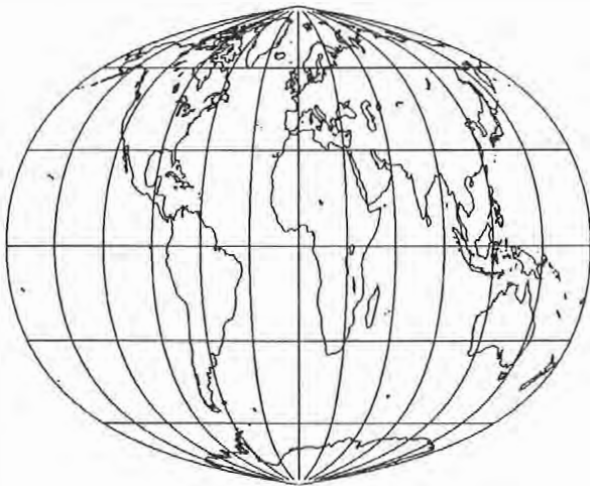


Abb. 4.43: Vermittelnder Entwurf von Tobler



Abb. 4.44: Tripelprojektion von Winkel

Aphylaktischer Entwurf von Tobler (1973)

(Abb. 4.45) (4.43)

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \lambda \cos \varphi \sqrt{\varphi \cdot \sin \varphi} / (\sin \varphi + \varphi \cdot \cos \varphi), \\ y &= \sqrt{\varphi \cdot \sin \varphi}. \end{aligned}$$



Abb. 4.45: Entwurf von Tobler

Flächentreue Projektion von Briesemeister (1954), (Abb. 4.46)

Der Entwurf ist im wesentlichen gleich der Hammer'schen elliptischen Projektion, nur wird die y-Koordinate etwas gestreckt und der Hauptpunkt in die Breite $\varphi_0 = 45^\circ$ verlegt. Die Abbildungsgleichungen sind somit:

$$\begin{aligned}
 u &= \arcsin\left\{(\sin \varphi - \cos \varphi \cos \lambda) / \sqrt{2}\right\}, \\
 v &= \arccos\left\{(\sin \varphi + \cos \varphi \cos \lambda) / (\sqrt{2} \cos u)\right\}, \\
 d &= 2 / \{1 + \cos u \cos(v/2)\}, \\
 x &= \sqrt{3.5 \cdot d} \cos u \sin(v/2), \quad y = \sqrt{2 \cdot d} \sin u / \sqrt{1.75}.
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

Entwurf von Hammer mit Pollinie, nahezu flächentreu, (Abb. 4.47)

$$\begin{aligned}
 u &= \arcsin(0.90631 \cdot \sin \varphi), \quad v = \arccos\{\cos u \cos(\lambda/3)\}, \\
 w &= \arccos(\sin u / \sin v), \\
 x &= 2.48206 \cdot \cos w \sin(v/2), \quad y = 5.33449 \cdot \sin w \sin(v/2).
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

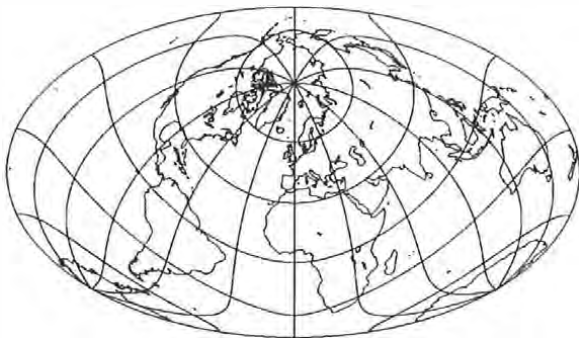


Abb. 4.46: Projektion von Briesemeister



Abb. 4.47: Entwurf von Hammer mit Pollinie

Konforme Projektion von Maurer (1919)

Das Netz dieser interessanten Projektion besteht aus konfokalen Kegelschnitten. Der Äquator ist die Gerade zwischen den Brennpunkten, die Parallelkreise sind Ellipsen, die den Äquator umschließen. Die Meridiane sind Hyperbeln als orthogonale Trajektorien der Parallelkreise (Konformität!). Die Meridiane der Längen $\pm 180^\circ$ sind die linken und rechten geraden Fortsetzungen des Äquatorbildes; Maschenweite $15^\circ \times 15^\circ$.

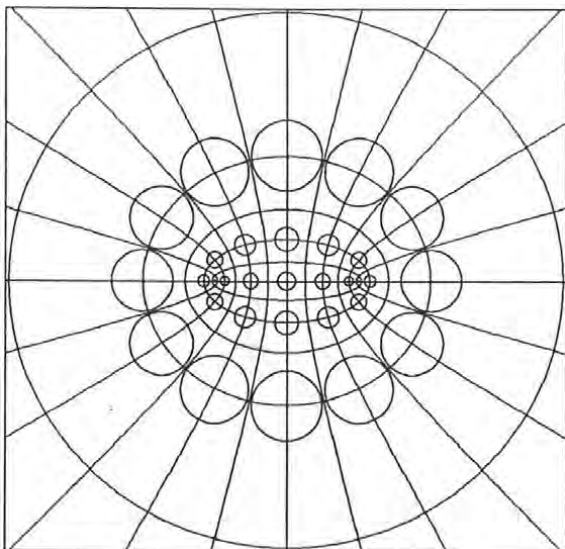


Abb. 4.48: Indikatoren der Proj. von Maurer

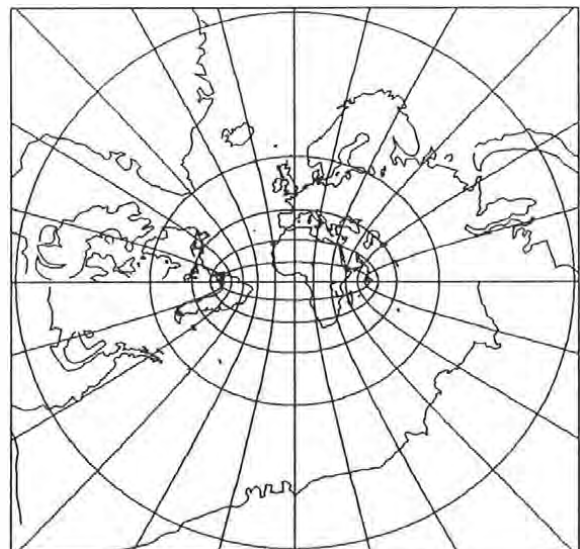


Abb. 4.49: Projektion von Maurer

Die Abbildungsgleichungen sind:

$$x = \sin \lambda / \cos \varphi, \quad y = \tan \varphi \cos \lambda. \quad (4.45)$$

Man beachte die überaus rasch zunehmende Verzerrung. Bei [Schneider, 1989] wird diese Projektion mit dem Namen **Littrow** (1833) verknüpft. Übrigens tritt diese Abbildung, besser gesagt die Kurvenschar der konfokalen Kegelschnitte, auch in anderen Disziplinen auf, so z. B. in der Wärmelehre.

Armadillo (Gürteltier) Projektion von Raisz (1943), (Abb. 4.51a, b)

In diesem eigenwilligen Entwurf dürfen das Netz und die Kontinente nicht über einen durch φ_0 definierten Bereich nahe dem Südpol hinaus gezeichnet werden. Dieser Grenzgrad ist durch

$v = -\arctan\{\cos(\lambda/2)/\tan \varphi_0\}$ bestimmt. Die Abbildungsgleichungen selbst sind:

$$\begin{aligned} u &= (1 + \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0) / 2, \\ x &= (1 + \cos \varphi) \sin(\lambda/2), \quad y = u + \sin \varphi \cos \varphi_0 - (1 + \cos \varphi) \sin \varphi_0 \cos(\lambda/2). \end{aligned} \quad (4.46)$$

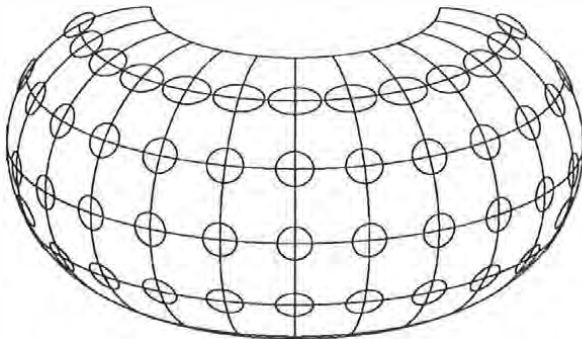


Abb. 4.50a: Gürteltier, $30^\circ \times 30^\circ$

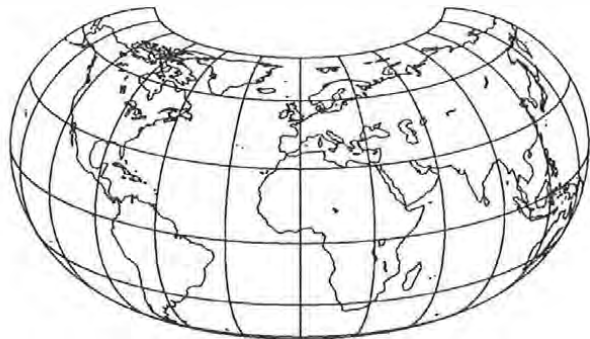


Abb. 4.50b: Armadillo von Raisz

In den Abb. 4.50a und b wurde $\varphi_0 = 20^\circ$ gewählt.

oooooooooooo

Kapitel 5

Kegelprojektionen

Man denke sich einen Kegel der Erdkugel entweder berührend oder in zwei Kleinkreisen schneidend umschrieben. Wieder sind verschiedene Lagen der Kegelachse möglich, üblich ist allerdings nur die normale Lage, d. h. die Achse geht durch die Pole. Im Berührkreis bzw. in den Schnittkreisen herrscht Streckentreue, die Verzerrungen in deren Nachbarschaft sind also immer sehr klein. Theoretisch lassen sich aus der allgemeinen Kegelprojektion die Azimutalprojektionen und die Zylinderprojektionen herleiten, indem man die Kegelspitze bis zur Berührung an die Kugel heranrückt, oder aber ins Unendliche rücken läßt (Öffnungswinkel entweder gleich π oder 0). Praktisch durchführbar ist das nur in wenigen Fällen und soll an einem Fall gezeigt werden. Wie bei den Zylinderprojektionen unterscheidet man wieder zwischen echten und unechten (pseudokonische) Kegelprojektionen.

5.1 Echte Kegelprojektionen

Alle echten Kegelprojektionen erkennt man am Netzbild und somit auch an den Abbildungsgleichungen. Es sei der normale Fall vorausgesetzt. Nach erfolgter geometrischer oder analytischer Abbildung wird der Kegel entlang einer Erzeugenden aufgeschnitten und in die Ebene ausgerollt. Rein perspektive Abbildungen erfolgen ausschließlich aus dem Kugelzentrum. Man erkennt, daß die Meridiane als die Kegel-erzeugenden und die Parallelkreise als Kegelkreise abgebildet werden. Das charakteristische Netzbild echter Kegelprojektionen besteht also aus einem Geradenbüschel durch die Spitze des Kegels (= Polbild) und einer konzentrischen Kreisschar um diese.

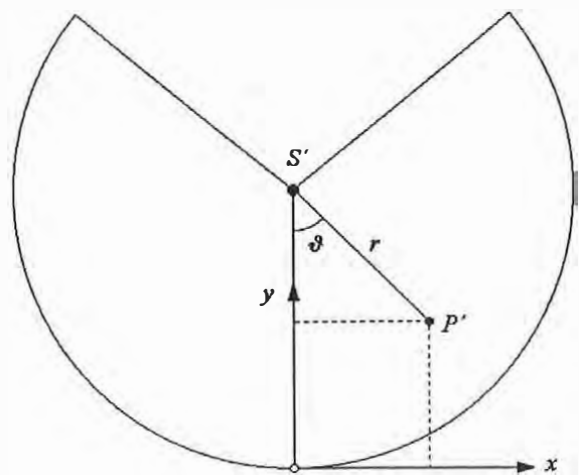


Abb. 5.1: Kegelmantel, Polarkoordinaten

Aus naheliegenden Gründen empfiehlt sich die Verwendung von Polarkoordinaten (r, ϑ) in der Ebene, mit der Kegelspitze als Ursprung. Diese sind dann leicht in cartesische Koordinaten umzuwandeln, einfach durch Normalprojektion auf die Achsen. Da die Bilder von Meridianen und Parallelkreisen orthogonal sind ($J = 0$), ist Konformität möglich, ebenso natürlich Äquivalenz. Aus der allgemeinen Charakteristik des Netzbildes ergeben sich sofort die allgemeinen Abbildungsgleichungen der echten Kegelprojektionen in den Polarkoordinaten:

$$r = r(\varphi), \quad \vartheta = n \cdot \lambda. \quad (5.1)$$

Will man auf cartesische Koordinaten übergehen, so kann man den Ursprung in die Kegelspitze legen, oder in den Schnittpunkt des Berührparallels mit dem Hauptmeridian. Der Faktor n ist die Kegelkonstante. Dem vollen Umkreis $\lambda = 2\pi$ auf der Kugel entspricht in der Ebene für

$n < 1$ ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\vartheta = 2\pi \cdot n$,

$n = 1$ der volle Kreis,

$n > 1$ ein Zentriwinkel von $\vartheta > 2\pi$, das bedeutet teilweise Überdeckung der Bildebene, was ohne Sinn ist, daher bleibt dieser Fall ausgeschlossen.

Zunächst seien die Streckenverzerrungen h und k in Polarkoordinaten transformiert. Auf der Kugel sind die Bogenelemente in Meridian bzw. Parallelkreis ($R = 1$):

$$ds_m = d\varphi, \quad ds_p = \cos\varphi \cdot d\lambda.$$

In der Bildebene dagegen (vorübergehend wird ein Querstrich gesetzt):

$$d\bar{s}_m = -dr, \quad d\bar{s}_p = r \cdot d\vartheta = n \cdot r \cdot d\lambda.$$

(Das negative Zeichen kommt daher, daß r abnimmt, wenn φ zunimmt). Vernünftigerweise wird ab nun mit der Poldistanz $p = (\pi/2 - \varphi)$ gearbeitet. Nun sind die Verzerrungsgrößen h und k definitionsgemäß:

$$\begin{aligned} h &= d\bar{s}_m / ds_m = -dr / d\varphi = dr / dp, \\ k &= d\bar{s}_p / ds_p = nr \cdot d\lambda / \cos\varphi \cdot d\lambda = nr / \cos\varphi. \end{aligned} \quad (5.1a)$$

5.1.1 Zentrale Kegelprojektion

Bei einem in der Poldistanz p_0 berührenden Kegel ist der Radius des Berührkreises $r_0 = \tan p_0$ und das Halbmessergesetz aller anderen Parallelkreise:

$$r = \tan p_0 - \tan(p_0 - p). \quad (5.2)$$

Der streckentreue Berührparallel der Kugel hat die Länge $2\pi \cdot \cos\varphi_0 = 2\pi \cdot \sin p_0$. Dem entspricht in der Projektion der Zentriwinkel:

$$\vartheta_0 = 2\pi \cdot \sin p_0 / \tan p_0 = 2\pi \cdot \cos p_0, \quad \rightarrow \quad n = \cos p_0. \quad (5.3)$$

Nun sind auch die Sonderfälle des Kegels klar: Für $p_0 = \pi/2$ ($\varphi_0 = 0$) und $n = 0$ geht der Kegel in den berührenden Zylinder über. Es ist dann stets $\vartheta = 0$, d. h. die Meridiane sind die parallelen Erzeugenden des Zylinders. Für $p_0 = 0$, $n = 1$, geht der Kegel in die im Pol berührende Tangentialebene über und es ist stets $\vartheta = \lambda$, also liegen Azimutalprojektionen vor.

Die Abbildungsgleichungen der **konischen Zentralperspektive** sind daher:

$$r = \tan p_0 - \tan(p_0 - p), \quad \vartheta = \lambda \cos p_0. \quad (5.4)$$

Die Abbildung ist aphyllaktisch, mit der Flächenverzerrung $\sigma = \sec^3(p_0 - p)$. Diese Abbildung soll nur als Grundbeispiel für konische Projektionen dienen, ist aber von geringem praktischen Wert.

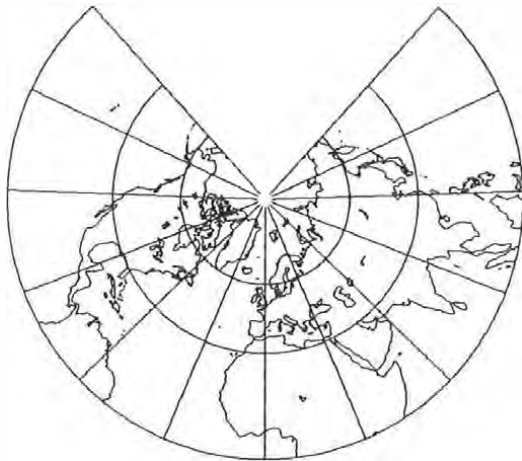


Abb. 5.2a: Zentrale Kegelproj. $\varphi_0 = 50^\circ$

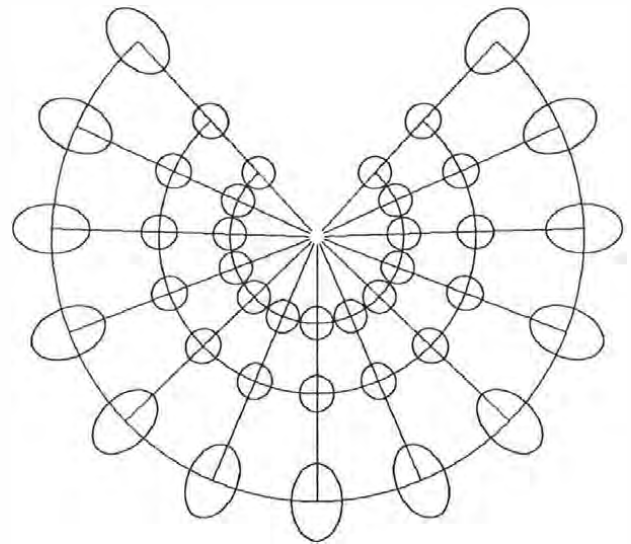


Abb. 5.2b: Indikatrizen, $30^\circ \times 30^\circ$

Im Falle eines Schnittkegels mit den streckentreuen Parallelen in den Poldistanzen p_A und p_B ist die Kegelkonstante gleich $n = \cos\{(p_A + p_B)/2\}$.

5.1.2 Konforme Kegelprojektionen

Da bei den echten Kegelprojektionen $J = 0$, genügt für die Konformität, daß $h = k$ ist, oder $dr/dp = nr/\sin p$. Separation der Variablen gibt die Differentialgleichung: $dr/r = n \cdot dp/\sin p$. Es sei r_{Equ} der Radius des Äquatorbildes. Dann liefert die Integration:

$$\ln r \Big|_{r_{Equ}}^r = n \ln \tan(p/2) \Big|_{\pi/2}^p. \quad \text{Nach Einsetzen der Grenzen und Entlogarithmieren:}$$

$$r = r_{Equ} \tan^n(p/2) = r_{Equ} \tan^n(\pi/4 - \varphi/2). \quad (5.5)$$

Wie es sein muß, folgt für den Pol $r = 0$. Das Bild des Gegenpols ist der unendlich ferne Kreis. Die Konforme Kegelprojektion hat also die Abbildungsgleichungen:

$$r = r_{Equ} \tan^n(p/2), \quad \vartheta = n \cdot \lambda, \quad (n = \cos p_0). \quad (5.5a)$$

Darin sind n und r_{Equ} noch frei wählbare Konstanten. Der Radius der kreisförmigen Indikatrix ist:

$$a = b = h = k = n \cdot r_{Equ} \tan^n(p/2) / \sin p = (n \cdot r_{Equ} / 2) \tan^{n-1}(p/2) \sec^2(p/2). \quad (5.5b)$$

Bei der Abbildung wird man sinnvollerweise nie über den Äquator hinaus gehen, da die Verzerrungen zu groß werden. Für die Abbildung äquatornaher Gebiete verwendet man besser die Zylinderprojektion.

