

GEOWISSENSCHAFTLICHE MITTEILUNGEN

Heft Nr. 57, 2001

OBJEKTREKONSTRUKTION AUS PERSPEKTIVEN BILDERN UNTER EINBEZIEHUNG VON UMRISSLINIEN

von
Dietmar Legenstein



Veröffentlichung des Instituts für
Photogrammetrie und Fernerkundung
122

Schriftenreihe der Studienrichtung VERMESSUNG UND GEOINFORMATION
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Herausgeber und Verleger: o. Prof. Dr.-Ing. Karl Kraus

Vorstand des Institutes für Photogrammetrie und Fernerkundung
der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29

Die Kosten für den Druck wurden aus eigenen Einnahmen des Institutes für
Photogrammetrie und Fernerkundung der Technischen Universität Wien getragen.

Diese Arbeit wurde an der Fakultät für Technische Naturwissenschaften und Informatik
der Technischen Universität Wien (Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich) zur
Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften
eingereicht.

Begutachter:

O. Univ. Prof. Dr.-Ing Karl Kraus
Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29, Österreich

O. Univ. Prof. Mag. Dr. Helmut Pottmann
Institut für Geometrie im Bauwesen und Scientific Computing der Technischen
Universität Wien
A-1040 Wien, Wiedner Hauptstraße 8, Österreich

Tag der mündlichen Prüfung: 17. 5. 2001

Druck: die kopie, A-1040 Wien
Auflage: 250 Stück
ISBN 3-9500791-5-7

Meinen Kindern
Marie-Louise und
Erik

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Karl Kraus. Weiters danke ich Herrn Prof. Dr. Helmut Pottmann für die Übernahme des Koreferates. Herrn Dr. Helmut Kager gebührt großer Dank für seine zahlreichen Anregungen zu dieser Arbeit. Schließlich danke ich all meinen Kollegen für ihre große Hilfsbereitschaft und die angenehme Zusammenarbeit.

Kurzfassung

Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie ist es, aus analogen oder digitalen Bildern dreidimensionale Objekte - Größe, Form, Lage oder geometrische Abstände - zu rekonstruieren. Dazu werden zunächst aus Photos mit Hilfe von bekannten „Gebilden“ die Aufnahmeorte und die Orientierungsparameter bestimmt. In erster Linie wird die Objektrekonstruktion mittels Verknüpfungspunkten - oder auch über kurvenförmige Merkmale - gelöst. In dieser Arbeit hingegen soll die Objektrekonstruktion über Umrißlinien diskutiert werden. Die Einbeziehung von Umrißpunkten bei der Objektrekonstruktion ist dann von Bedeutung, wenn am Objekt nur wenige Punkte gemessen werden können, und das Einmessen eines jeden weiteren Punktes mit erheblichem Mehraufwand verbunden wäre. In der digitalen Photogrammetrie bietet sich an, Umrißlinien automatisch zu detektieren, jedoch müssen diese Linien als Umriss identifiziert und den entsprechenden Objekten zugeordnet werden. Eine Objektrekonstruktion ausschließlich über Umrißlinien stößt bei Flächen mit Eindellungen an ihre Grenzen, jedoch auch hier liefern sie wertvolle Beiträge.

Im ersten Teil wird das mathematische und photogrammetrische Gebäude, das für die Lösung dieser Aufgabe nötig ist, entwickelt; der zweite Teil beschäftigt sich mit der Implementierung in das Programmpaket ORIENT. Abgerundet wird diese Arbeit durch ein Musterbeispiel (Vermessung des Wiener Fernwärmeturms), an dem der Einsatz der entwickelten Theorie ausführlich gezeigt wird.

Abstract

The main task in photogrammetry is the reconstruction of 3 dimensional objects - size, shape, position or geometric distance - from analog or digital images. In a first step the camera position and the orientation parameters are calculated from known objects within the image. The widespread procedure for solving the problem of object reconstruction uses 3-D points or free-formed features. In the present paper object reconstruction and via contours are discussed. Points of the contour are used if a limited number of 3-D points is accessible and measurements of additional points lead to prohibitive efforts. In digital photogrammetry contours can be detected automatically, but these lines have to be identified as contours and have to be related to the right surface. Object reconstruction of surfaces with dents is not possible by using only contours, but anyway even in these cases points on contours provide valuable information.

In the first part of the paper the necessary mathematical and photogrammetric methods for the solution of the tasks are developed. The second part deals with implementing the algorithms in the ORIENT software. Finally an example is given to demonstrate in detail the theory developed (surveying of the “Wiener Fernwärmeturm”).

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Aufgabenstellung – Motivation	1
1.2	Erklärung von Fachausdrücken	2
1.3	Schreibweise mathematischer Formeln	3
1.3.1	Einführung in die Tensorrechnung	3
1.3.2	Symbolübersicht	5
2	Theorie.....	7
2.1	Allgemeine Überlegungen.....	7
2.2	Ableitung der Umrißbedingung.....	7
2.3	Das überbestimmte System bei Umrißpunkten	9
3	Aufbereitung der Umrißbedingung für photogrammetrische Zwecke	13
3.1	Zusammenführung photogrammetrischer Koordinatensysteme.....	13
3.1.1	Transformation vom Bildkoordinatensystem ins Referenzkoordinatensystem	13
3.1.2	Transformation vom Modellkoordinatensystem ins Referenzkoordinatensystem	15
3.1.3	Transformation der Elemente der Umrißbedingung ins Referenzsystem	16
3.2	Flächendarstellungen und Berechnung der Normalenvektoren	17
3.2.1	In Parameterdarstellung gegebene Flächen	17
3.2.2	Implizit algebraisch gegebene Flächen	18
3.2.3	Explizit algebraisch gegebene Flächen	18
3.3	Verbesserungsarten der fiktiven Umrißbedingung.....	20
4	Linearisierung und Konvergenzverhalten der Umrißbedingung.....	22
4.1	Lösen eines überbestimmten Systems	22
4.2	Linearisierung der Umrißbedingung	24
4.2.1	Vom jeweiligen Typ unabhängige elementare Differentiale.....	25
4.2.2	Differentiale für den Typ E_1	27
4.2.3	Differentiale für den Typ E_2	29
4.2.4	Differentiale für den Typ E_3	32
4.2.5	Differentiale für den Typ E_4	34
4.3	Konvergenzbereich – Wie genau müssen die Näherungswerte für den Umrißpunkt sein?	37
4.3.1	Untersuchung der Normalenvektorfelder der differentiellen geometrischen Örter von Umriß- und Flächenbedingungen	39
4.3.2	Lageuntersuchung der differentiellen geometrischen Örter von Umriß- und Flächenbedingungen.....	47
4.3.3	Konvergenzbereich für Umriß- und Flächenbedingungen	51
4.3.4	Erweiternde Überlegungen zum Konvergenzbereich von Umriß- und Flächenbedingung im \mathbb{R}^3	57
5	Bestimmung der Näherungswerte für Umrißpunkte	60
5.1	Transformation des Sehstrahls vom Bild- ins Modellsystem.....	60
5.2	Flächenunabhängige Lösungsansätze zur Bestimmung der Näherungswerte	61
5.3	Bestimmung der Näherungswerte für Flächen in Parameterdarstellung	62

5.4	Bestimmung der Näherungswerte für implizit algebraisch gegebene Flächen	67
5.5	Lösungsweg spezialisiert für implizit gegebene Quadriken.....	78
5.6	Bestimmung der Näherungswerte für explizit algebraisch gegebene Flächen	81
6	Aufbereitung der Theorie für ORIENT.....	82
6.1	Datenraumstruktur	82
6.2	Flächendarstellung in ORIENT:	84
6.3	Differentiale der fiktiven Umrißbedingung angepaßt an die Flächendarstellung von ORIENT	86
6.4	Bestimmung des Konvergenzbereiches.....	91
7	Anwendungsmöglichkeiten	95
8	Musterbeispiel anhand der Vermessung der Zwiebel und des Schaftes des Wiener Fernwärmeturms	97
8.1	Lagerung und Bestimmung des lokalen Systems	98
8.2	Messung der Umrißpunkte auf Schaft und Zwiebel.....	100
8.3	Bestimmung der Näherungswerte für die Umrißpunkte	101
8.4	Erzeugen von Schaft- und ZwiebelGESTALTen	103
8.5	Erzeugen von Schaft- und Zwiebel- SILHOUETTEn.....	105
8.6	Syntax und Strategie beim Ausgleich von SILHOUETTEn	106
8.7	Ergebnisse der Schaftvermessung	107
8.8	Ergebnisse der Zwiebelvermessung	112
8.8.1	Approximation mittels Kugel	112
8.8.2	Approximation mittels Rotationskardioide	114
8.8.3	Approximation mittels parabolischer Rotationskubik	118
8.8.4	Zusammenfassung	120
9	Zusammenfassung und Ausblick.....	121
10	Literaturverzeichnis.....	123