Zur Bedeutung der Kegelkonstanten n : Für $n = 1$ gewinnt man aus Gl. 5.5a:

$$r = r_{Equ} \tan(p/2), \quad \vartheta = \lambda, \quad a = b = (r_{Equ}/2) \cdot \sec^2(p/2).$$

Der Kegel ist in die Tangentialebene im Pol übergegangen. Da aber im Pol ($p = 0$) absolute Treue herrschen und damit $a = b = 1$ sein muß, ist $r_{Equ} = 2$ zu wählen. Damit ist die **stereographische Polarprojektion** gewonnen. Für $n < 1$ ist $(n - 1) < 0$, $\tan^{n-1}(0) = \infty$. Das bedarf einer näheren Untersuchung. Dazu wird Gl. 5.5b logarithmisch differenziert:

$$\ln a = \ln n + \ln r_{Equ} + n \ln \tan(p/2) - \ln \sin p,$$

$$(1/a) \cdot da/dp = a \cdot (\cos p_0 - \cos p) / \sin p = -2a \cdot \sin \{(p_0 + p)/2\} \cdot \sin \{(p_0 - p)/2\} / \sin p.$$

Der Radius der Indikatrix a nimmt also vom Pol ausgehend mit wachsendem p ab und erreicht für $p = p_0$ ein Minimum, weil hier $da/dp = 0$ ist. In Formel 5.5a ist der Radius r_{Equ} frei wählbar. Fordert man Streckentreue für den Parallel p_0 , also $a = 1$, so ist r_{Equ} festgelegt. Aus 5.5b folgt:

$$a = 1 = n r_{Equ} \tan^n(p_0/2) / \sin p_0 = r_{Equ} \cos p_0 \tan^{\cos p_0}(p_0/2) / \sin p_0, \quad \text{oder}$$

$$r_{Equ} = \tan p_0 \cot^{\cos p_0}(p_0/2).$$

Die Abbildungsgleichungen der **konformen Kegelprojektion mit einem streckentreuen Parallel** lautet somit

$$r = \tan p_0 \left\{ \tan(p/2) / \tan(p_0/2) \right\}^{\cos p_0}, \quad \vartheta = \lambda \cos p_0. \quad (5.6)$$

Der Radius des Äquatorbildes scheint wegen der Forderung nach Streckentreue im Berührparallel nun nicht mehr auf. Der Radius der Indikatrix schließlich ist:

$$a = (\sin p_0 / \sin p) \left\{ \tan(p/2) / \tan(p_0/2) \right\}^{\cos p_0}. \quad (5.6a)$$

Konforme Kegelprojektion von Lambert mit einem streckentreuen Parallel, (1772)

Es soll eine Zone zwischen den zwei Parallelkreisen p_1 und p_2 optimal abgebildet werden. Dazu fordert Lambert zusätzlich, daß in diesen Parallelen die Streckenverzerrung gleich groß sein soll, also $a_1 = a_2$. Wendet man Formel 5.6a zweimal an und setzt beide Ausdrücke einander gleich, folgt nach einigen Manipulationen eine Bestimmungsgleichung für p_0 :

$$\cos p_0 = n = \frac{\ln \sin p_1 - \ln \sin p_2}{\ln \tan(p_1/2) - \ln \tan(p_2/2)}. \quad (5.7)$$

Speziell für die Darstellung Europas hat Lambert die Kegelkonstante $n = 3/4$ gewählt, das entspricht $p_0 = 41^\circ 24'$. Für eben dieses n sind die Abb. 5.3a, b konstruiert (Netz $30^\circ \times 30^\circ$). Es sei noch der Grenzfall $n = 0$ betrachtet. Das Bild des Poles rückt ins Unendliche, es liegt die normale konforme Zylinderprojektion vor. Für den Radius der Indikatrix folgt $a = \sec \varphi$, woraus man sofort die **Mercatorprojektion** erkennt.

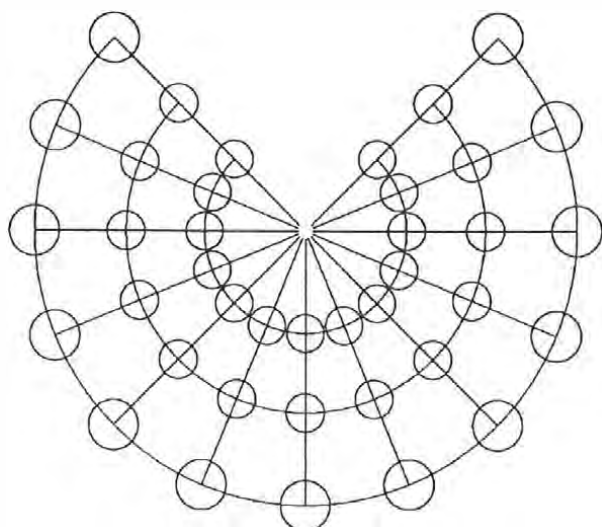


Abb. 5.3a: Lambert's konf. Kegelp Projektion

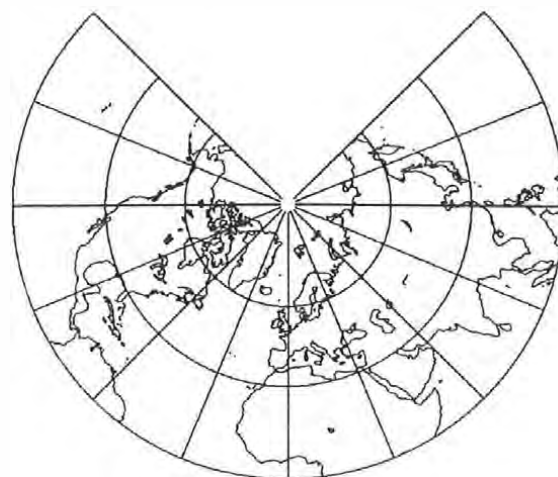


Abb. 5.3b: Lambert's konf. Kegelp Proj.

Es gibt auch noch die **konforme Kegelp Projektion von Lambert-Gauß mit zwei streckentreuen Parallelen**, wozu weiter nichts zu sagen ist.

5.1.3 Äquivalente echte Kegelp Projektionen

Ausgangspunkt sind wieder die allgemeinen Abbildungsgleichungen $r = r(\varphi)$, $\vartheta = n \cdot \lambda$. Weil für echte Kegelp Projektionen $J = 0$ ist, muß im Fall der Flächentreue gelten:

$$\sigma = hk \cos J = hk = 1.$$

Mit obigen Ausdrücken für h und k gewinnt man die Differentialgleichung: $r \cdot dr = (\sin p/n) \cdot dp$. Soll das Bild des Poles wieder in die Kegelspitze fallen (was keineswegs so sein muß), ist für $r = 0$ auch $p = 0$. Damit gibt die Integration:

$$r^2/2 = -\cos p/n|_0^p = (1 - \cos p)/n = (2/n) \sin^2(p/2).$$

Das gibt die allgemeinen Abbildungsgleichungen der echten, flächentreuen Kegelp Projektionen:

$$r = \left(2/\sqrt{n}\right) \sin(p/2), \quad \vartheta = \lambda \cos p_0. \quad (5.8)$$

Im Grenfall $n = 1$ folgt daraus die normale flächentreue Azimutalprojektion. Der Grenzübergang für $n = 0$ ist aus Gl. 5.8 nicht möglich.

Lambert's flächentreue Kegelp Projektion I mit einem streckentreuen Parallel

Es sei wieder $n = 3/4$ gewählt (Abb. 5.4a, b), Abbildungsgleichungen 5.8. Eigenartigerweise wird in der Literatur die flächentreue Azimutalprojektion von **Lambert II** (1772) mit einer geringen Veränderung als Kegelp Projektion geführt. Mit $n = 1$ lauten die Gleichungen (Abb. 5.5a, b):

$$x = \sqrt{1 - \cos p} \cdot \sin(\lambda/2), \quad y = \sqrt{1 - \cos p} \cdot \cos(\lambda/2). \quad (5.8a)$$

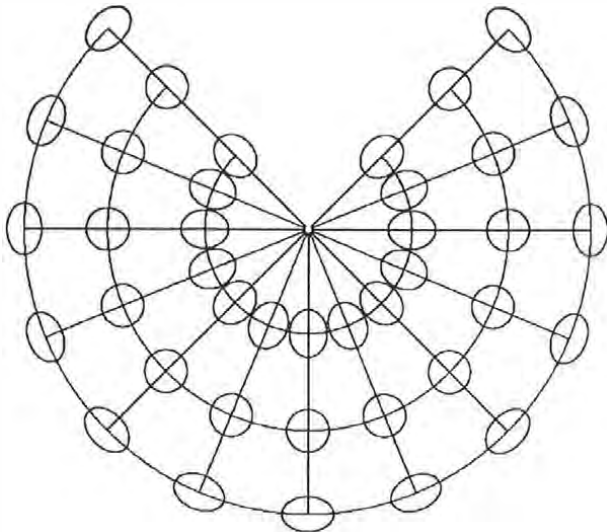


Abb. 5.4a: Lamberts flächentr. Kegelproj. I

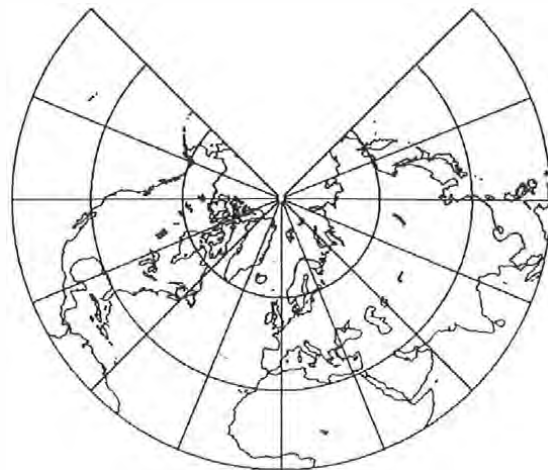


Abb. 5.4b: Lamberts flächentr. Kegelproj. I

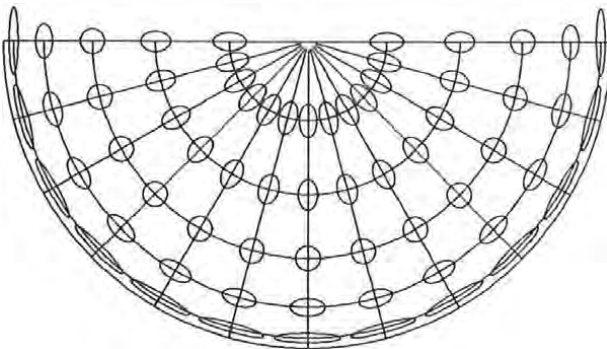


Abb. 5.5a: Lamberts flächentr. Kegelproj. II

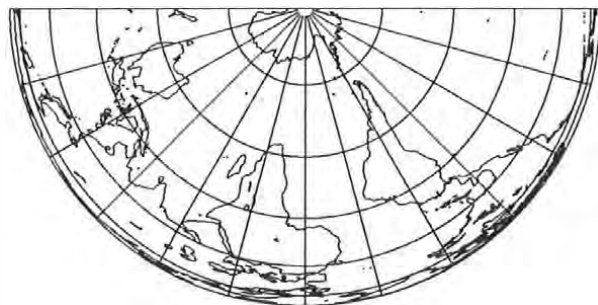


Abb. 5.5b: Lamberts flächentr. Kegelproj. II

In Abb. 5.5b wurde zur Abwechslung eine Weltkarte für die Menschen „down under“ konstruiert.

Flächentreue Kegelprojektion von Albers (1805)

Dies ist eine Modifikation des Kegelentwurfs mit zwei längentreuen Parallelen (längentreu heißt hier von gleicher Länge wie die entsprechenden Kugelparallelen). Nun kann man für diese beiden Parallelkreise auch gleiche maximale Streckenverzerrung fordern, diese liegen aber in verschiedenen Richtungen, die eine in Richtung Meridian, die andere in Richtung Parallel. Es läßt sich selbstverständlich kein n ermitteln, das zwei absolut streckentreue Parallelkreise liefert, denn es kann ja nicht gleichzeitig $\sqrt{n}/\cos(p_1/2)=1$ und $\sqrt{n}/\cos(p_2/2)=1$ gelten. Der Entwurf mit den geforderten Eigenschaften muß völlig neu entwickelt werden. Die längeren Ausführungen würden hier zu weit führen, sie können in der Literatur nachgelesen werden, z. B. in [Zöppez; Bludau, 1912]. Hier ist es günstiger wieder auf geographische Breite überzugehen [Snyder, 1989]. Die Abbildungsgleichungen sind dann ($\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$):

$$\begin{aligned} n &= (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)/2, & c &= \cos^2 \varphi_1 + 2n \sin \varphi_1, \\ r &= \sqrt{c - 2n \sin \varphi}/n, & \vartheta &= n \cdot \lambda. \end{aligned} \quad (5.9)$$

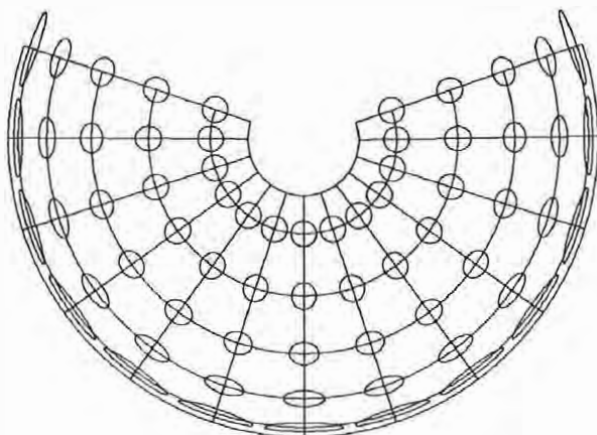


Abb. 5.6a: Albers' Kegelstumpfprojektion

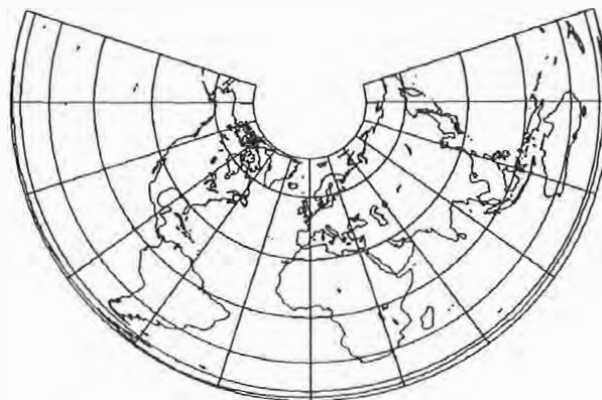


Abb. 5.6b: Albers' Kegelstumpfprojektion

Äquidistante Kegelprojektion von Ptolemäus (100 n. Chr.), aphyllaktisch

$$r = \tan p_0 - (p_0 - p), \quad \vartheta = \lambda \cos p_0. \tag{5.10}$$

Auf eine graphische Darstellung wird verzichtet, da diese sich praktisch nicht von der folgenden Abbildung unterscheidet.

Mittabstandstreue Kegelprojektion (de l'Isle, 1745 ?), aphyllaktisch

$$\begin{aligned} n &= (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) / (\varphi_2 - \varphi_1), \\ r &= (\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2) / (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) - \varphi, \quad \vartheta = n \cdot \lambda. \end{aligned} \tag{5.10a}$$

In den Abb. 5.7a, b wurde $\varphi_1 = 20^\circ$ und $\varphi_2 = 60^\circ$ gesetzt.

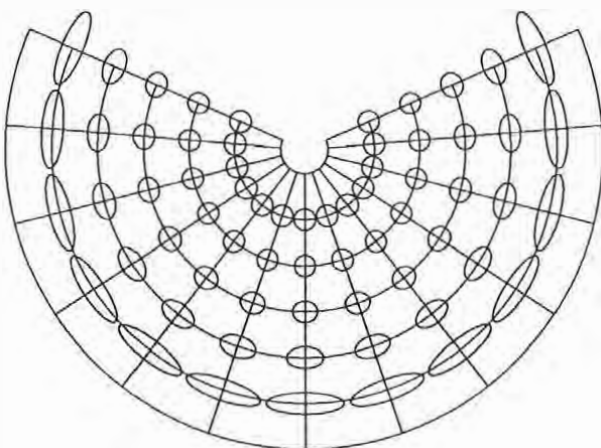


Abb. 5.7a: Mittabstandstr. Kegelproj.

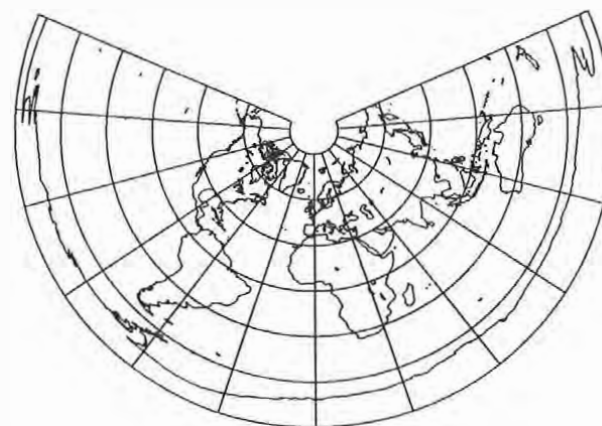


Abb. 5.7b: Mittabstandstr. Kegelproj.

Mittabstandstreue Kegelprojektion von Mendelejev (1907), aphyllaktisch

$$r = \pi/2 - \varphi, \quad \vartheta = \lambda \cos \varphi_0 / (\pi/2 - \varphi_0). \tag{5.11}$$

Durch Wahl von φ_0 läßt sich das Aussehen des Netzentwurfes erheblich verändern. In den Abb. 5.8a, b wurde $\varphi_0 = 20^\circ$ gesetzt.

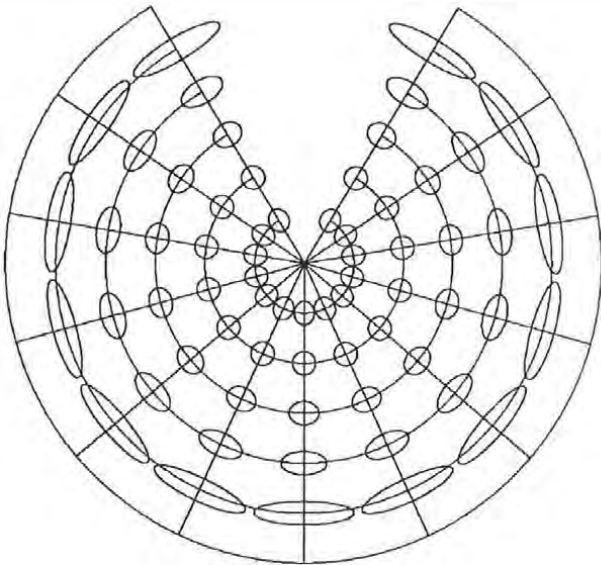


Abb. 5.8a: Entwurf von Mendelejev

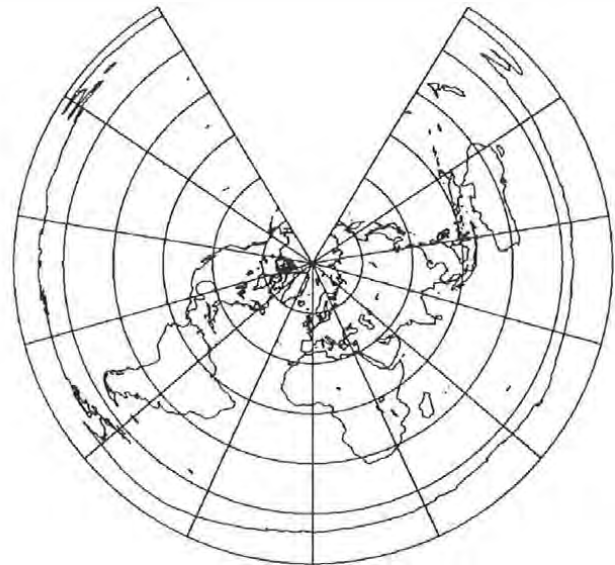


Abb. 5.8b: Entwurf von Mendelejev

5.2 Polykonische Projektionen

Eine echte Kegelprojektion hat nördlich und südlich des Berührparallels sehr geringe Verzerrungen. Hat man aber einen größeren Bereich abzubilden, kann man die rasch anwachsenden Verzerrungen klein halten, wenn man nicht auf einen, sondern auf mehrere aufeinanderfolgende Kegel abbildet. Nachteilig ist dabei, daß sich die Abbildungen entlang der Grenzparallelen nicht lückenlos aneinanderfügen lassen. Diesem Mangel kann abgeholfen werden, wenn nicht auf mehrere diskrete Kegel abgebildet wird, sondern auf eine (unendliche) Vielzahl von Kegeln, indem man für jede differenzielle Parallelkreiszone den ihr zukommenden Berührkegel benützt. Der Übergang von einem Kegel zum nächsten erfolgt also nicht sprunghaft, sondern stetig; die Spitze der Kegel bewegt sich kontinuierlich auf der Achse. Eine solche Abbildung heißt polykonisch. Der Abb. 5.9 entnimmt man:

$$(5.12)$$

$$r(p) = \tan p, \quad s(p) = \sec p, \quad \vartheta = \lambda \cos p.$$

Das ist an sich schon die einfachste polykonische Abbildung. Legt man den Ursprung in den Schnittpunkt von Berührparallel und Hauptmeridian, so sind die cartesischen Koordinaten:

$$x = r(p) \sin \vartheta, \quad y = r(p) - r(p) \cos \vartheta. \quad (5.13)$$

Das ergibt aber für jeden Parallel einen anderen Ursprung. Deshalb wird dieser in den Äquator verlegt, indem man den Abstand zwischen Parallel und Äquator, d. i. die Breite φ , addiert. Zusammen mit Gl. 5.12 und bei Wechsel von p zu φ erhält man:

$$x = \cot \varphi \sin(\lambda \sin \varphi), \quad y = \varphi + \cot \varphi \{1 - \cos(\lambda \sin \varphi)\} = \varphi + 2 \cot \varphi \sin^2 \{(\lambda \sin \varphi)/2\}. \quad (5.14)$$

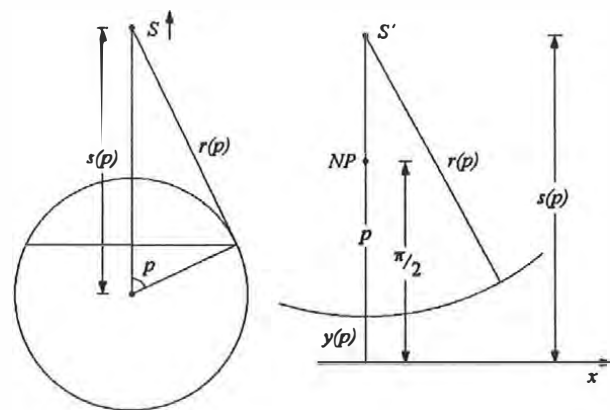


Abb. 5.9: Polykegel

Diese Ausdrücke werden für $\varphi = 0$ unbestimmt, sie streben aber den Grenzwerten $x = \lambda$, $y = 0$ zu. Abb. 5.10a, b zeigen diesen aphyllaktischen Entwurf.

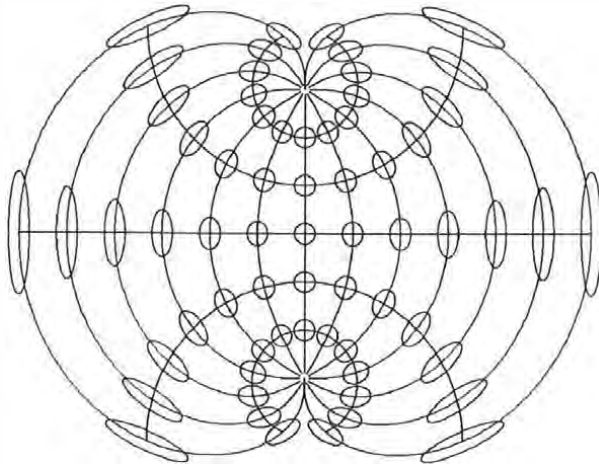


Abb. 5.10a: Polykonische Projektion

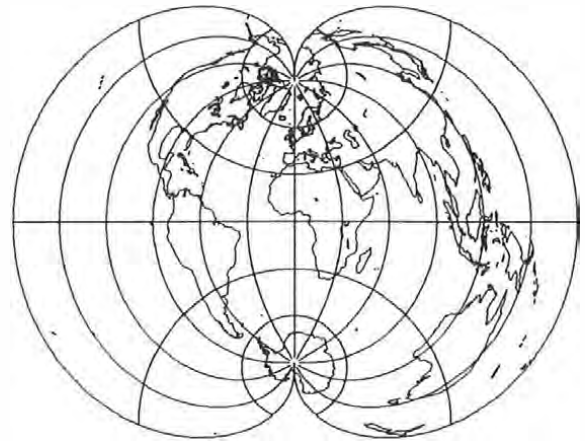


Abb. 5.10b: Polykonische Projektion

Die Bilder der Parallelkreise sind Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten, die Bilder der Meridiane irgendwelche Kurven. Das Netzbild kann so abgeändert werden, daß Meridiane und Parallele ein orthogonales System bilden und auch Konformität erreicht wird. Ein Beispiel ist die

Konforme polykonische Projektion von Eisenlohr (1870)

Die Herleitung der verwickelten Abbildungsgleichungen würde zu weit führe, sie kann in der Literatur nachvollzogen werden, z. B. in [Fiala, 1957], [Snyder, 1989].

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sqrt{2\cos\varphi}, & C_2 &= \sin(\lambda/2) + \cos(\lambda/2), & C_3 &= \cos(\lambda/2) - \sin(\lambda/2), \\
 C_4 &= \sin(\varphi/2) / \{(\cos(\varphi/2) + \cos(\lambda/2)) C_1\}, & C_5 &= \sqrt{2/C_4^2}, \\
 C_6 &= \sqrt{\{\cos(\varphi/2) + C_1 C_2/2\} / \{\cos(\varphi/2) + C_1 C_3/2\}}, \\
 x &= -2\ln C_6 + C_5(C_6 - 1/C_6), & y &= -2\arctan C_4 + C_4 C_5(C_6 + 1/C_6).
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

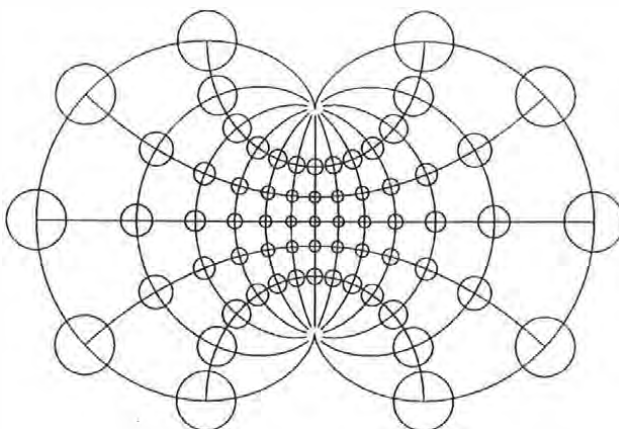


Abb. 5.11a: Konf. Entwurf von Eisenlohr

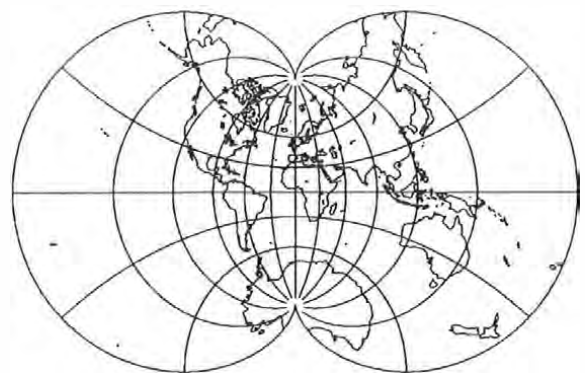


Abb. 5.11b: Polykon. Entwurf von Eisenlohr

Der x , y gemeinsame Multiplikator $(3+\sqrt{8})$ wurde ignoriert. Nahezu gleich im Aussehen, nur in x -Richtung leicht gestaucht, deshalb nicht gezeigt, ist die

Polykonische konforme Projektion von August (1874), in [Snyder, 1989] „epizykloidische“ Projektion genannt.

$$C_1 = \sqrt{1 - \tan^2(\varphi/2)}, \quad C_2 = 1 + C_1 \cos(\lambda/2), \quad C_3 = \sin(\lambda/2)C_1/C_2, \quad C_4 = \tan(\varphi/2)/C_2, \quad (5.16)$$

$$x = C_3(3 + C_3^2 - 3C_4^2)/3, \quad y = C_4(3 + 3C_3^2 - C_4^2)/3.$$

Aphylaktische Variante einer polykonischen Projektion von Bretterbauer

$$\vartheta = 2 \arctan\{(\lambda/2)\sin(2\varphi)\}, \quad (5.17)$$

$$x = \cot \varphi \cdot \sin \vartheta, \quad y = 2\{\varphi + \cos \varphi(1 - \cos \vartheta)\}.$$

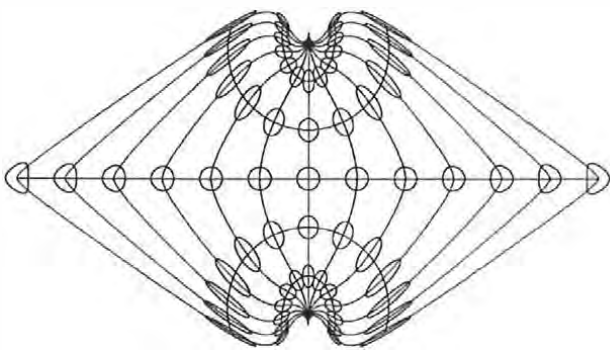


Abb. 5.12a: Aphylakt. polykon. Entwurf

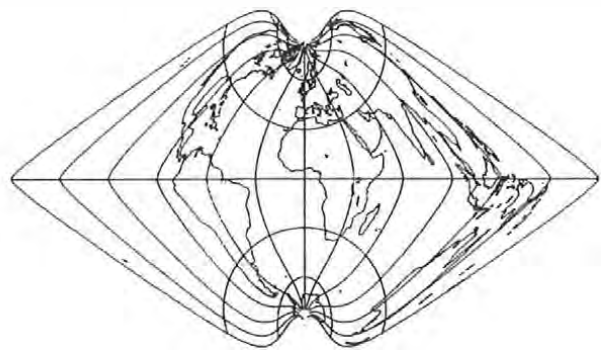


Abb. 5.12b: Polykonische Variante

Konforme polykonische Projektion von Lambert (1772) bzw. Lagrange (1779)

$$C_1 = \sqrt[4]{1 + \sin \varphi / 1 - \sin \varphi}, \quad C_2 = (C_1 + 1/C_1)/2 + \cos(\lambda/2), \quad (5.18)$$

$$x = 2\sin(\lambda/2)/C_2, \quad y = (C_1 - 1/C_1)/C_2.$$

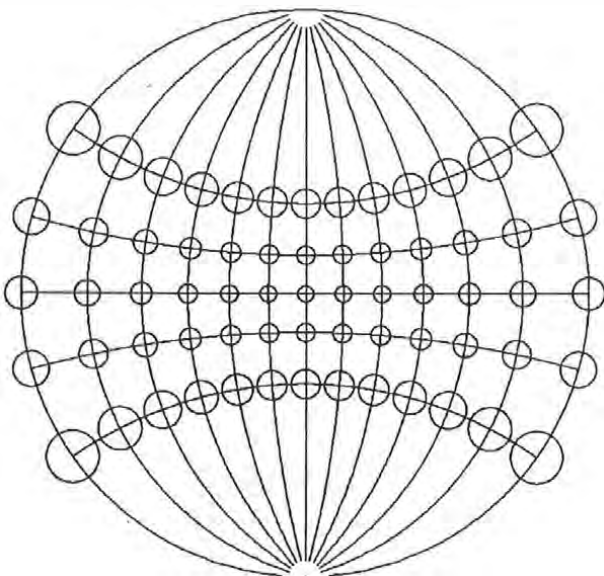


Abb. 5.13a: Polyk. Proj. von Lagrange



Abb. 5.13b: Lambert-Lagrange

Man beachte die starke Verzerrung des Antarktischen Kontinents.

5.3 Unechte Kegelprojektionen (pseudokonische Projektionen)

Wie schon bei den Zylinderprojektionen ist nun auch bei den kegeligen Entwürfen die Größe n keine Konstante, sondern eine Funktion der Poldistanz bzw. der Breite. Die allgemeinen Abbildungsgleichungen der halbkonischen Projektionen sind daher:

$$r = r(p), \quad \vartheta = \lambda \cdot f(p). \tag{5.19}$$

Die Parallelkreise sind nach wie vor konzentrische Kreise, die Meridianbilder aber beliebige Kurven, Orthogonalität und somit Konformität ist ausgeschlossen. Äquivalente Entwürfe sind möglich. In diesem Falle aber fällt das Polbild nicht mehr in die Spitze des Kegels. Man entnimmt der Figur die Beziehungen:

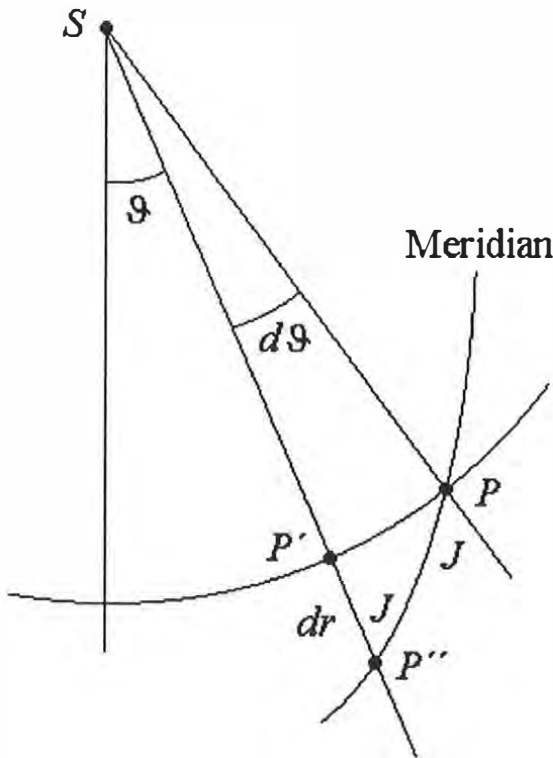


Abb. 5.15: Unechte Kegelprojektion

$$\tan J = r \cdot d\vartheta/dr = \frac{r \cdot d\vartheta/dp}{dr/dp}.$$

Da $J \neq 0$, ist auch $d\vartheta/dp \neq 0$. Die Streckenverzerrungen in Parallel und Meridian sind:

$$k = d\bar{s}_p/ds_p = (r \sin p) \cdot d\vartheta/d\lambda,$$

$$h = d\bar{s}_m/ds_m = P'P''/dp = \sec J \cdot dr/dp.$$

Die Flächenverzerrung ist:

$$\sigma = hk \cos J = dr/dp \cdot (r/\sin p) \cdot d\vartheta/d\lambda.$$

Soll Flächentreue erreicht werden, muß $\sigma = 1$ sein, also:

$$d\vartheta/d\lambda = \sin p \cdot dp/r \cdot dr = f(p).$$

Hat man also eine der Funktionen $r(p)$ oder $f(p)$ vorgegeben, kann die andere aus der Äquivalenzbedingung ermittelt werden.

Gegeben sei $f(p)$; dann ist:

$$f(p) = \sin p/(r \cdot dr/dp), \quad r \cdot dr = (\sin p/f(p)) \cdot dp, \quad \text{und integriert:}$$

$$(r^2 - r_p^2)/2 = \int_0^p [\sin p/f(p)] \cdot dp, \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{r_p^2 + 2 \int_0^p [\sin p/f(p)] \cdot dp}. \tag{5.20}$$

Das ist das Halbmessergesetz für die Parallelkreisbilder flächentreuer unechter Kegelprojektionen; r_p ist dabei der Radius des Polbildes für $p = 0$. Es können zwei Fälle unterschieden werden:

- a) gegeben $r = r(p)$, daraus folgt: $\vartheta = \lambda \sin p/(r \cdot dr/dp)$,
- b) gegeben $\vartheta = \lambda \cdot f(p)$, daraus folgt r nach Gl. 5.20.

Die erste flächentreue unechte Kegelprojektion wurde aus der Forderung nach Streckentreue in den Parallelkreisen ($k = 1$) entwickelt. Es ist dies der

Entwurf von Rigobert Bonne (1752)

Die Forderung nach Streckentreue in den Parallelen bedingt ihre Äquidistanz. Aber Achtung! Dies ist nicht gleichbedeutend mit Streckentreue in den Meridianen, denn deren Bilder sind ja nicht orthogonal zu den Parallelkreisen. Der Hauptpunkt der Abbildung wird in den Zentralmeridian in die Poldistanz p_0 gelegt. Die Abbildungsgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} C &= \tan p_0 - p_0, \\ x &= (C + p) \sin\{\lambda \sin p / (C + p)\}, \quad y = (C + p) \cos\{\lambda \sin p / (C + p)\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

je nach Lage des Hauptpunktes treten ganz verschiedene Formen auf. Im allgemeinen hat die Abbildung annähernd Herzform. Läßt man den Hauptpunkt in den Pol rücken, so entsteht die **Projektion von Stab-Werner**, legt man ihn in den Äquator entsteht die schon besprochene **Sinusoidalprojektion von Sanson**. *Abb. 5.16a, b* sind für die Hauptpunkts-Poldistanz $p_0 = 40^\circ$ gezeichnet. Übrigens wurde der Entwurf lange benützt, ohne daß seine Flächentreue bekannt war. Diese wurde von Albers entdeckt und von Mollweide mathematisch bewiesen.