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2-1: Bedingung zwischen Umrißpunkt, Tangente und Kurve im \mathbb{R}^2	8
Abbildung 2-2: Umrißbedingung zwischen Normalen- und Sehstrahlvektor im \mathbb{R}^2	8
Abbildung 2-3: Umrißbedingung zwischen Fläche, Sehstrahl und Umrißpunkt im \mathbb{R}^3	9
Abbildung 2-4: Veranschaulichung von Beobachtungen und Unbekannten bei einer Umrißbeobachtung	10
Abbildung 3-1: Zusammenhang zwischen Bild- und Referenzkoordinatensystem	14
Abbildung 3-2: Zusammenhang zwischen Modell- und Referenzkoordinatensystem	15
Abbildung 3-3: Geometrische Darstellung der Minimalkriterien für die Umrißbeobachtung	21
Abbildung 4-1: Approximation einer Kurve durch Geraden	23
Abbildung 4-2: Normalenvektorfelder für ebenen Kugelschnitt der Umrißtypen E_1 links und E_2 rechts	40
Abbildung 4-3: Normalenvektorfelder für ebenen Kugelschnitt der Umrißtypen E_3 links und E_4 rechts	40
Abbildung 4-4: Normalenvektorfelder für ebenen Kugelschnitt der Flächentypen F_1 links und F_2 rechts	42
Abbildung 4-5: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt der Umrißtypen E_1 links und E_2 rechts	43
Abbildung 4-6: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt der Umrißtypen E_3 links und E_4 rechts	43
Abbildung 4-7: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt der Flächentypen F_1 links und F_2 rechts	44
Abbildung 4-8: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt der Umrißtypen E_1 links und E_2 rechts	44
Abbildung 4-9: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt der Umrißtypen E_3 links und E_4 rechts	45
Abbildung 4-10: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt der Flächentypen F_1 links und F_2 rechts	45
Abbildung 4-11: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt in allgemeiner Lage der Umrißtypen E_3 - E_4 links und der Flächentypen F_1 und F_2 rechts	46
Abbildung 4-12: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt in allgemeiner Lage der Umrißtypen E_3 - E_4 links und der Flächentypen F_1 und F_2 rechts	46
Abbildung 4-13: Darstellung der unterschiedlichen Lagen der diff. geom. Örter bei unterschiedlichen Näherungswerten für ebene Kugelschnitte	49
Abbildung 4-14: Darstellung der unterschiedlichen Lagen der diff. geom. Örter in einem ebenen Schnitte von Ellipsoid und Hyperboloid für einen allgemein gewählten Näherungspunkt	50
Abbildung 4-15: Erfolgreiche Konvergenz von Umriß- und Flächenbeobachtung	52
Abbildung 4-16: Konvergenzbereiche bei einem Kreis für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts	53

Abbildung 4-17: Konvergenzbereiche bei einem Kreis für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts	53
Abbildung 4-18: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 1. Hauptlage für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts	54
Abbildung 4-19: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 1. Hauptlage für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts	54
Abbildung 4-20: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 2. Hauptlage für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts	55
Abbildung 4-21: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 2. Hauptlage für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts	55
Abbildung 4-22: Konvergenzbereiche bei einer Hyperbel in 2. Hauptlage für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts	56
Abbildung 4-23: Konvergenzbereiche bei einer Hyperbel in 2. Hauptlage für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts	56
Abbildung 4-24: Konvergenzbereich bei einer Hyperbel in 1. Hauptlage für E_1 mit F_1	57
Abbildung 4-25: Bestimmung des Schnittpunktes im \mathbb{R}^3 über Gemeinlot	58
Abbildung 5-1: Übersichtsskizze bei der Bestimmung des Näherungswerts für Flächen in Parameterdarstellung	63
Abbildung 5-2: Testpunktverteilung und Abstände zum Sehstrahl	65
Abbildung 5-3: Stellung von Fläche, Polarfläche und Sehstrahl zueinander	68
Abbildung 5-4: Stellung von Torus, Polarfläche und Sehstrahl zueinander	70
Abbildung 5-5: Grund- und Aufriß eines Torus	71
Abbildung 5-6: Übersichtsskizze bei der Bestimmung des Näherungswerts für implizit gegebene Flächen	76
Abbildung 6-1: Konvergenzbereiche eines Torus, geschnitten mit der Grundebene, für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts	94
Abbildung 6-2: Konvergenzbereiche eines Torus, geschnitten mit der Grundebene, für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts	94
Abbildung 7-1: OMV Rohrleitungssystem	95
Abbildung 7-2: Zwiebel des Wiener Fernwärmeturms	95
Abbildung 8-1: Wiener Fernwärmeturm	97
Abbildung 8-2: Lageplan der Aufnahmesituation	98
Abbildung 8-3: Turm mit gemessenen Umrißpunkten	101
Abbildung 8-4: Meridianschnitt eines Kegels	107
Abbildung 8-5: Meridianschnitt eines Kegels	109
Abbildung 8-6: Meridianschnitt eines um die x_3 -Achse rotierenden Kreises	112
Abbildung 8-7: Meridianschnitt einer um die x_3 -Achse rotierenden Kardioide	114
Abbildung 8-8: Meridianschnitt einer um die x_3 -Achse rotierenden parabolischen Kubik	118
Abbildung 9-1: Fernwärmeturm und automatisch detektierter Umriß des Turmes	121

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1-1: Allgemeine Schreibweise von mathematischen Symbolen	5
Tabelle 1-2: Schreibweise von mathematischen Symbolen in unterschiedlichen Koordinatensystemen	6
Tabelle 2-1: Gegenüberstellung von Beobachtungen und Unbekannten bei einer Umrißbeobachtung	10
Tabelle 2-2: Gegenüberstellung von Beobachtungen und Unbekannten bei einer Umrißbeobachtung	11
Tabelle 3-1: Die Verbesserungsarten beim überbestimmten System Umrißpunkt	21
Tabelle 4-1: Farbcodes für die Vektorfelddarstellungen und für die diff. geom. Örter	39
Tabelle 4-2: Zusammengehörigkeiten von Umriß- und Flächentypen	51
Tabelle 6-1: Zusammenhänge zwischen Minimumkriterium und „Subtyp“ des ADPAR-Raumes	83
Tabelle 6-2: Zusammenhänge zwischen expliziter und impliziter Flächendarstellung und „Subtyp“ der GESTALT	86
Tabelle 8-1: Aufnahmeverteilung über die Standpunkte	99
Tabelle 8-2: Auflistung der in ORIENT erzeugten Räume zur Bestimmung der Orientierungen vor der SILHOUETTEN-Berechnung	99
Tabelle 8-3: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT vor der SILHOUETTEN-Berechnung	100
Tabelle 8-4: Punktnummernschema von Umrißpunkten	100
Tabelle 8-5: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Kegelberechnung	108
Tabelle 8-6: Parameter des Schaftes approximiert durch einen Kegel	108
Tabelle 8-7: Fehler des durch einen Kegel approximierten Schaftes	108
Tabelle 8-8: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Kegelberechnung	111
Tabelle 8-9: Parameter des Schaftes approximiert durch einen Kegel	111
Tabelle 8-10: Fehler des durch einen Kegel approximierten Schaftes	111
Tabelle 8-11: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Kugelberechnung	113
Tabelle 8-12: Parameter der durch eine Kugel approximierten Zwiebel	113
Tabelle 8-13: Fehler der durch eine Kugel approximierten Zwiebel	113
Tabelle 8-14: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Rotationskardioideberechnung	115
Tabelle 8-15: Parameter der durch eine Rotationskardioide approximierten Zwiebel	115
Tabelle 8-16: Fehler der durch eine Rotationskardioide approximierten Zwiebel	115
Tabelle 8-17: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Rotationskardioideberechnung (mit x_3 Faktor)	117
Tabelle 8-18: Parameter der durch eine Rotationskardioide mit x_3 Faktor approximierten Zwiebel	117
Tabelle 8-19: Fehler der durch eine Rotationskardioide mit x_3 Faktor approximierten Zwiebel	117