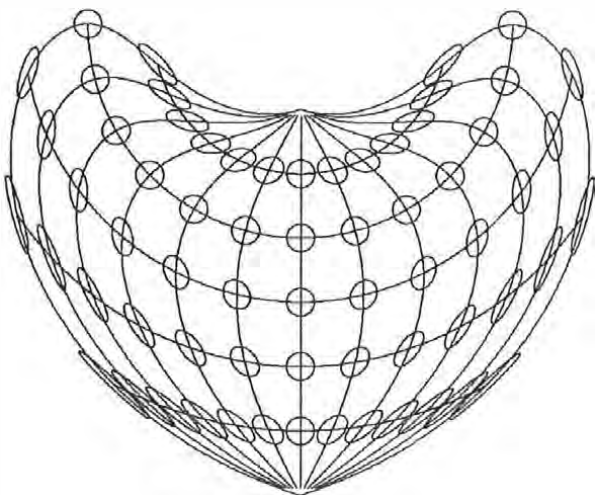


Abb. 5.16a: Flächentreue Proj. von Bonne

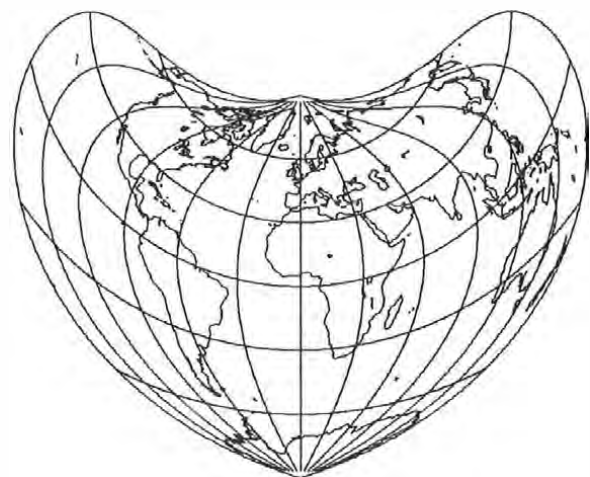


Abb. 5.16b: Bonne, $p_0 = 60^\circ$

Flächentreue halbkonische Projektion von Stab-Werner (1500 bzw. 1514)

Der Entwurf wurde von dem Wiener Mathematiker Stöberer entwickelt und von Werner verwicklicht. Die Abbildung entsteht, indem man im Entwurf von Bonne den Hauptpunkt in den Pol rücken läßt. Damit geht der Kegel in die Tangentialebene über. Der Entwurf kann also auch als unechte Azimutalprojektion bezeichnet werden. Die Abbildungsgleichungen lauten:

$$x = p \sin\{(\lambda/p) \sin p\}, \quad y = p \cos\{(\lambda/p) \sin p\}. \quad (5.22)$$

Das Gradnetz nimmt nun echte Herzform an (*Abb. 5.17a, b*).



Abb. 5.17a: Entwurf von Stab-Werner

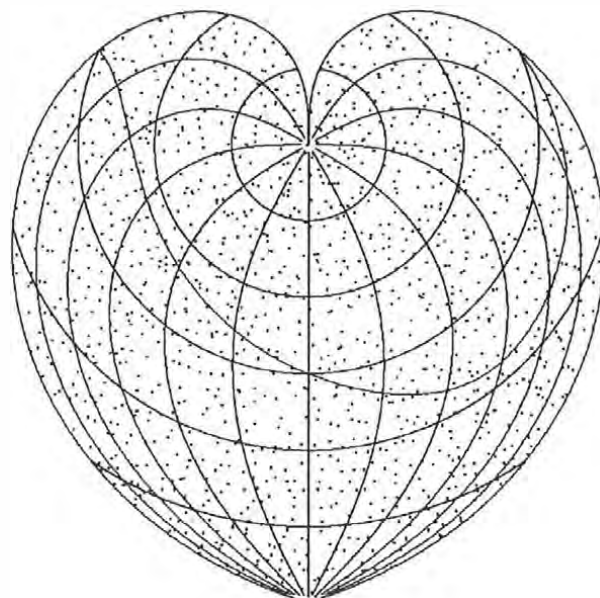


Abb. 5.17b: Sterne und Ekliptik

Das sind im wesentlichen die bekannten unechten Kegelentwürfe.

In der Fachliteratur werden auch noch andere Entwürfe unter die pseusokonischen eingereiht, z. B. die von **Mollweide** [Hoschek, 1984]. In [Wagner, 1962] werden mehrere Projektionen als „nichtkegelig“ bezeichnet, z. B. die unechten Zylinderprojektionen oder die Globularprojektionen. Wie schon in der Vorbemerkung angesprochen, ist die Einteilung der Kartennetzentwürfe gar nicht eindeutig möglich und auch nicht von großer Bedeutung.

oooo00000oooo

Kapitel 6

Konventionelle Projektionen

In diesem Kapitel werden alle Entwürfe untergebracht, deren Einordnung in eine der früheren Kategorien zweifelhaft ist, oder wo eben eine willkürliche Konstruktionsvorschrift vorliegt. Sicher, heute erkennt man aufgrund der Abbildungsgleichungen den Charakter der Quadratischen Plattkarte als echte Zylinderprojektion, aber davon wußte Marinus von Tyros noch nichts. Auch die sogenannten Globularprojektionen werden heute teils als pseudo-azimutal, teils als pseudokonisch bezeichnet. Ihre Entwickler aber hatten nichts anderes als eine möglichst einfache Konstruktionsvorschrift im Sinn. Es gibt unter den konventionellen ebenfalls konforme und aphyllaktische Entwürfe, weniger äquivalente. Auf die Einteilung in diese Unter-kapitel wurde verzichtet, die Entwürfe werden einfach kunterbunt vorgestellt.

6.1 Globularprojektionen

Sie bilden eine Hemisphäre in einen Kreis ab, das Netzbild sieht bei allen mehr oder minder gleich aus.

Entwurf von Apianus I (recte Bienewitz, 16. Jhdt)

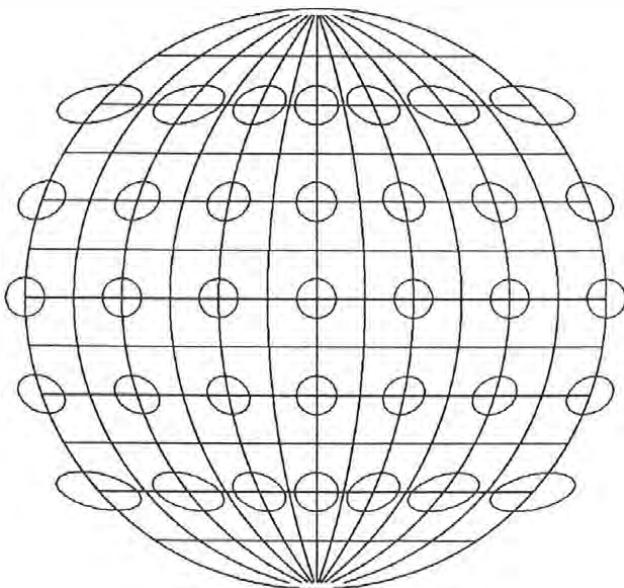


Abb. 6.1: Entwurf von Apian, $15^\circ \times 15^\circ$



Abb. 6.1b: Entwurf von Apian, $30^\circ \times 30^\circ$

Äquator und Hauptmeridian werden in wahrer Größe als x - bzw. y -Achse dargestellt, der Meridian $\pm 90^\circ$ bildet den Grenzkreis der Abbildung. Die Parallelkreisbilder sind äquidistante Parallele zur x -Achse, die Meridianbilder sind Kreisbögen. Wird der Äquator ebenfalls äquidistant geteilt, so ist ein bestimmter Meridian als Kreis durch die beiden Pole und seinem entsprechenden Äquatorpunkt

eindeutig definiert. Die Abbildung ist aphyllaktisch. Die Sache läßt sich in folgende Abbildungsgleichungen bringen:

$$y = \varphi, \quad C = (\pi/2)^2 / |\lambda| + |\lambda|/2, \quad x = \pm \left\{ |\lambda| - C + \sqrt{C^2 - y^2} \right\}. \quad (6.1)$$

Aphyllaktischer Entwurf von Apian II

Diese Projektion gehört eindeutig zu den unechten Zylinderprojektionen, wird aber ihres Autors wegen hier gebracht. Sie unterscheidet sich auch nur wenig von verwandten Entwürfen. Die Abbildungsgleichungen sind denkbar einfach:

$$x = \lambda \cos(2\varphi/\pi), \quad y = (\pi/2) \sin(2\varphi/\pi). \quad (6.1a)$$

Zur Abwechslung werden in diesem Entwurf wieder alle Sterne bis mag. 6 und die Ekliptik, sowie die Kontinentumrisse für die Leute „down under“ gezeigt.

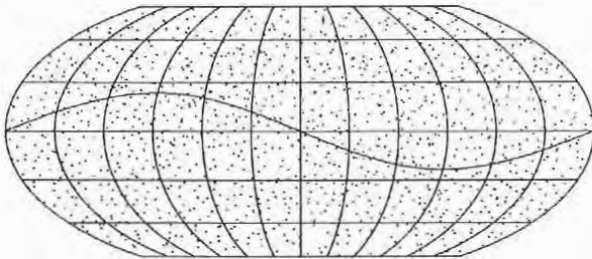


Abb. 6.2a: Apian, Sterne und Ekliptik



Abb. 6.2b: Weltkarte für „down under“

Projektion von Bacon (1265)

$$y = (\pi/2) \sin \varphi, \quad C = (\pi/2)^2 / |\lambda| + |\lambda|/2, \quad x = \pm \left\{ |\lambda| - C + \sqrt{C^2 - y^2} \right\}. \quad (6.2)$$

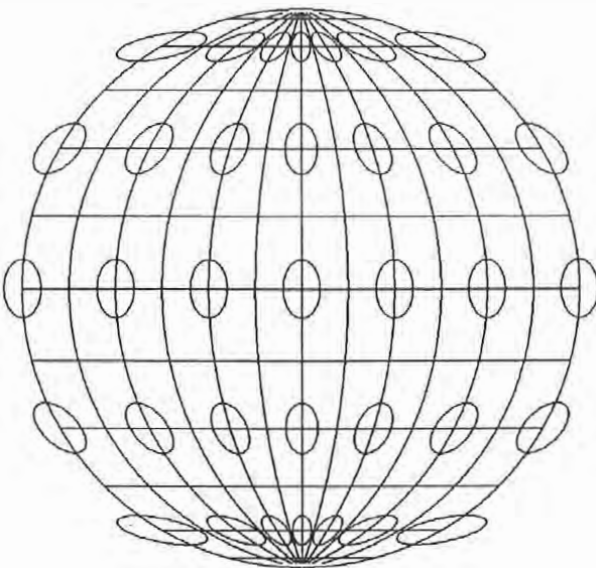


Abb. 6.3a: Bacon, 15°×15°



Abb. 6.3b: Globularproj. von Bacon

Entwurf von Nicolosi-Arrowsmith (1660)

Äquator, Grenzkreis und Meridiane wie bei Apian. Die Parallelkreisbilder sind ebenfalls Kreise. Zu ihrer Konstruktion werden Grenz- und Hauptmeridian äquidistant geteilt und die drei entsprechenden Punkte eines Parallels definieren den Kreis. Ein Bildpunkt wird also aus dem Schnitt zweier Kreise gewonnen. Für Mathematiker bedeutet das die Lösung zweier quadratischer Gleichungen. Das wäre aber höchst unprofessionell. Die Vermessungskunde kennt dieses Problem als ebenen Bogenschnitt, bei dem keine quadratischen Gleichungen auftreten. Die tatsächlichen Abbildungsgleichungen sind weniger verwickelt als man annehmen mag. Zuzufolge der Konstruktionsvorschrift sind die Koordinaten der Punkte A, B, C, D bekannt. Der nebenstehenden Skizze entnimmt man dann für Mittelpunkt und Radius des Meridiankreises:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 2\lambda/\pi, & x_{M_L} &= (\pi/2)\cot(2\alpha), \\ r_L &= x_{M_L} + \lambda. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Völlig analog geht man zur Bestimmung von Mittelpunkt und Radius des Parallelkreises vor. Der Schnitt der beiden Kreise zur Festlegung von P erfolgt durch Auflösung des Dreiecks M_L-M_B-P , dessen drei Seiten bekannt sind. Auch diese Abbildung ist aphyllaktisch.

Ein Entwurf von ganz ähnlichem Aussehen, aber unterschiedlicher Konstruktionsvorschrift stammt von **Fournier** und wird übergangen.

Der folgende Entwurf von **van der Grinten** stellt das Gradnetz ebenfalls als Kreisscharen dar, paßt daher gut zu den Globularprojektionen. In der Literatur allerdings wird er, nicht ganz verständlich, als polykonisch eingestuft.

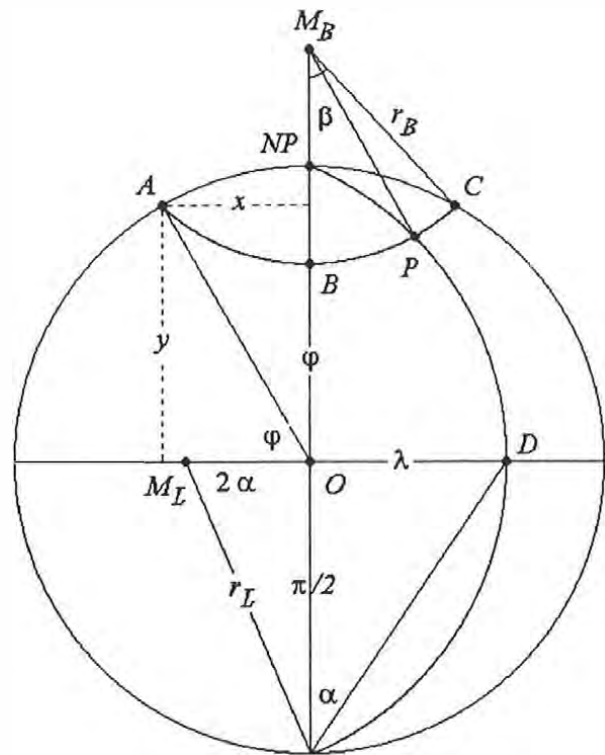


Abb. 6.4: Konstruktion der Bildkreise



Abb. 6.5: Entwurf von Nicolosi, 30° x 30°

Van der Grinten's aphyllaktischer Entwurf I (1904)

Van der Grinten bildet die ganze Erde in einen Kreis, oder in zwei sich teilweise überschneidende Kreise ab. In [Snyder, 1989] werden dazu langwierige Abbildungsgleichungen angegeben. Meridian- und Parallelkreisbilder sind abermals Kreise. Da die Abbildung also wieder auf die Bestimmung von Kreisschnittpunkten hinausläuft, ist es einfacher, die geometrische

Konstruktionsvorschrift zu studieren, die allerdings sehr verwickelt ist [Fiala, 1957]. Hat man sie aber erst durchdacht, kann man wie beim Entwurf von Nicolosi vorgehen.

Der Umkreis des Entwurfs hat den Radius π (bei $R = 1$), der Äquator wird also streckentreu abgebildet und äquidistant geteilt. Die Meridianbilder sind wie bei Apian oder Nicolosi die durch die Pole und die entsprechenden Äquatorpunkte definierten Kreise. Ein Parallelkreis der Breite φ ist ein Kreis mit dem Halbmesser r und dem Mittelpunkt M auf dem Zentralmeridian (= y -Achse).

Nun wird der Punkt F durch $y_F = \varphi^\circ/90^\circ = k$ festgelegt. Eine Normale auf die y -Achse durch F schneidet den Umkreis in den Punkten G, H . Verbinden von A mit H liefert D auf der y -Achse. Schnitt der Geraden $NP-B$ mit $G-H$ ergibt Punkt J . Gerade $A-J$ mit der y -Achse geschnitten, liefert K und die Normale auf y schließlich die gesuchten Punkte C und E . C, D, E definieren den Parallelkreis.

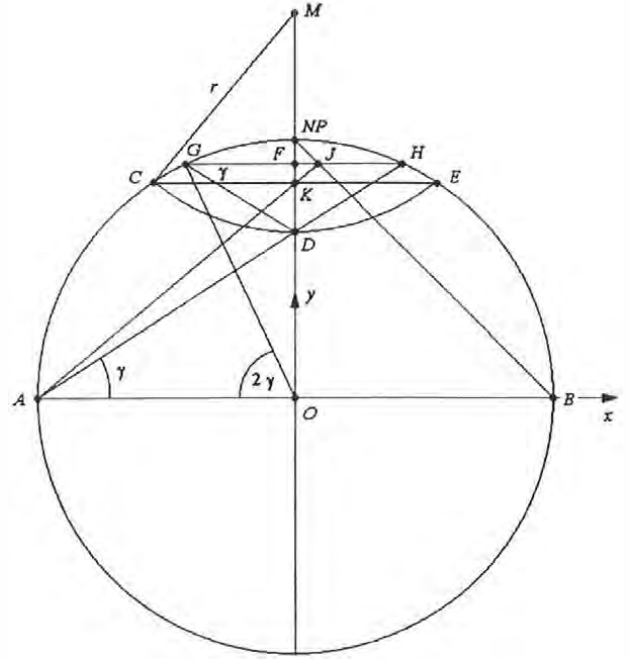


Abb. 6.6: Geometrie des Grinten-Entwurfs

$$\text{Es ist: } y_D = \pi \tan \gamma, \quad \sin 2\gamma = \frac{2 \tan \gamma}{1 + \tan^2 \gamma} = y_F = k, \quad \text{und daraus} \quad (6.4)$$

$$\tan^2 \gamma - (2/k) \tan \gamma + 1 = 0. \quad (6.4a)$$

$$\text{Mit (6.4) folgt daraus: } y_D = \pi \left\{ (1/k) - \sqrt{(1/k)^2 - 1} \right\}. \quad (6.4b)$$

$$\text{Weiters aus Dreieck } KCM: \quad (y_M - y_D)^2 = (y_M - y_C)^2 + x_C^2. \quad (6.4c)$$

Die Kreisgleichung ist: $x_C^2 = r^2 - y_C^2$, daher $(y_M - y_D)^2 = (y_M - y_C)^2 + r^2 - y_C^2$, oder:

$$y_M = \frac{r^2 - y_D^2}{2(y_C - y_D)}. \quad (6.4d)$$

Darin ist aber y_D noch unbekannt. Es sei $F-J = t$, $K-F = s$. Man bildet leicht:

$$t = r(1 - k), \quad s = \frac{r(1 - k)k}{2 - k}, \quad y_C = y_K = y_F - s = \frac{r\varphi^\circ}{180^\circ - \varphi^\circ}. \quad (6.4e)$$

Aus den Gleichungen (6.4), (6.4a) läßt sich ableiten: $\varphi^\circ = \frac{180^\circ r y_D}{r^2 + y_D^2}$, somit wird aus (6.4e):

$y_C = y_D / \left(1 - \frac{1}{r} y_D + \frac{2}{r} y_D^2 \right)$. Setzt man dies in (6.4d) ein, folgt nach einigen Manipulationen:

$$y_M = \frac{1}{2} \left(\frac{r^3}{y_D^2} + y_D \right), \quad r = y_M - y_D = \frac{1}{2} \left(\frac{r^3}{y_D^2} - y_D \right). \quad (6.5)$$

Damit sind Mittelpunkt und Radius des Breitenkreises bestimmt und man kann weiter wie bei Nicolosi vorgehen. Das Ergebnis zeigen die *Abb. 6.7a* und *b*.

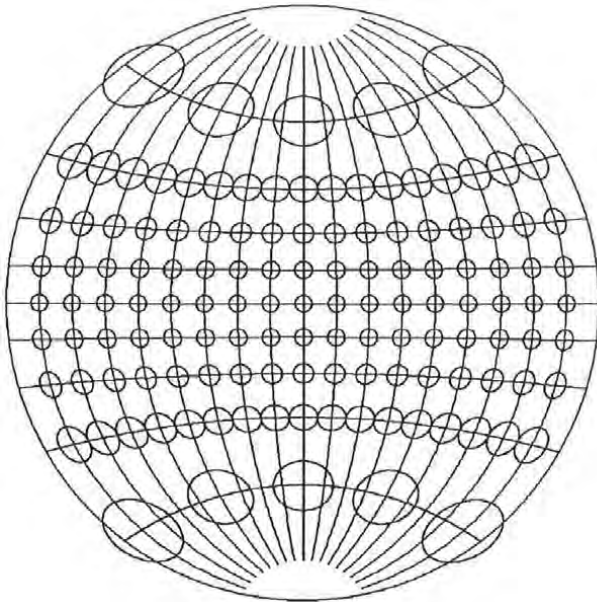


Abb. 6.7a: van der Grinten I, 20°×20°



Abb. 6.7b: Kontinente Grinten I, 20°×20°

Van der Grinten hat auch **Varianten** seines Entwurfes angegeben, z. B. einen mit Parallelkreisbildern als parallele Geraden (Abbildungsgleichungen werden übergangen).

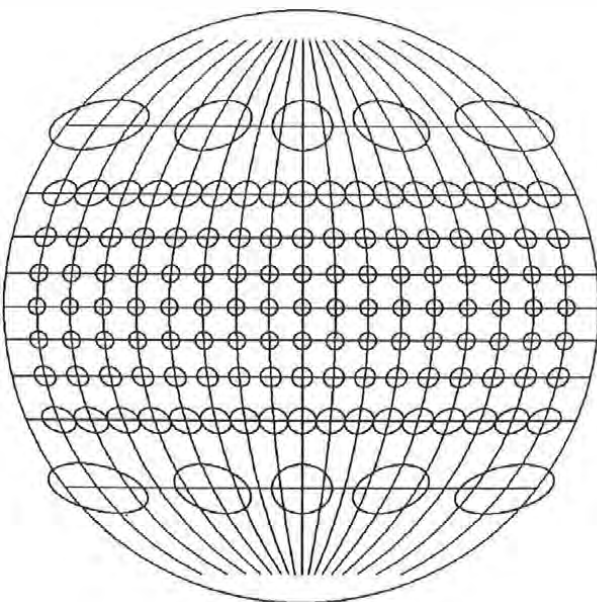


Abb. 6.8a: van der Grinten II, 20°×20°



Abb. 6.8b: Grinten II, Kontinente, 20°×20°

6.2 Retroazimutalprojektionen

Retroazimutalprojektion von Craig (1909), aphyllaktisch

Retroazimutalprojektionen haben die Eigenschaft, von jedem Punkt des Abbildungsgebietes aus das korrekte Azimut nach dem Hauptpunkt der Projektion zu zeigen.

$$x = \lambda, \quad y = \lambda \sin \varphi / \tan \lambda. \quad (6.6)$$

Achtung! In vielen dieser Abbildungsgleichungen treten Singularitäten auf. So bemerkt man, daß für $\lambda = 0$ die Formel für y in (6.6) versagt. Das gilt in anderen Formeln oft für $\varphi = \pi/2$, oder 0. In diesem Fall ist eine Grenzwertbestimmung erforderlich. Für Gl. (6.6) z. B. gilt:

$$\text{Wenn } \lambda = 0, \text{ dann ist } x = 0, \quad y = \sin \varphi.$$

Es kann angenommen werden, daß verständige Leser diese Probleme kennen und sie zu meistern wissen. Deshalb wurde auf die explizite Angabe solcher Grenzwerte in den Formeln verzichtet.

Eine besondere Auslegung hat dieser retroazimutale Entwurf von **Craig** in Form der Mekka-Projektion erfahren, die speziell für Moslems entwickelt wurde, um diesen ihre religiösen Pflichten zu erleichtern. Ein schönes Beispiel für die Nützlichkeit der kartographischen Wissenschaft.

Mekka-Projektion von Craig (1909), aphyllaktisch

Craig hat als Hauptpunkt Mekka (M) gewählt ($\varphi_0 = 21^\circ 27'$, $\lambda_0 = 39^\circ 49'$ ö. Gr.), sodaß jeder Moslem im abgebildeten Gebiet die Richtung nach Mekka für die Gebetsverrichtung bestimmen kann.

$$x = (\lambda - \lambda_0), \quad y = (\lambda - \lambda_0)(\sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) - \cos \varphi \tan \varphi_0) / \sin(\lambda - \lambda_0). \quad (6.7)$$

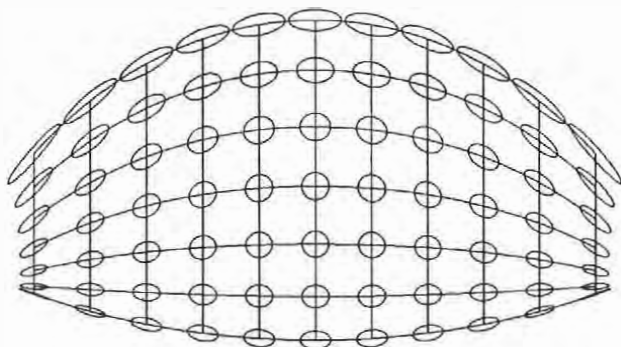


Abb. 6.10a: Mekkaproj. von Craig

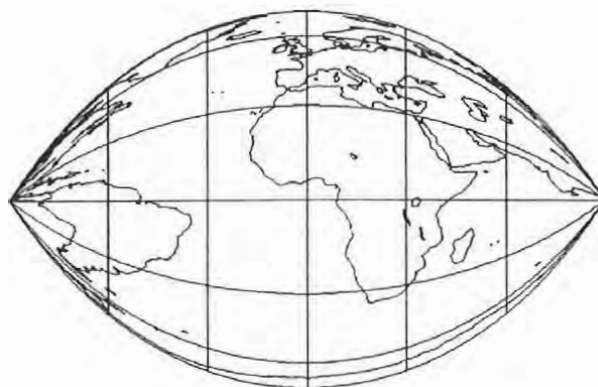


Abb. 6.9: Retroazimutalprojektion

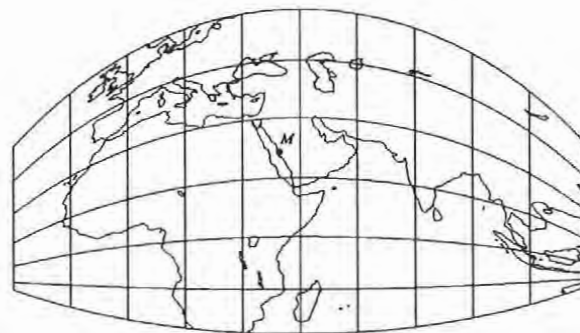


Abb. 6.10b: Mekkaprojektion, $15^\circ \times 15^\circ$

Retroazimutalprojektion von Hammer

Von jedem Punkt der Abbildung aus erscheint der Winkel, den eine Gerade zum Hauptpunkt mit einer Vertikalen einschließt, in wahrer Größe. Übrigens werden in einigen Werken der Literatur diese retroazimutalen Projektionen als „modified azimuthal“, also unecht azimutal bezeichnet. Dennoch wurden sie hier nicht in die Gruppe der Azimutalprojektionen aufgenommen, weil sie deren Kriterien nicht streng erfüllen und auch ziemlich konstruiert erscheinen.

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda, & C &= z / \sin z, \\ x &= C \cdot \cos \varphi_0 \sin \lambda, & y &= -C (\sin \varphi_0 \cos \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi \cos \lambda). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die Lage des Hauptpunktes in den *Abb. 6.11a, b* ist: $\varphi_0 = 40^\circ$, $\lambda_0 = 0$. Die Abbildung besteht aus zwei Hälften, die jeweils eine Hemisphäre abbilden.

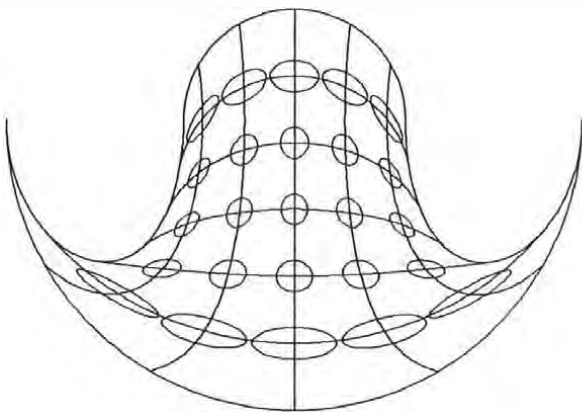


Abb. 6.11a: Retroazimutalproj. von Hammer

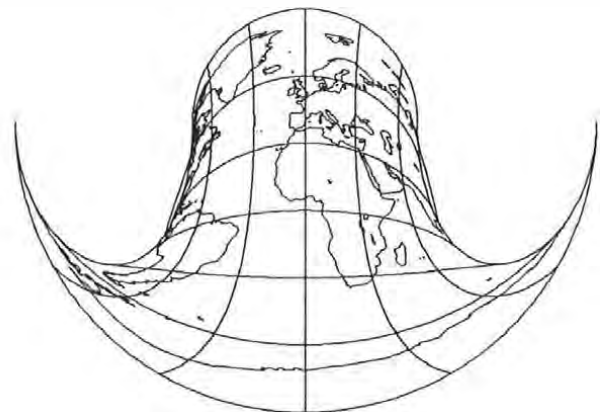


Abb. 6.11b: Hammer, Retroazimutalproj.

Die zweite Hemisphäre sieht völlig anders aus und hat auch andere Verzerrungseigenschaften.

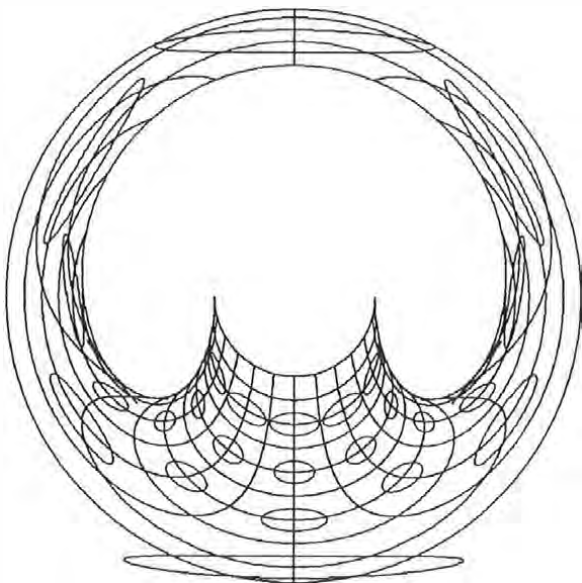


Abb. 6.12a: Hammer, 15°x15°

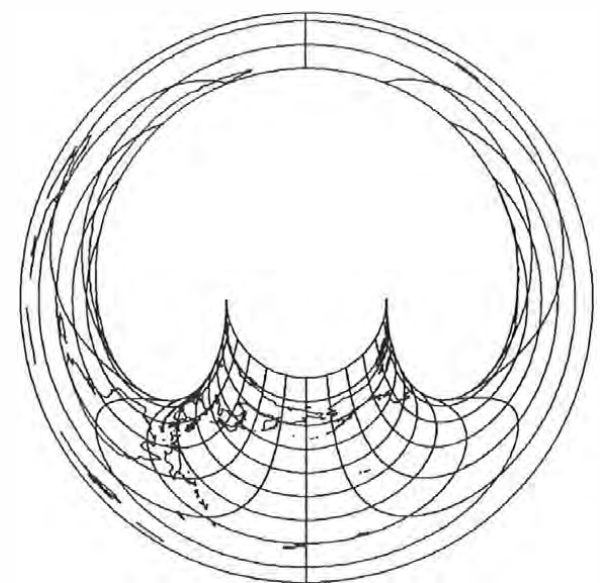


Abb. 6.12b: Kontinente der zweiten Hemisph.

Der Zentralmeridian der *Abb. 6.11b* ist der von Greenwich, jener von *Abb. 6.12b* der 180°-Meridian. Dort sind leider sehr wenige Landmassen; man erkennt aber Kamtschatka und die Aleuten. Die Verzerrungen sind stark.

6.3 Flächentreue und konforme konventionelle Projektionen

Flächentreuer Entwurf von Hojovec (1984)

$$x = \frac{\lambda \cos \varphi}{k_1 + k_2 \varphi^2}, \quad y = k_1 \cdot \varphi + \frac{k_2}{3} \varphi^3, \quad k_1, k_2 = \text{Konstante.} \quad (6.9)$$

Diese Projektion ähnelt sehr einer von Tobler (Abb. 6.15a, b). Ihre Form kann durch Variation der Konstanten stark verändert werden. In den Abb. 6.13a, b wurde $k_1 = k_2 = 1$ gesetzt.

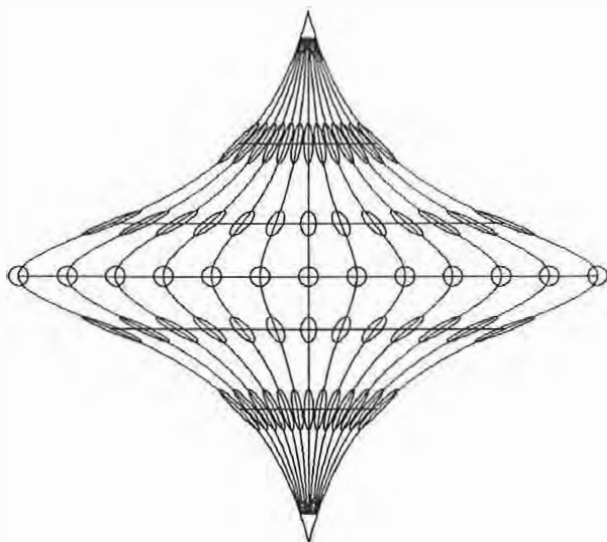


Abb. 6.13a: Flächentr. Proj. von Hojovec

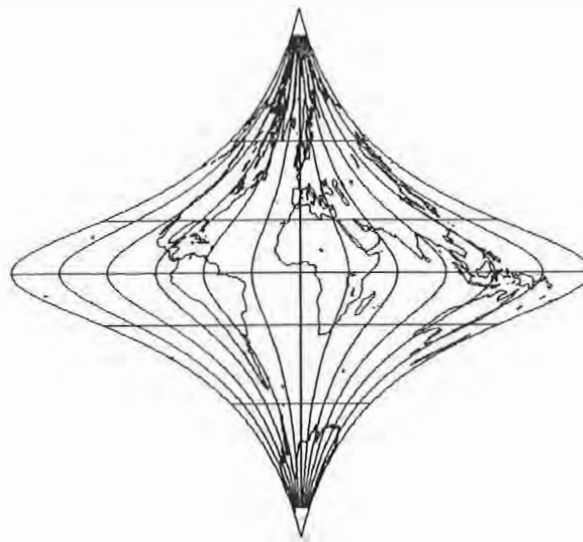


Abb. 6.13b: Kontinentumrisse Proj. Hojovec

Eine ganze Reihe von interessanten Entwürfen hat **W. Tobler** angegeben.

Flächentreuer Entwurf von Tobler I

Die Abbildungsvorschrift lautet: Mit Startwert $y = 1$, iteriere bis $y = z$:

$$z = \sin(|\varphi|) / (1 - 0.54433 \cdot \sqrt{y} + y/12),$$

$$x = \lambda (\sqrt{6} - \sqrt{y})^2, \quad y = 2z \cdot \text{sgn}(\varphi). \quad (6.10)$$

Indikatrizen werden nicht gezeigt, da das Bild sehr verwirrend ist.

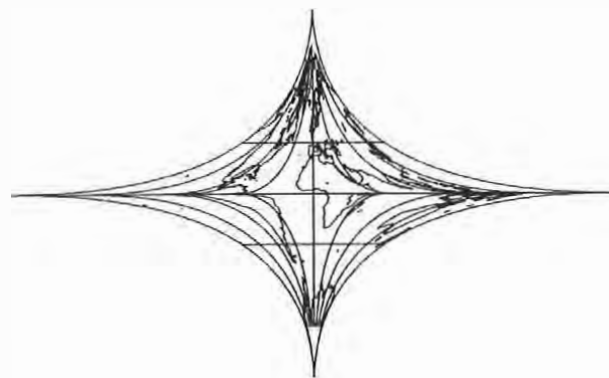


Abb. 6.14: Entwurf von Tobler II

Hier darf man nach der Sinnhaftigkeit einer Weltkarte vom Aussehen wie Abb. 6.14 fragen. Ihre Herleitung entsprang offensichtlich der intellektuellen Herausforderung, aus der Differentialgleichung für äquivalente Projektionen, eine weitere Lösung zu finden.