Tabelle 8-20: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Rotationskubikberechnung.....	119
Tabelle 8-21: Parameter der Zwiebel approximiert durch eine parabolische Rotationskubik	119
Tabelle 8-22: Fehler der Zwiebel approximiert durch eine parabolische Rotationskubik	119

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellung – Motivation

Das Grundprinzip der Photogrammetrie ist es, aus analogen oder digitalen Bildern das räumliche Objekt zu bestimmen [Kraus, 1994]. Das Einsatzgebiet erstreckt sich von Nahbereichsanwendungen, Aufnahmen von Werkstücken oder Fassaden, bis hin zur Fernerkundung der Erdoberfläche vom Weltraum aus.

Um jedoch aus den Bildern das Objekt rekonstruieren zu können, müssen die Äußeren Orientierungen der Bilder bekannt sein. Unter der Äußeren Orientierung versteht man die Rekonstruktion der Aufnahmesituation, also die Bestimmung des Aufnahmeortes und die Stellung der Kamera im Raum bezüglich des Objektes.

Die wichtigsten Orientierungsverfahren sind [Kraus, 1994]:

- Einzelbildorientierung mit Hilfe von Paßpunkten oder Paßlinien: Punkte, deren Positionen, bzw. Linien, deren Verläufe zuvor bestimmt wurden.
- Die relative Orientierung mehrerer Bilder durch Verknüpfungspunkte bzw. -linien. (Homologe Objektpunkte oder Linien, die in mehreren Bildern gemessen wurden, jedoch sind ihre Koordinaten bzw. ihre Linienparameter im übergeordneten System nicht bekannt.)
- Die absolute Orientierung eines aus mehreren relativ orientierten Bildern gebildeten Modells durch Paßpunkte oder Paßlinien.
- Die hybride Bündelblockausgleichung als gleichzeitige Durchführung der beiden zuletzt genannten Methoden.

Nach der Bestimmung der Äußeren Orientierungen für die Kamerastandpunkte können die weiteren gewünschten Neupunkte, z.B. mittels räumlichen Vorwärtsschnittes, bestimmt werden.

In dieser Arbeit geht es darum, auch Umrißpunkte für die Objektrekonstruktion zu benutzen. Umrißpunkte sind solche Punkte, welche im Bild die Grenze zwischen dem Objekt und dem Hintergrund darstellen. Dabei gibt es zwei Arten von Umrißpunkten:

- a) wenn seine Tangentialebene ans Objekt im Bild projizierend erscheint (z.B. Kugel).
- b) wenn sie auf einer Kante des Objektes liegen, und diese das Bild des Objektes begrenzt (z.B. Würfel).

Wird in dieser Arbeit von Umrißpunkten gesprochen, so handelt es sich immer um solche vom Typ „Tangentialebene“, weil man die Eigenschaft, daß die Tangentialebene projizierend erscheint, benutzt, um die Umrißbedingung aufzustellen!

Der Typ „Kante“ wurde bereits früher in ORIENT [IPF, 1994] verwirklicht und wird dort durch Geraden, Polynome oder Splines modelliert.

In der analytischen Photogrammetrie werden Paßpunkte, Verknüpfungspunkte und Umrißpunkte vom Beobachter im Photo gemessen. In der digitalen Photogrammetrie ist man bestrebt, soviel wie möglich ohne Einwirkung eines Operators bestimmen zu lassen. In vielen Fällen kommt es aber aufgrund ungeeigneter Textur des Objektes zu einer falschen Identifizierung des Punktes. Beim Messen von Umrißpunkten ist diese