Flächentreuer Entwurf von Tobler II

Diese Projektion wurde von [Tobler, 1978] aus der Mercatorprojektion entwickelt.

$$x = \lambda \cos^2 \varphi, \quad y = \ln \tan(\pi/4 + \varphi/2). \quad (6.11)$$

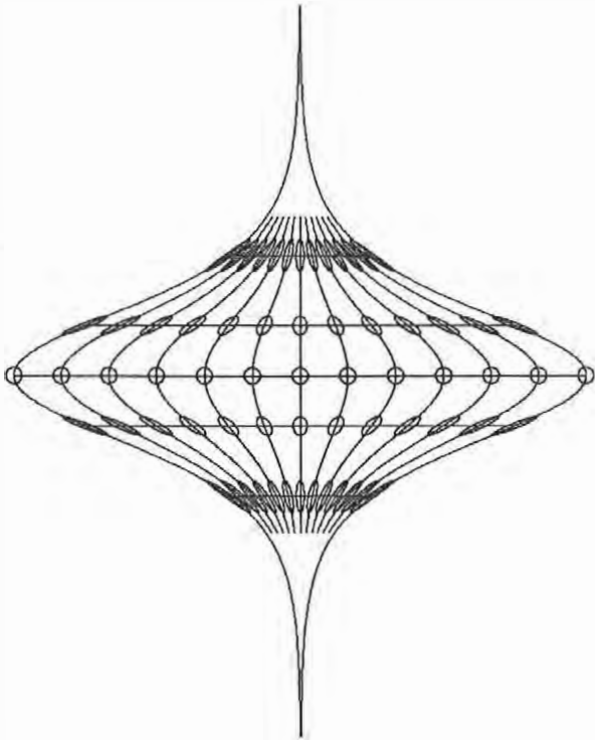


Abb. 6.15a: Tobler II, flächentreu

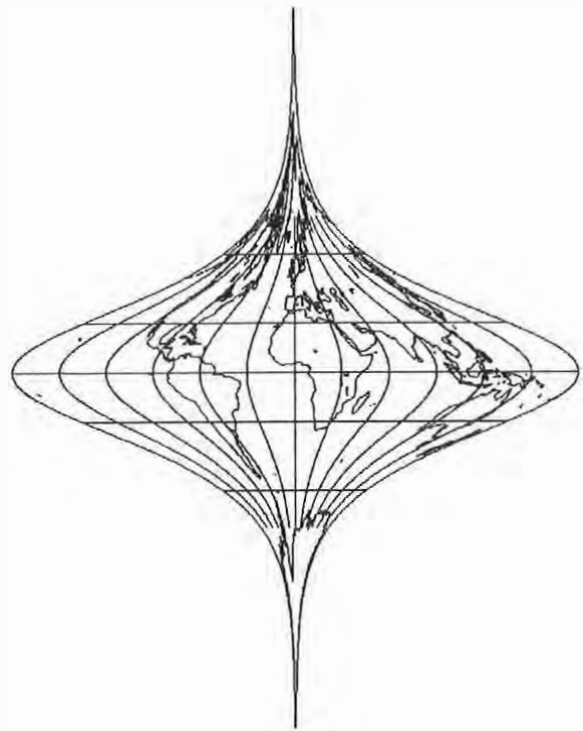


Abb. 6.15b: Tobler II

Flächentreuer Entwurf von Tobler III

$$x = \sqrt{\pi/2 - \varphi} \cdot \sin(\lambda \cdot \cos \varphi), \quad y = \sqrt{\pi/2 - \varphi} \cdot \cos(\lambda \cdot \cos \varphi). \quad (6.12)$$

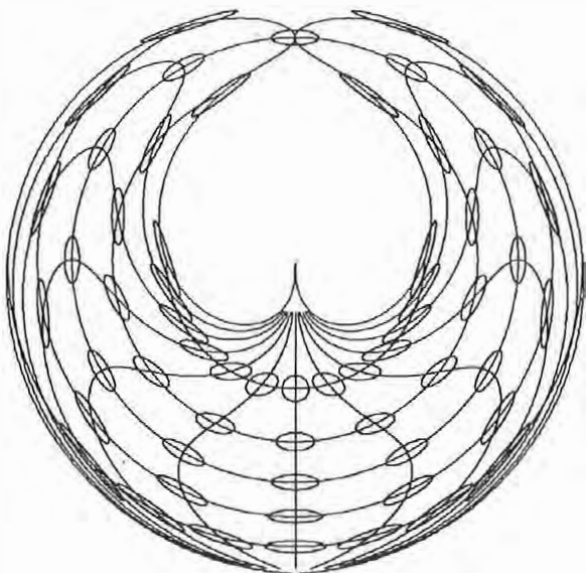


Abb. 6.16a: Entwurf von Tobler III

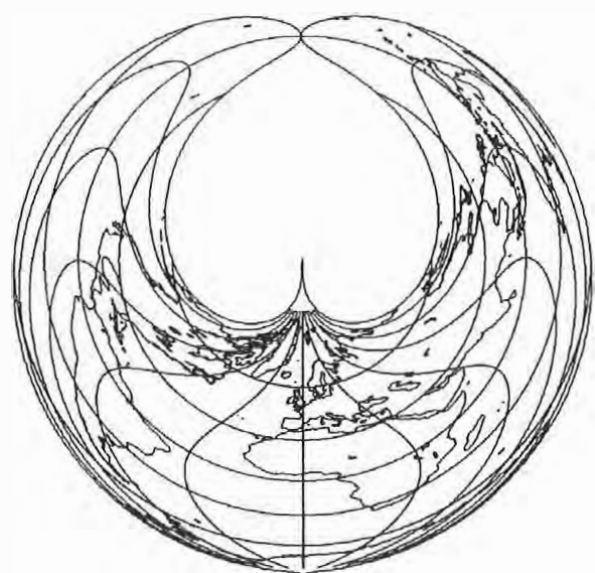


Abb. 6.16b: Flächentr. Entwurf Tobler III

Eine Variante des Tobler III – Entwurfes von Bretterbauer

Setzt man in dem Klammerausdruck der Gl. 6.12 anstelle von $\cos \varphi \rightarrow \cos(\varphi/2)$ so erhält man eine Variante des Entwurfes von Tobler mit etwas besseren Eigenschaften, besonders im Polgebiet.

$$x = \sqrt{\pi/2 - \varphi} \cdot \sin[\lambda \cos(\varphi/2)], \quad y = -\sqrt{\pi/2 - \varphi} \cdot \cos[\lambda \cos(\varphi/2)]. \quad (6.13)$$

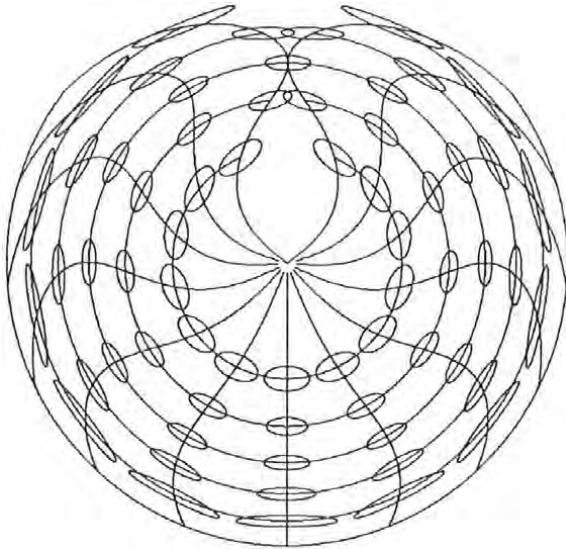


Abb. 6.17a: Variante zu Tobler



Abb. 6.17b: Variante zu Tobler

Konformer exponentieller Entwurf von Bretterbauer

$$z = \ln \tan \left\{ \frac{\pi}{4} + \left| \frac{\varphi}{2} \right| \right\}, \quad x = \cos(z) \cdot (e^\lambda - e^{-\lambda}), \quad y = \sin(z) \cdot (e^\lambda + e^{-\lambda}). \quad (6.14)$$

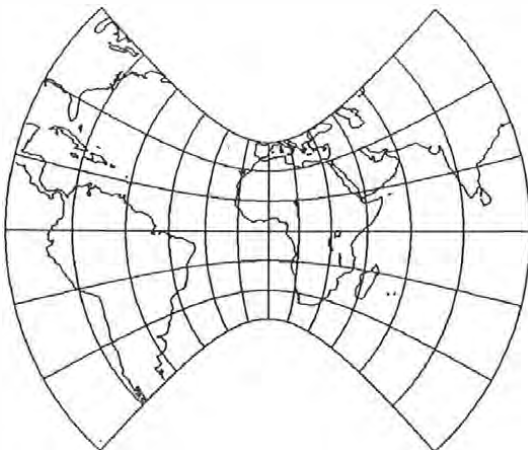


Abb. 6.18b: Entwurf von Bretterbauer

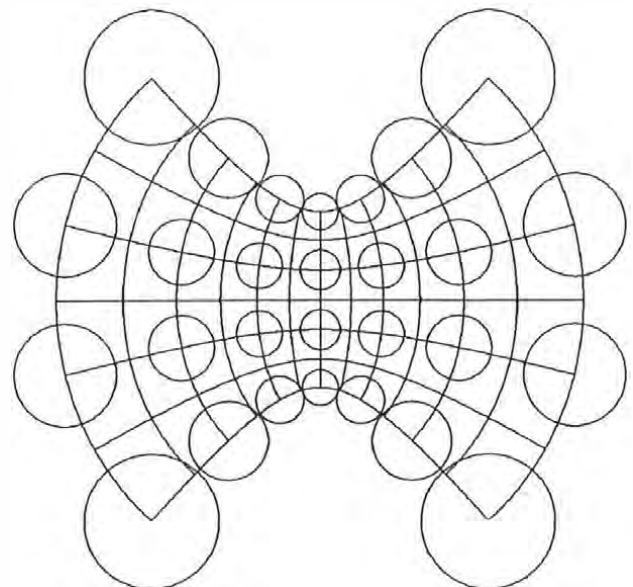


Abb. 6.18a: Konformer Entwurf von Brett.

Exponentieller Entwurf von Bretterbauer, aphyllaktisch

Dieser Entwurf ermöglicht es, Gebiete von besonderem Interesse durch Umpolung in das Zentrum der Abbildung zu rücken und dort vergrößert darzustellen. Die Abbildungsgleichungen sind:

$$C_1 = \arctan(e^{\varphi+\lambda}), \quad C_2 = \arctan(e^{\varphi-\lambda}), \quad (6.15)$$

$$x = C_1 - C_2, \quad y = C_1 + C_2 - \pi/2.$$

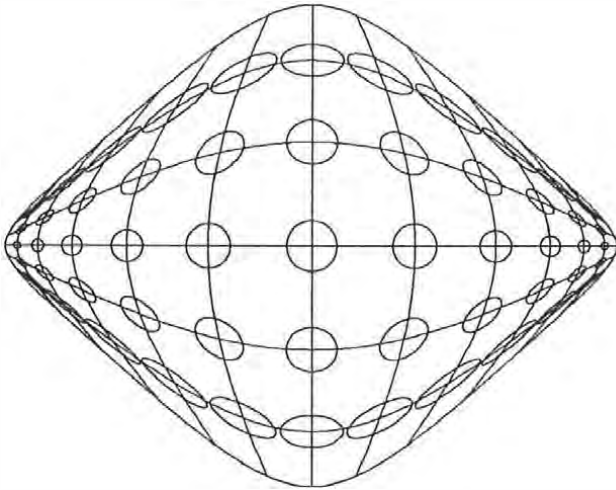


Abb. 6.19a: Exponent. Entwurf mit Lupe



Abb. 6.19b: Lupeneffekt

In Abb. 6.19b wurde der Zentralmeridian ausnahmsweise in $\lambda = 30$ ö. Gr. gelegt. Ähnliche, oft noch stärkere Lupeneffekte haben auch andere Autoren erzielt.

Aphyllaktischer Entwurf von Bretterbauer

$$x = \lambda, \quad y = (\varphi/\lambda) \sin \varphi. \quad (6.16)$$

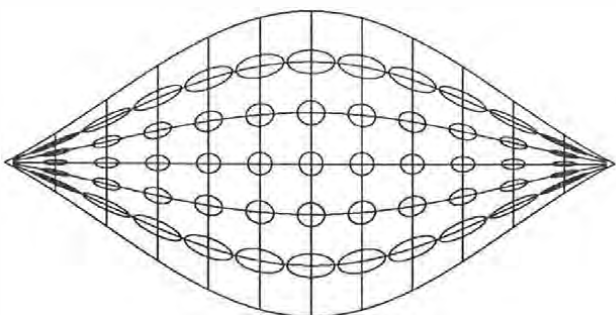


Abb. 6.20a: Entwurf von Bretterbauer



Abb. 6.20b: Kontinentumrisse

Eine typische konventionelle Projektion gibt eine einfache Vorschrift für die Konstruktion des Netzbildes. Auf einer besonders einfachen, geometrischen Vorschrift beruht die

Trimetrische Projektion von Chamberlin (1947)

Die Projektion basiert auf einer überaus einfachen Grundidee und hat bemerkenswert kleine Verzerrungen [Chamberlin, 1947], [Bretterbauer, 1989], [Christensen, 1992]. Der Grundgedanke zur Bestimmung eines Bildpunktes ist die Anwendung des alten Vermessungsprinzips der Punktfestlegung durch Bogenschnitt, hier durch dreifachen Bogenschnitt. Das abzubildende Gebiet wird in ein sphärisches Dreieck A, B, C eingeschlossen, weshalb sich Kontinente mit angenäherter Dreiecksgestalt besonders gut eignen, z. B. Afrika, oder Südamerika. Nun werden die Großkreisdistanzen zwischen A, B, C in wahrer Größe (um den Kartenmaßstab verringert) in der Ebene aufgetragen und bilden ein ebenes Dreieck. Zur Abbildung eines Punktes innerhalb des Basisdreiecks werden die Großkreisdistanzen zu A, B, C berechnet und vom jeweiligen Basisdreieckspunkt in wahrer Größe abgeschlagen. Diese drei Distanzen schneiden sich jedoch nicht in einem Punkt der Ebene, sondern bilden ein kleines Dreieck, das von Kreisbögen unterschiedlicher Radien begrenzt ist. Das „Zentrum“ dieses Dreiecks ist der Bildpunkt. Chamberlin hat den Begriff des Zentrums nicht näher definiert.

Dieser interessante Entwurf hat zwei kleine Nachteile: Die Zentren der Dreiecke, als Repräsentanten der Bildpunkte, sind nicht eindeutig definiert und die Seiten des ebenen Basisdreiecks sind nicht die Bilder der Großkreise, diese verlaufen vielmehr außerhalb des Dreiecks. Diese kleinen Mängel können jedoch einfach behoben werden [Bretterbauer, 2001]. Das Verfahren wird so modifiziert, daß die Bildpunkte eindeutig definiert sind und die Bilder begrenzenden Großkreise mit den Seiten des ebenen Basisdreiecks zusammenfallen. Die drei Großkreisdistanzen nach einem Bildpunkt schneiden sich sehr wohl, nämlich in der Spitze einer dreiseitigen Pyramide, und der Bildpunkt kann als die Orthogonalprojektion auf die Ebene gedeutet werden. Das behebt aber nicht den zweiten Mangel. Beide Mängel können gemeinsam beseitigt werden, wenn man Flächenverhältnisse und sogen. „barizentrischer Koordinaten“ (Dreieckskoordinaten) einführt [Hoschek, Lasser, 1989]. Das Verfahren ist elementar und auf jedes beliebige Basisdreieck anwendbar. *Abb. 6.21a* zeigt ein sphärisches Dreieck mit der Gesamtfläche F . Seine Seiten bilden unverändert die Seiten des ebenen Dreiecks, nachdem es in geeigneter Weise in bezug zum Koordinatensystem orientiert wurde. Man kann z. B. die x -Achse in die Seite $A'B'$ legen, oder das Azimut der Seite AC in wahrer Größe abtragen. Nun werden die Gesamtfläche F des sphärischen Dreiecks und die Teilflächen, die durch einen Punkt P gebildet werden, berechnet, sowie die folgenden Flächenverhältnisse (*Abb. 6.21b*):

$$q_1 = \frac{F_2}{F}, \quad q_2 = \frac{F_3}{F}, \quad q_3 = \frac{F_1}{F}, \quad (6.17)$$

(man beachte die Reihenfolge der Indizes).

Das Verfahren wurde auf das in *Abb. 6.22* markierte Dreieck angewendet, was besonders einfach ist. Bekanntlich kann die Kugel in zwanzig gleichseitige sphärische Dreiecke eingeteilt werden, je fünf bedecken die Polkappen, zehn die Äquatorzone. Zwei Eckpunkte liegen in den Polen, die übrigen zehn in den Breiten $\pm 26^\circ 33' 54''$. Die Winkel in den sphärischen Dreiecken betragen 72° , ihr sphärischer Exzeß daher 36° ; die Bogenlängen sind gleich 0.46365 (bei $R = 1$). Die Winkel im ebenen Dreieck sind 60° . Die *Abb. 6.23b* zeigt Europa in der Varianten der trimetrischen Projektion von Chamberlin.

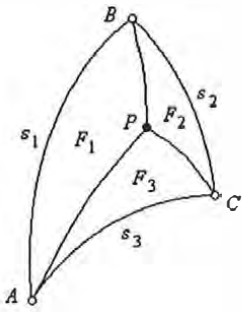


Abb. 6.21a

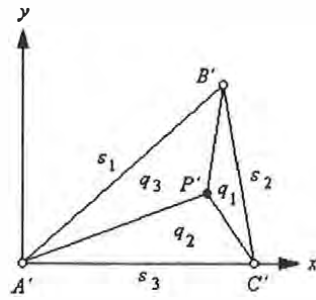


Abb. 6.21b

Die ebenen Koordinaten der Eckpunkte des Basisdreiecks sind einfach zu berechnen. Im gegebenen Fall wurde die x -Achse in die Seite $A'C'$ gelegt. Die barizentrischen Koordinaten des Punktes P' folgen sodann aus:

$$\begin{aligned} x &= q_1 x_A + q_2 x_B + q_3 x_C, \\ y &= q_1 y_A + q_2 y_B + q_3 y_C. \end{aligned} \tag{6.18}$$



Abb. 6.22: Zwanzig sphärische Dreiecke

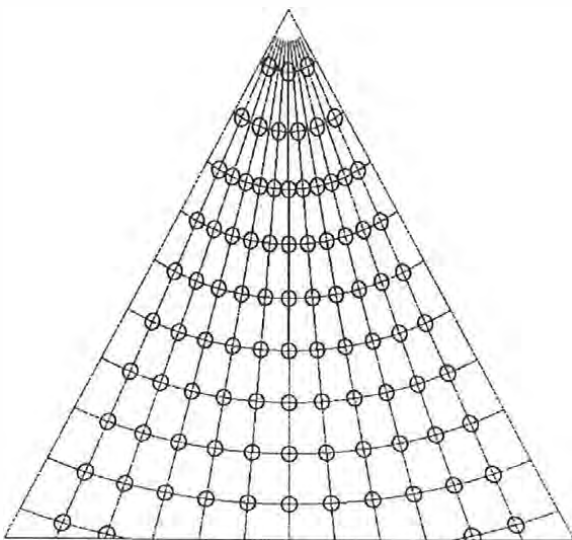


Abb. 6.23a: Chamberlin, Netz $6^\circ \times 6^\circ$

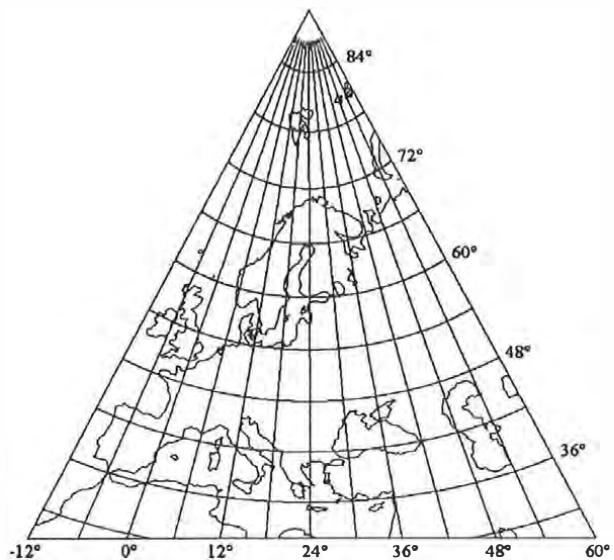


Abb. 6.23b: Variante der trimetr. Projektion

6.4 Konforme Projektionen auf Basis elliptischer Integrale

Eine ganze Reihe höchst bemerkenswerter konformer Projektionen basiert auf **elliptischen Funktionen**. Sie beruhen letzten Endes auf der Lage der Brennpunkte von sphärischen Ellipsen auf der Kugel. Diese Projektionen gehen auf Arbeiten des Mathematikers H. A. Schwarz (19. Jhd) zurück. Wie schon in Kapitel 0 ausgeführt, würde eine Diskussion dieser Theorie den Rahmen dieser Monographie sprengen. Näheres darüber findet man z. B. in [Adams, 1952], [Lee, 1976]. Mehrere Entwürfe können jedoch vorgestellt werden, weil sie nicht mehr als eine numerische Integration erfordern, wie sie schon im Entwurf von Mayr notwendig war.

Eine wichtige Rolle in dieser Klasse von Projektion spielt das **Elliptische Integral 1. Gattung**. Dieses ist geschlossen nicht auswertbar. In der Normierung von Legendre hat es die allgemeine Form:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \sin \Theta. \quad (6.19)$$

Θ heißt der Modul des Integrals, φ die Amplitude. Zur Berechnung für die folgenden Abbildungen wurde wieder das Runge-Kutta Verfahren 5. Ordnung nach Butcher angewendet [Schwarz, 1986]. Selbstverständlich existieren auch andere Methoden.

Konforme Projektion von Guyou (1887)

Diese Projektion bildet nur eine Hemisphäre ab. Ihre Abbildungsgleichungen sind:

$$\cos \alpha = (\cos \varphi \sin \lambda - \sin \varphi) / \sqrt{2}, \quad \cos \beta = (\cos \varphi \sin \lambda + \sin \varphi) / \sqrt{2}, \quad (6.20a)$$

$$\sin m = \pm \sqrt{1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}, \quad \sin n = \pm \sqrt{1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta},$$

$$x = \int_0^m \frac{dm}{\sqrt{1 - 0.5 \cdot \sin^2 m}}, \quad y = \int_0^n \frac{dn}{\sqrt{1 - 0.5 \cdot \sin^2 n}}. \quad (6.20b)$$

Wie man erkennt, wurde der Modul des Integrals von Guyou zu $\Theta = 45^\circ$ gewählt.

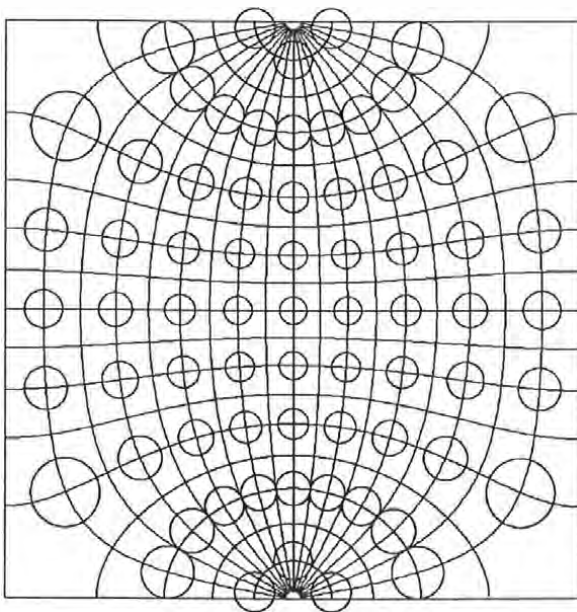


Abb. 6.24a: Guyou-Entwurf, $10^\circ \times 10^\circ$

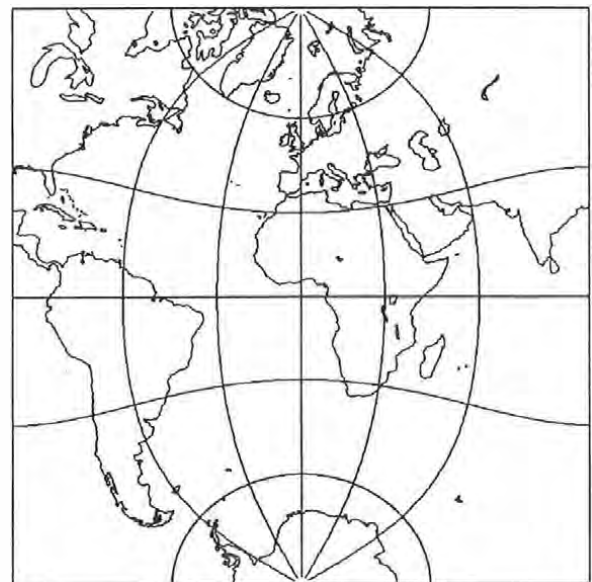


Abb. 6.24b: Guyou-Entwurf, $30^\circ \times 30^\circ$

Die Verzerrungen sind moderat, nur in den Ecken wachsen sie sehr rasch an. Man kann nach dem Einfluß des Moduls des elliptischen Integrals auf den Entwurf fragen. Eine Änderung des Moduls bewirkt nur eine geringe Veränderung im Aussehen des Netzbildes aber den Verlust der Konformität. Das hat mit der Mercatorfunktion zu tun.

Konforme Abbildung einer Hemisphäre in ein Quadrat von Adams I (1925)

Der Entwurf bildet die Hemisphäre in ein auf der Spitze stehendes Quadrat ab. Die Abbildungsgleichungen sind:

$$\cos \alpha = \cos \varphi \cos \lambda, \quad \beta = \pi/2 - \varphi. \quad (6.21)$$

Dann weiter mit den Größen m und n und den Koordinaten x und y wie bei Guyou Gl. (6.20b). Dabei ist zu beachten, daß m das Vorzeichen von $(\sin \varphi + \cos \alpha)$, n das Vorzeichen von $(\sin \varphi - \cos \alpha)$ erhält. Die Abbildungsgleichungen in der gegebenen Form bewirken eine Verdrehung der Koordinatenachsen um 45° . Es muß also noch eine triviale Drehung des Achsenkreuzes vorgenommen werden. Aus Platzgründen wurde in den Abbildungen darauf verzichtet.

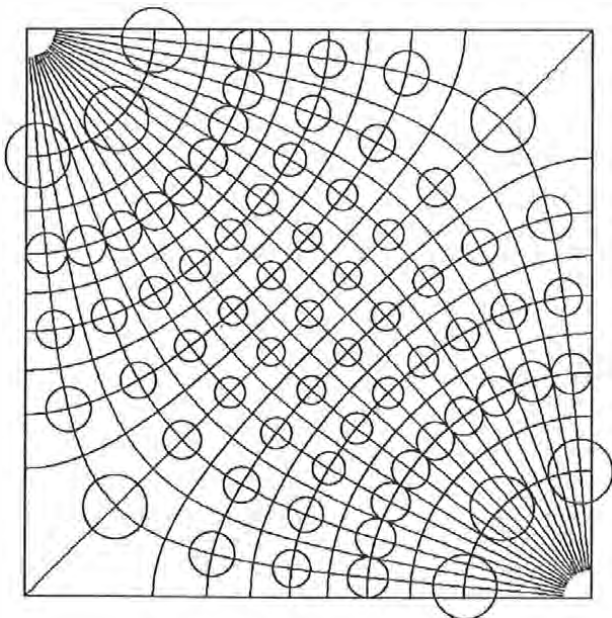


Abb. 6.26a: Adams I, $10^\circ \times 10^\circ$

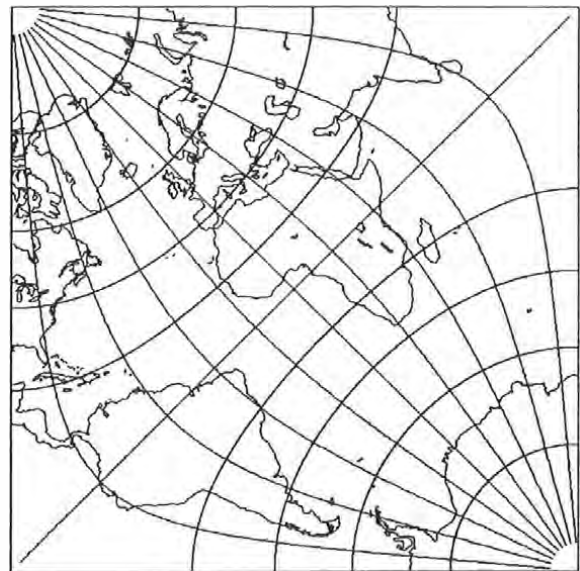


Abb. 6.26b: Adams I, $20^\circ \times 20^\circ$

Konforme Weltkarte in einem Quadrat von Adams II

Die Abbildungsgleichungen:

$$\sin \psi = \tan(\varphi/2), \quad \cos \alpha = \cos \psi \sin \lambda, \quad \cos \beta = \sin \psi. \quad (6.22)$$

Weiter mit den Formeln für m , n , x , y wie bei Guyou nach Gl. (6.20b). Die Größe m erhält das Vorzeichen von $(\sin \psi + \cos \alpha)$, n das Vorzeichen von $(\sin \psi - \cos \alpha)$. Wieder ist das Achsenkreuz um 45° verschwenkt, auf die Korrektur wurde in den Abbildungen aus Platzgründen verzichtet. Man beachte die starken Verzerrungen des antarktischen Kontinents (Abb. 6.27a, b).

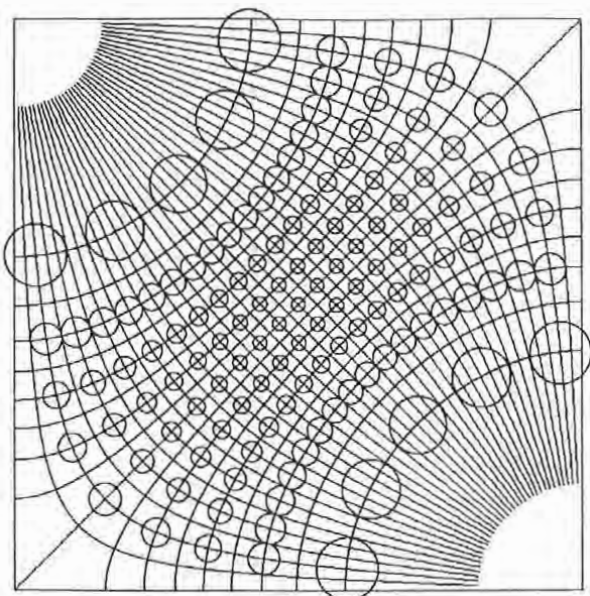


Abb. 6.27a: Adams II, 10°×10°

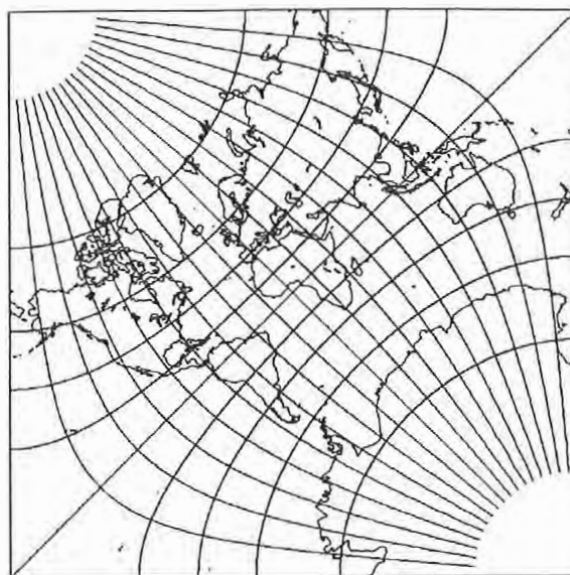


Abb. 6.27b: Adams II, 20°×20°

Konforme Weltkarte in einem Quadrat von Adams III

In diesem Entwurf wird das Achsenkreuz nicht verschwenkt. Die Abbildungsgleichungen sind:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \tan(\varphi/2), \\ \cos \alpha &= \{\cos \psi \sin(\lambda/2) - \sin \psi\} / \sqrt{2}, \quad \cos \beta = \{\cos \psi \sin(\lambda/2) + \sin \psi\} / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Weiter mit m, n, x, y von Guyou nach Gl. (6.20b).

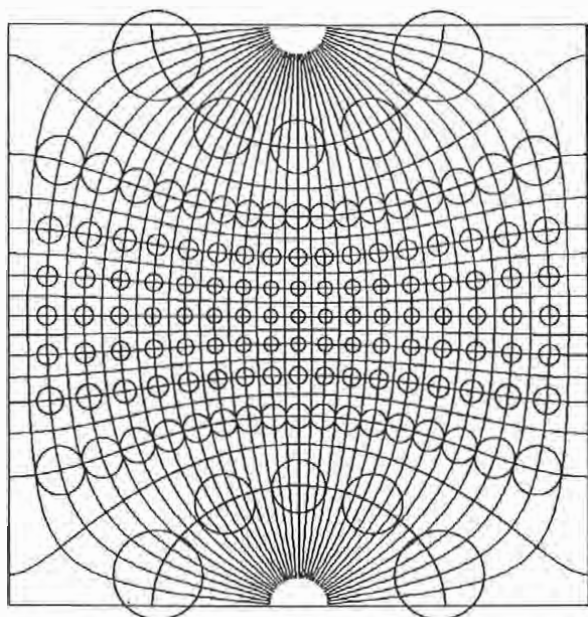


Abb. 6.28a: Adams III, 10°×10°

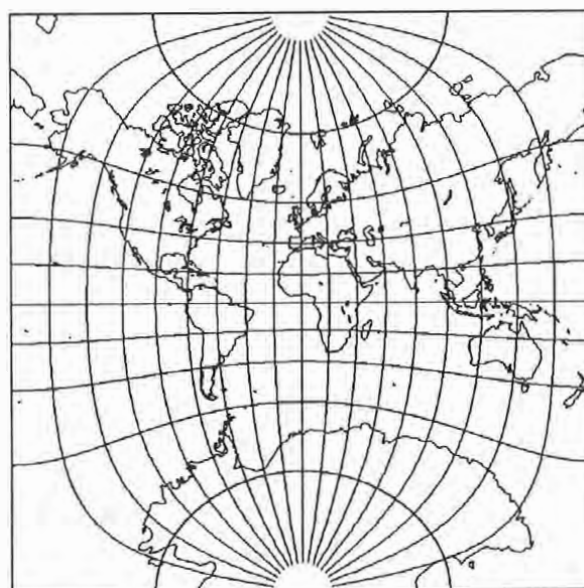


Abb. 6.28b: Adams III, 20°×20°

Weitere konforme Projektionen auf Basis elliptischer Funktionen sind:

- „Quincunzialprojektion“ von Peirce. Der Name wurde von Peirce geprägt, weil das Nordpolgebiet im Zentrum, die südliche Hemisphäre in den vier Ecken eines Quadrats abgebildet werden.
- Weltkarte in einem Rechteck von Adams.
- Hemisphäre in einem Rhombus von Adams. Die Abbildung erfolgt in einen Rhombus mit den Winkeln 60° bzw. 120° .
- Weltkarte in einem Rhombus von Adams. Abbildung der ganzen Erden in einen Rhombus mit den Winkel 60° bzw. 120° .
- Weltkarte in einem sechszackigen Stern von Adams. Die Nordhalbkugel erscheint in einem gleichseitigen Sechseck, die Südhalbkugel auf sechs gleichseitige Dreiecke verteilt. Dies ist eine Form der zerlappten Entwürfe.
- Weltkarte in einer Ellipse von Adams. Die ganze Erde wird in eine Ellipse mit dem Achsenverhältnis 2:1 abgebildet.
- Weltkarte in einem Dreieck von Lee.

Von [Lee, 1976] gibt es sehr tiefe Studie zu diesen Problemen, vor allem auch zu den transversalen Zylinderprojektionen des Ellipsoides.

Die Gestaltungsmöglichkeiten konventioneller Projektionen sind sehr vielfältig. Denkbar wäre auch der Einsatz kartographischer Netzentwürfe für Werbezwecke, z. B. für weltweit agierende Speditionen. Daher sei abschließend ein Beispiel unter vielen möglichen vorgestellt:

Aphylaktische Entwurf „Flagge“ von Bretterbauer

$$\begin{aligned} x &= \lambda + (\varphi/3) \sin \varphi, \\ y &= \varphi + (\lambda/3) \sin(2\lambda). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Auch hier könnten problemlos die Indikatoren konstruiert werden, sie dürften aber kaum jemanden interessieren, da es sich ja nur um die modifizierte Plattkarte von Marinus handelt.

Oder wie wär's mit dem Entwurf „Ballon“? (Abb. 6.25).

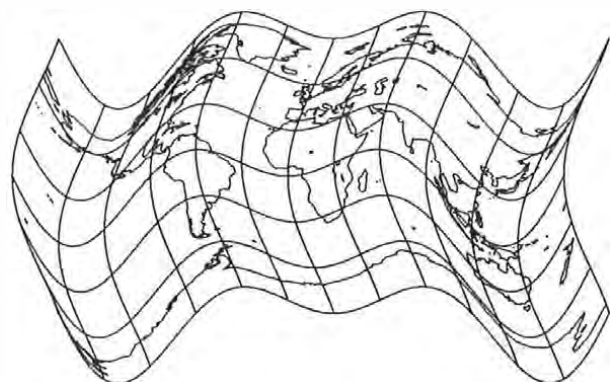


Abb. 6.24: Weltkarte als Flagge

Wie schon mehrfach betont, lassen sich beliebig viele Projektionen entwerfen, und tatsächlich werden immer noch neue Projektionen publiziert, vor allem von englischsprachigen Autoren. Dies geschieht meist für einen ganz bestimmten Zweck, z. B. zur Darstellung der Subsatellitenspur eines Erderkundungs-Satelliten. Nicht alle Entwürfe erlangen die Beachtung, die sie vielleicht verdienen.

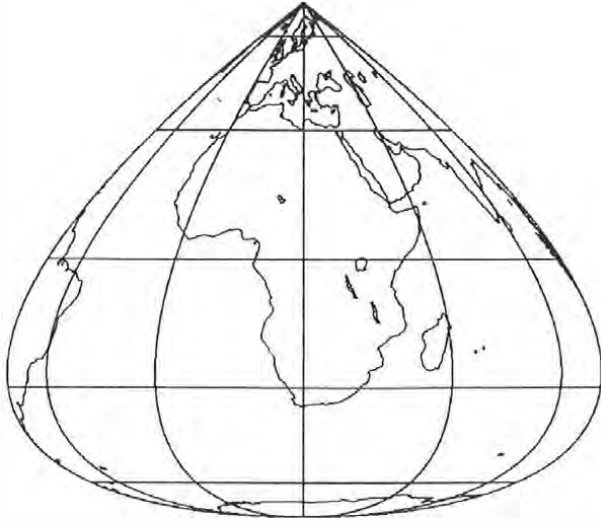


Abb. 6.25: Entwurf „Ballon“

Der Zentralmeridian wurde in *Abb. 6.25* bei 20° ö. Gr. gewählt.

Abschließend aber sei ein Entwurf erwähnt, der in der Öffentlichkeit durch geschickte Werbung seines Autors mehr Beachtung gefunden hat, als den Kartographen und Geographen lieb war. Der Entwurf wurde von allen Fach-leuten kritisiert und abgelehnt, weil ihm falsche Eigenschaften zugeschrieben worden waren [Hufnagel, 1974], [Kretschmer, 1978]. Der Entwurf wird deshalb bewußt *nicht* vorgestellt.

ooooo00000ooooo

Literatur

Mathematik, Differentialgeometrie, Funktionentheorie

- Bieberbach, L.: Einführung in die konforme Abbildung. Göschen, Bd. 768, Berlin, 1949.
 Carmo do, M.P.: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Vieweg Studium, Braunschweig, 1983.
 Greuel, O., Kadner, H.: Komplexe Funktionen und konforme Abbildungen. Mathematik für Ingenieure, Bd.9, Teubner, Leipzig, 1982.
 Hancock, H.: Theory of Elliptic Functions. Dover, New York, 1958.
 Hancock, H.: Elliptic Integrals. Dover, New York, 1958.
 Heitz, S.: Koordinaten auf geodätischen Bezugsflächen. Dümmler, Bonn, 1985.
 Heitz, S.: Coordinates in Geodesy. Springer, Berlin, 1988.
 Hoschek, J.: Mathematische Grundlagen der Kartographie. BI, Mannheim, 1984.
 Hoschek, J.; Lasser, D.: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung. Teubner, Stuttgart, 1989.
 Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics. 6th Ed., J. Wiley & Sons, New York, 1988.
 Lipschutz, M. M.: Differentialgeometrie. Schaum's Outlines, McGraw-Hill, Düsseldorf, 1980.
 Rade, L., Westergren, B.: Mathematische Formeln. Springer, Berlin, 2000.
 Rühs, F.: Funktionentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983.
 Schwarz, H. R.: Numerische Mathematik, Teubner, Stuttgart, 1986.
 Sigl, R.: Ebene und Sphärische Trigonometrie. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M., 1969.