Gefahr geringer, da sich der Hintergrund meist deutlich vom Objekt abhebt. Weiters ist auch keine falsche Zuordnung gemessener Umrißpunkte in verschiedenen Photos möglich (es wird keine durchgeführt), weil sich der Umriß - von jeder Blickrichtung aus - aus anderen Objektpunkten zusammensetzt. Es besteht aber die Gefahr, einen beobachteten Umrißpunkt der falschen Fläche am Objekt zuzuordnen. Diese Gefahr ist besonders groß, wenn sich ein - in sich abgegrenztes Objekt - aus mehreren einzelnen Teilflächen zusammensetzt. Aus diesen Gründen ergibt sich für die digitale Bildverarbeitung der Vorteil, daß diese Methode sicherer und mit weniger Einwirkung des Operators erfolgen kann, wenn sichergestellt ist, daß es sich bei den gemessenen Punkten um Umrißpunkte der gewünschten Fläche handelt. Umrißpunkte sind von besonderer Wichtigkeit, wenn die Fläche keine oder nur unzureichende Textur aufweist, und es auch nicht möglich ist, Markierungen auf ihr zu befestigen, um Objekt- oder Verknüpfungspunkte einzumessen.

In dieser Arbeit werden für unterschiedliche Flächendarstellungen die dafür nötigen mathematischen Formeln allgemein abgeleitet, und Teile davon speziell für das Programmpaket ORIENT aufbereitet.

1.2 Erklärung von Fachausdrücken

Äußere Orientierung:

Sie legt die Position und Stellung der Kamera im Referenzkoordinatensystem fest.
[Kraus, 1994, p15ff]

DHM:

In einem digitalen Höhenmodell (DHM) wird die Form der Geländeoberfläche modelliert und gespeichert.
[Kraus, 2000]

Gemeinlot zweier windschiefen (nicht schneidenden) Geraden im \mathbb{R}^3 :

Als Gemeinlot zweier Geraden bezeichnet man die kürzeste Verbindung dieser beiden Geraden.

Innere Orientierung:

Sie legt die innere Geometrie einer Meßkammer fest. Dazu gehört die Kammerkonstante und die Bildkoordinaten des Hauptpunktes.
[Kraus, 1994, p29ff]

Kollinearitätsbeziehung:

Unter der Kollinearitätsbeziehung versteht man, daß zum Zeitpunkt der Aufnahme Objektpunkt, Bildpunkt und Aufnahmeort auf einer Geraden liegen.
[Kraus, 1996, p270]

ORIENT:

ORIENT ist ein universelles photogrammetrisches Ausgleichungssystem.
[Kager, 1980] oder [Kager, 1989]

Paßpunkt:

Paßpunkte sind Punkte, deren Koordinaten im Objektkoordinatensystem bekannt sind.
[Kraus, 1994, p15ff]

Paßlinie:

Eine Paßlinie ist im globalen System bekannt und kann im Bild identifiziert werden. Sie kann entweder in Form einer Punktfolge oder in Form der Kurvenparameter festgelegt sein.

[Kraus, 1996, p68]

Quadrik:

Quadriken sind algebraische Flächen 2.Ordnung.

Scheinbarer Umriß:

Das Abbild des Wahren Umrisses z.B. in einem Photo.

SCOP:

SCOP, Stuttgart COntour Program, ist ein computerunabhängiges Programmsystem zur Berechnung und Verwendung digitaler Geländemodelle.

[IPF, 1997]

Umrißpunkt:

Ein Punkt, dessen Tangentialebene vom Aufnahmeort aus projizierend erscheint.

Wahrer Umriß:

Der Wahre Umriß, bezüglich eines Standpunktes, setzt sich aus jenen Punkten am Objekt zusammen, deren Tangentialebenen vom Aufnahmeort aus projizierend erscheinen.

1.3 Schreibweise mathematischer Formeln

Berechnungen finden in dieser Publikation in einem linearen orthonormalen Vektorraum (\mathbb{R}^3) statt [Netz, 1992, p35]. Elemente aus einem Vektorraum werden als Vektoren bezeichnet.

Im Gegensatz zu anderen Publikationen wird hier zwischen Punkten, die durch Ortsvektoren repräsentiert werden, und anderen Elementen des Vektorraumes in der Notation unterschieden. Grund dafür ist die größere Übersichtlichkeit der Gleichungen und auch die unterschiedliche Bedeutung: Ortsvektoren legen einen Punkt im System fest, die „restlichen“ Vektoren eine bestimmte Richtung, die z.B. aus der Differenz zweier Ortsvektoren berechnet werden kann. Ortsvektoren werden im folgenden „Punkte“ genannt und - an die geometrische Darstellung angelehnt - mit fettgedruckten Großbuchstaben bezeichnet. In Kapitel 1.3.2 werden alle mathematischen Elemente und deren Schreibweisen in der Tabelle 1-1 übersichtlich zusammengefaßt.

Die Tensornotation wird in dieser Arbeit der Matrizenschreibweise vorgezogen, weil Differentiale von Matrizen - 3-fach indizierte Größen - einfacher dargestellt werden können.

1.3.1 Einführung in die Tensorrechnung

In diesem Kapitel wird nur auf die für diese Arbeit wichtigen Grundkenntnisse der Tensornotation eingegangen. Detailliertere Ausführungen findet man in [Bretterbauer, 1995] oder auch in [Schouten, 1924]. Die Tensorrechnung arbeitet direkt mit den einzelnen Elementen der Vektoren, Matrizen oder allgemein mit den Elementen der mehrdimensionalen Größen. Die einzelnen Elemente dieser Größen werden direkt mit Hilfe einer Indizierung angesprochen, z.B. ein Vektor **a** wird in Tensornotation wie folgt

dargestellt: a_i . Man unterscheidet zwischen ko-varianter (Index unten) und kontra-varianter (Index oben) Darstellung. Bei einem nicht-orthogonalen System liegt auch eine unterschiedliche geometrische Interpretation von ko- und kontra-variant vor. Da in dieser Arbeit aber nur mit orthogonalen Systemen gearbeitet wird, existiert hier dieser Unterschied nicht. Diese unterschiedlichen Darstellungsweisen in Verbindung mit der Einstein'schen Summenkonvention stellen eine sehr übersichtliche und einfache Methode zur Notation für Formeln dar. Die Einstein'sche Summenkonvention besagt, daß über gleichnamige Indizes in ko- und kontra-varianter Darstellung summiert wird. Ein Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} wird in folgender Weise angeschrieben:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i a_i b_i = a^i b_i$$

Der Summationsindex i wird als stummer Index bezeichnet, weil er nach der Summation verschwindet. Ein Index, der hingegen keine Summation bewirkt, heißt freier Index. Indizes in lateinischer Notation (i, j, k, \dots) laufen in dieser Arbeit von 1 bis 3, jene in griechischer Notation ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) von 1 bis 2.

Eine Ableitung von einer n -fach indizierten Größe liefert allgemein eine $n+1$ -fach indizierte Größe. Der dadurch entstandene Index wird durch einen Beistrich von den anderen getrennt. Ein Vektor \mathbf{a} , nach seinen Komponenten abgeleitet, liefert eine Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} = a_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x^1} & \frac{\partial a_1}{\partial x^2} & \frac{\partial a_1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x^1} & \frac{\partial a_2}{\partial x^2} & \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x^1} & \frac{\partial a_3}{\partial x^2} & \frac{\partial a_3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

Ob die Ableitungen ko- oder kontra-variant angeschrieben werden ist egal, es sollte aber darauf geachtet werden, daß beim Anschreiben des totalen Differentials kein Widerspruch entsteht:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = a_{i,j} \quad \text{weil} \quad \partial a_i = a_{i,j} \partial x^j$$

Das Kronecker- δ in der Tensornotation ist das Pendant zur Einheitsmatrix in der Matrizenschreibweise:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der ε Tensor ist ein antisymmetrischer Tensor und wird unter anderem verwendet, um ein Kreuzprodukt zweier Vektoren darzustellen:

$$\varepsilon^i{}_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \\ 0 & \text{für alle übrigen} \end{cases}$$

$$n^i = \varepsilon^i{}_{jk} s^j v^k = \mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{v} \quad (1.3-1)$$

In der Matrizenrechnung benötigt man oft die Transponierte einer Matrix; in der Tensornotation wird die indizierte Größe nicht transponiert, sondern über den anderen Index verknüpft:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= A_i{}^k B_{kj} &= & \mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \\ D_{ij} &= A_i{}^k B_{jk} &= & \mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T \end{aligned}$$

Allgemein heißen Größen, die nur von einem Index abhängen, Systeme 1. Ordnung. Ein Vektor ist ein solches System. Ein Skalar ist hingegen ein System nullter Ordnung.