Monographien zur Kartennetzentwurfslehre

- Adams, P. D.: General Theory of Polyconic Projections. U. S. Coast and Geodetic Survey. U.S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1934.
 Adams, P. D.: Conformal Projections in Geodesy and Cartography. U. S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication No. 251, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1952.
 Adams, O. S.: Elliptic Functions Applied to Conformal World Maps. Dep. of Commerce, Serial Nr. 297, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1925.
 Bugayevskiy, L. M.; Snyder, J. P.: Map Projections. A Reference Manual. Taylor & Francis, London, 1995.
 Canters, F., Declair, H.: The World in Perspective. John Wiley & Sons, New York, 1989.
 Chamberlin, W.: The Round Earth on Flat Paper. National Geographic Society, Washington, D. C., 1950.
 Euler, L.: Drei Abhandlungen über Kartenprojection. Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Nr. 93, Engelmann, Leipzig, 1898.
 Fiala, F.: Mathematische Kartographie. VEB-Verlag Technik, Berlin, 1957.
 Gauss, C. F.: Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Nr. 55, Engelmann, Leipzig, 1894.
 Gretschel, H.: Lehrbuch der Kartenprojektionen. B. F. Voigt, Weimar, 1873
 Großmann, W.: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. Wittwer, Stuttgart, 1976.
 Hake, G.: Kartographie. Sammlung Göschen, de Gruyter, Berlin, 1974.
 Herz, N.: Lehrbuch der Landkartenprojektionen. Teubner, Leipzig, 1885.
 Jackson, J. E.: Sphere, Spheroid and Projections for Surveyors. BSP Professional Books, Oxford, 1987.
 Jensch, G.: Die Erde und ihre Darstellung im Kartenbild. Westermann, Braunschweig, 1970.
 Kunz, E.: Kartennetzentwurfslehre. Wichmann, Karlsruhe, 1990.
 Lagrange de, J. L.: Über die Construction geographischer Karten. Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Nr. 55, Engelmann, Leipzig, 1894.
 Lambert, J. H.: Land- und Himmelskarten. Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Nr. 54, Engelmann, Leipzig, 1894.
 Lee, L. P.: Conformal Projections Based on Elliptic Functions. Cartographica Monograph No 16. Univ. of Toronto Press, 1976.
 Mainwaring, J.: An Introduction to the Study of Map Projections. McMillan & Co., London, 1942.
 Maling, D. H.: Coordinate Systems and Map Projections. George Philip & Son, London, 1973.
 Mather, R. S.: The Theory and Geodetic Use of Some Common Projections. Monograph No.1, The School of Surveying, The Univ. of New South Wales, Kensington, Australia, 1973.
 Maurer, H.: Ebene Kugelbilder. Justus Perthes, Gotha, 1935.

- Merkel, H.: Grundzüge der Kartenprojektionslehre. Teil I u. II. DGK, Reihe A, Nr.17, München 1956.
- Neumann, L.: Mathematische Geographie und Kartenentwurfslehre. Ferd. Hirt, Breslau, 1923.
- Parry, R. B.; Perkins, C. R.: World Mapping Today. Butterworth & Co., London, 1987.
- Pearson II, F.: Map Projections - Theory and Applications. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1990.
- Porter, W.; McDonnell, Jr.: Introduction to Map Projektions. Marcel Dekker, New York, 1979.
- Richardus, P., Adler, R. K.: Map Projections. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1972.
- Robinson, A. H.: Elements of Cartography. John Wiley & Sons, New York, 1953.
- Scheffers, G.; Strubecker, K.: Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? Teubner, Stuttgart, 1956.
- Schröder, E.: Kartenentwürfe der Erde. Teubner, Leipzig, 1988.
- Snyder, J. P.: Map Projections – A Working Manual. U. S. Geological Survey, Professional Paper 1395, U. S. Government Printing Office, Washington D. C., 1987.
- Snyder, J. P., Voxland, P. M.: An Album of Map Projections. U. S. Geological Survey, Professional Paper 1453, U. S. Government Printing Office, Washington D. C., 1989.
- Steers, J. A.: An Introduction to the Study of Map Projections. University of London Press, London, 1927
- Tissot, A.: Die Netzentwürfe geographischer Karten. Metzler, Stuttgart, 1887.
- Thomas, P. D.: Conformal Projections in Geodesy and Cartography. U. S. Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 251, Washington, D. C., 1952.
- Wagner, K.: Kartographische Netzentwürfe. Bibliographisches Institut Mannheim, 1962.
- Zöpplitz, K.; Bludau, A.: Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Teubner, Leipzig, 1912.

Einzelpublikationen

- Adolph, U-C.: Neue vermittelnde Entwurfsgruppen – erzeugt über Matrizenformeln aus Mollweide-Netzen. Kartographische Nachrichten, Heft 4/1992, pp. 134-138.
- Beineke, D.: Untersuchungen zur Robinson-Abbildung und Vorschlag einer analytischen Abbildungsvorschrift. Kartographische Nachrichten, 4, 1991, pp. 85-94.
- Bretterbauer, K.: Ein Berechnungsverfahren für die Robinson-Projektion. Kartographische Nachrichten, 6/94.
- Bretterbauer, K.: Die trimetrische Projektion von Chamberlin. Kartographische Nachrichten, Heft 2, 1989, pp. 51-55.
- Bretterbauer, K.: Eine Variante der trimetrischen Projektion. Kartographische Nachrichten, Heft 3, 2001, pp. 139-132.
- Bretterbauer, K.: Die Himmelssphäre, eben dargestellt. Sterne und Weltraum, 3/2001, pp. 276-279.
- Bugajevsky, L. M.; Krasnopenvtseva, B. V.; Shingareva, K. B.: Mapping of Extraterrestrial Bodies. AVN 5/1994, pp. 194-205.
- Chovitz, B. H.: A General Theory of Map Projections. Bollettino di Geodesia e Science Affini, 1979, pp. 457 – 479.
- Christensen, A. H. J.: The Chamberlin Trimetric Projection. Cartography and Geogr. Inform. Systems, Vol. 19, No 2, 1992, pp. 88-100.
- Deakin, R. E.: A Minimum-Error Equal-Area Pseudocylindrical Map Projection. Cartography and Geographic Information Systems, Vol. 17, No. 2, 1990, pp. 161-167.
- Dermanis, A.; Livieratos, E.: Dilatation, Shear, Rotation and Energy – Analysis of Map Projections. Bollettino di Geodesia e Science Affini, No. 1, 1983, pp.53-68.
- Dunitrescu, V.: Cosmographic Perspective Projections. Beiträge zur theor. Kartographie. Festschrift f. E. Arnberger, Deuticke, Wien, 1977, pp. 91-106.
- Dyer, J. A.; Snyder, J. P.: Minimum-Error Equal-Area Map Projections. The American Cartographer. Vol. 16, No. 1, 1989, pp. 39-43.
- Finsterwalder, R.: Die betrachtungstreue Azimutalprojektion. Kartographische Nachrichten 6/1993.
- Francula, N.: Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie. Diss. Univ. Bonn, 1971.
- Györffy, J.: Anmerkungen zur Frage der besten echten Zylinderabbildungen. Kartogr. Nachrichten, Heft 4, 1990, pp. 140-146.
- Hazay, I.: Die Bedeutung der Tissot-Indikatrix. Acta Techn. Hung. No 52, 1965, pp. 171-200.
- Hopfner, F.: Lambert, Gauß, Tissot. Inaugurationsrede. Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Nr. 3-4, 1948.
- Hufnagel, H.: Die Peters-Projektion – eine neue und/oder aktuelle Abbildung der Erde? Allgem. Vermessungsnachrichten, No 6, 1974, pp. 225-232.
- Kretschmer, I.: Irreführende Meinungen über die „Peters-Karte“. Mitt. Der Österr. Geogr. Ges., Band 120, I, 1978, pp. 124-135.
- Lehmann, G.: Über die Lagrangesche Projektion. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1939.
- Lichtenegger, H.: Der Allgemeinfall kosmographischer Perspektiven. Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen.
- Otero, J.; Sevilla, M. J.: On the Optimal Choice of the Standard Parallels for a Conformal Conical Projection. Bollettino di Geodesia e Science Affini, No. 1, 1990, pp. 1-14.
- Robinson, A. H.: Which Map Is Best? American Congress on Surveying and Mapping, Falls Church, Virginia, 1986.

- Robinson, A. H.: Choosing a World Map. American Congress on Surveying and Mapping, Bethesda, Maryland, 1988.
- Robinson, A. H.; Snyder, J. P.: Matching the Map Projection to the Need. American Congress on Surveying and Mapping, Bethesda, Maryland, 1991.
- Robinson, A. H.: A New Map Projection: Its Development and Characteristics. In: International Yearbook of Cartography, Vol. 14, 1974, pp. 145-155.
- Snyder, J. P.: An Equal-Area Map Projection for Polyhedral Globes. Cartographica, Vol. 29, No 1, 1992, pp. 10-21.
- Stook, P. J.; Keller, C. P.: Map Projections for Non-Spherical Worlds. Cartographica, Vol. 27, No. 2, 1990, pp. 82 – 100.
- Tobler, W. R.: The Hyperelliptical and Other New Pseudo-Cylindrical Equal Area Map Projektions. Journal of Geophysical Research, Vol. 78, No. 11, 1973, pp.1753-1759.
- Tobler, W. R.: A Proposal for an Equal Area Map of the Entire World on Mercator's Projection. The American Cartographer, Vol. 5, No. 2, 1978, pp. 149-154.
- Tobler, W. R.: Three Short Papers on Geographical Analysis and Modeling. NCGIA, Technical Report 93-1, 1993, University of California, Santa Barbara..
- Tobler, W. R.: Local Map Projections. The American Cartographer, Vol. 1, No 1, 1974, pp. 51-62.
- Vincze, V.: Fundamental Equations with General Validity of Real Projections. Acta Geodetica et Montanistica Hung. Heft 18, 1983, pp. 383-401.

ooooo00000ooooo

Index

A

Abarten von Projektionen 43
 Abbildung, Abbild 4, 6, 7
 Abbildungslehre 4
 Absolute Treue 27
 Achsen der Indikatrix 5, 14, 25
 Achsenrichtung 7
 Ähnlichkeit 5
 Äquatorialprojektion 30,
 äquivalente Abbildung 17
 Äquivalenzbedingung 18, 44
 äquivalente Breite 17
 Äquivalente Kegelprojektionen 64
 äquivalentes Netz 17
 Affinität, affin 4, 5
 Analytische Funktion 11
 aphyllaktisch III
 aphyllaktische Projektionen 29, 30, 41, 43, 44, 48, 50,
 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57
 Apollonius 6
 Armadillo 59
 Asymmetrischer Entwurf von Hatano 53
 Augpunkt 26
 Azimut 26
 Azimutalprojektionen 22, 26
 analytische - 35
 betrachtungstreue - 31
 flächentreue - 36, 37
 mittabstandstreue - 35
 pseudo - 26
 unechte - 26

B

Ballon 89
 Bildschirmkoordinaten 22
 Bogenelement 13, 15
 Berührungspunkt 26
 Betrachtungstreue Azimutalprojektion 31

C

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung 11, 16,
 17, 31

D

Doppelprojektion von Solovjew 34

E

Ebene Meridiankonvergenz 16
 Elliptischer Entwurf 51
 Elliptische Funktionen 15
 Elliptische Integrale 86
 Entwurf 22, 45
 Entwurf von
 Adams 87
 Airy 37
 Aitoff 55
 Aitoff- Wagner 55
 Albers 65
 Apianus 73, 74
 August 69
 Bacon 74
 Behrmann 43
 Bienewitz 73
 Boggs 45
 Bonne 71
 Braun 44
 Bretterbauer 48, 49, 54, 56, 69, 82, 83, 89
 Briesemeister 57
 Cassini-Soldner 41
 Chamberlin 84
 Collignon 47
 Craig 78
 Craster 45
 Denoyer 52
 Eckert 50, 51
 Eisenlohr 68
 Fournier 51
 Gall 43
 Goode 49
 Grinten van der 75, 77
 Guyou 86
 Hammer 51, 58, 78, 79
 Hatano 53
 Hipparch 31
 Hojovec 80
 Kawraisky 24, 25, 47
 Lagrange 69
 Lambert 36, 40, 42, 63, 64, 69
 Lee 89
 Littrow 58
 McBryde-Thomas 52
 Mayr 55
 Mercator 23, 38
 Marinus von Tyros 41
 Maurer 58
 Mendeleejev 66
 Michailov 54
 Miller 44
 Mollweide 46

Molovichko 37
 Nell-Hammer 51
 Nicolosi-Arrowsmith 75
 Ortelius 54
 Pavlov 44
 Peirce 90
 Prepetit-Foucault 47
 Ptolemäus 67
 Putnin 45
 Raisz 59
 Robinson 53
 Sanson-Flamsteed 24, 45
 Schjerning 48
 Siemon 46, 48
 Solovjew 34
 Stab-Werner 72
 Tobler 48, 57, 81, 82
 Urmajev 56
 Wagner 51, 56
 Wagner-Kawraisky 56
 Wetch 44
 Wiechel 37
 Winkel 52, 57
 Euklidische Ebene 11
 Eumorphischer Entwurf 45
 Exponentialdarstellung 11
 Exponentieller Entwurf 83, 84
 Externe Projektion 27, 30
 Extremwerte, Extremwertaufgaben 5, 6

F

Flächenelement 3
 flächentreue Abbildung 7, 17, 18, 36, 37, 42, 45, 46,
 47, 48, 49, 50, 51, 53, 56
 Flächenverzerrung 7, 14
 Fundamentalform 2
 Fundamentalgrößen 13, 15

G

Gauß'sche Zahlenebene 11
 geographische Breite, Länge 13
 Geometrie der Kugel 13
 Globularprojektion 74
 Gnomonische Projektion 27, 33
 Großkreis 19, 20, 21
 Gürteltier 59

H

Halbachsen der Indikatrix 6
 Halbelliptischer Entwurf 52
 Hauptpunkt 26
 Hauptverzerrungslinien 6
 Hauptverzerrungsrichtungen 6, 9, 14
 holomorphe Funktion 11
 Homalographische Projektion 46
 Homolosine Projektion 49

hyperbolische Funktionen 15

I, J

Indikatrix 5, 23, 24, 37
 infinitesimaler Kreis 5
 Integration 55, 85
 Interpolation 28
 Isometrie, isometrisch 13
 isometrische Breite 14
 isometrisches Parametersystem 10, 17
 isotherm 10
 isotherme Parameterdarstellung 15
 Iteration 23, 46
 Jacobi-Determinante 4
 Jordan-Kriterium 24

K

Kegelkonstante 60, 62
 Kegelprojektionen 22, 59
 echte - 59
 unechte -
 zentrale - 61
 Kegelstumpfprojektion 65
 Klingatsch-Kriterium 25
 komplexe Zahlenebene 11, 12
 komplexe Darstellung 31
 Konformität 10, 31
 konform 5
 konforme Abbildung 5, 10, 14, 58
 konforme Kegelprojektion 62
 konforme polykonische Projektion 68
 konforme Projekt. auf Basis ellipt. Integrale 85
 konforme Zylinderprojektion 23, 38
 konische Zentralperspektive 61
 konjugierte Durchmesser 6
 Konventionelle Projektionen 22, 72
 Konusova-Kriterium 25
 Kreistreue 13, 31
 Kremer 38
 Kriterium 24
 von Airy 24
 von Airy-Kawraisky 24
 von Jordan 24
 von Jordan.Kawraisky 25
 von Klingatsch 25
 von Konusova 25

L

La Hire 31
 Längenverzerrung 4, 5, 17
 Laplace'sche Differentialgleichung 11
 Laplace-Operator 11
 Loximutalprojektion 48
 Loxodrome 19, 21, 48

M

Maßstab 23
 maximale Winkelverzerrung 9, 10
 Mercatorfunktion 15, 86
 Mekka-Projektion 77
 Meridian 13, 14
 Mittabstandstreue Azimutalprojektion 35
 Mittabstandstreue Kegelprojektion 66
 Mittelmeridian 24

N

Numerische Integration 55, 85

O

Orthodrome 19
 Orthogonalnetz 5, 6
 Orthogonalsystem 5, 6, 13
 Orthographische Projektion 27, 28
 - polare 28
 - schiefe 29
 - äquatoriale 30

P

Parabolischer Entwurf 45, 52
 Parallelkreis, Parallel 13, 14
 Parallelprojektion 28
 Parameterform 1
 Parameterlinien 1, 5
 Perspektive Projektionen 26
 normale -
 schiefe - 27
 transversale -
 Planisphären 22
 Plattkarte 23, 41
 Polarkoordinaten 59
 Poldistanz 14, 20
 Poldreieck 19
 Polyederprojektion 33
 Polykonische Projektion 67
 Projektion 22
 Pseudobreite, -länge 20
 Pseudokonische Projektionen 70
 Pseudomeridian, -parallel 20, 26
 pseudozylindrisch 24, 38

Q

Quadratische Plattkarte 23, 41
 Quartisch-athalische Projektion 46
 Qincunialprojektion 89

R

regulärer Flächenpunkt 1
 reguläre Fläche 10
 Retroazimutalprojektion 78
 Riemann'sche Zahlenkugel 11, 12
 Richtungswinkel 9
 Runge-Kutta Verfahren 55, 86

S

Satz von Clairaut 21
 Satz von Gauß 11
 Satz von Tissot 4, 5
 Satz von Apollonius 6
 Separatrix 9
 Sinusoidalprojektion 45, 52
 schiefe - 45
 Stereographische Projektion 12, 27, 31
 - Äquatorialprojektion 32
 - Doppelprojektion 34
 - Polarprojektion 32
 Sternkarte 32
 Streckenverzerrung 4, 5, 24

T

Tissot'sche Indikatrix 5, 37
 Transzendente Gleichung 45, 46
 Trapezförmige Weltkarte 50
 Trimetrischer Entwurf 84
 Tripelprojektion von Winkel 57
 Tschebyscheff 25

U

Umbeziffern 22
 Umpolung 19, 22
 Unechte Kegelprojektionen 70
 Unechte Zylinderprojektionen 44
 Urbild 4, 6, 7

V

Van der Grinten 75, 76
 Vermittelnde Projektion 57
 Verzerrung 4, 5, 7, 9, 14, 23
 Verzerrungsellipse 23, 37

W

Weltkarten 22
 Winkeltreue, winkeltreu 5, 6
 winkeltreue Abbildungen 10
 Winkelement 9
 Winkelverzerrung 9

X, Y, Z

Zentralmeridian 23

Zentralprojektion 33, 38

Zentrale Kegelprojektion 61

Zentrale Zylinderprojektion 41

Zerlappte Projektion 49, 50

Zylinderprojektionen 22

echte - 38

flächentreue - 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 53

konforme - 39

normale - 38

pseudo - 44

schiefe - 43

transversale - 40

unechte - 38, 44

ooooo00000ooooo