1.3.2 Symbolübersicht

In der folgenden Tabelle werden die Richtlinien für die Darstellung mathematischer Symbole zusammengefaßt.

Symbol in Text und Abbildungen	Symbol in Formeln	Erklärung
$\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3$		Lineare Vektorräume: der hochgestellte Index gibt die Dimension an
m, u	m, u	Skalare: Größen nullter Ordnung
\mathbf{P}, \mathbf{U}	P_i, U^i	Punkte: Größen 1. Ordnung
\mathbf{A}, \mathbf{R}	A_{ij}, R^{ik}	Matrizen: Größen 2. Ordnung
\mathbf{b}, \mathbf{s}	b_i, s^i	Vektoren: Größen 1. Ordnung
${}^0\mathbf{b}, {}^0\mathbf{s}$	${}^0b_i, {}^0s^i$	Normierte Vektoren: Norm = 1
Φ, Θ, Γ		Flächen (außer Ebenen): Griechische Großbuchstaben
$\varepsilon, \tau, \theta, \vartheta$		Ebenen, Kurven und Terme, die zur Flächendarstellung dienen: Griechische Kleinbuchstaben
//		Parallel
$x \in [a, b]$		Die Zahl x ist Element des geschlossenen Intervalls mit den Grenzen a und b
	$:=$	Wird bei Iterationen verwendet und stellt eine Wertzuweisung dar

Tabelle 1-1: Allgemeine Schreibweise von mathematischen Symbolen

In der Photogrammetrie werden oft mehrere Koordinatensysteme gleichzeitig verwendet. Daher bedarf es einer eindeutigen symbolischen Zuordnung, um die Systeme nicht untereinander zu vermischen. Die Elemente in den jeweiligen Systemen werden durch die jeweiligen Anfangsbuchstaben des Systems dargestellt.

Symbol in Text und Abbildungen	Symbol in Formeln	Erklärung
\mathbf{rP}, \mathbf{rU}	${}_R P_i, {}_R U^i$	Punkte im Referenzsystem
\mathbf{mA}, \mathbf{mR}	A_{ij}, R^{ik}	Matrizen: Größen 2. Ordnung
\mathbf{Bb}, \mathbf{BS}	${}_B b_i, {}_B s^i$	Vektoren im Bildsystem
${}_M \Phi, {}_M \Theta, {}_M \Gamma$		Flächen im Modellsystem
${}_M \varepsilon, {}_R \varepsilon, {}_B \tau, {}_R \theta, {}_R \vartheta$		Ebenen, Kurven und Terme in verschiedenen Koordinatensystemen

Tabelle 1-2: Schreibweise von mathematischen Symbolen in unterschiedlichen Koordinatensystemen

Die systemanzeigenden Indizes können leicht von jenen der Tensornotation unterschieden werden. Die einen werden groß und links vom Symbol, die anderen klein und rechts geschrieben. In einigen Kapiteln wird auf die systemanzeigenden Indizes verzichtet, um eine bessere Lesbarkeit zu erzielen. Es wird natürlich in diesen Kapiteln speziell darauf hingewiesen.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Überlegungen

Betrachtet man eine Fläche, von der die Gestalt bekannt ist, so ist nicht jeder Punkt auf der Fläche ein Umrißpunkt bezüglich des Beobachtungsortes. Von anderen Beobachtungspunkten aus werden andere Punkte zu Umrißpunkten. So bilden immer andere Punkte der Fläche den wahren Umriß in Abhängigkeit des Beobachtungsortes. Aus dieser Gegebenheit kann man Rückschlüsse auf die Lage des Beobachtungspunktes relativ zur Fläche ziehen.

Kennt man den Beobachtungspunkt, so kann auf Grund des Umrisses auf die Gestalt der Fläche geschlossen werden. Aus mathematischer Sicht muß hier ein überbestimmtes System aus Fläche, Umrißpunkt und Beobachtungspunkt vorliegen, da nicht jeder Sehstrahl automatisch zu einem Umrißpunkt der Fläche zeigt. Man spricht von einem überbestimmten System, wenn mehr Gleichungen als Unbekannte vorliegen.

Geht man davon aus, daß sowohl die Fläche, der Beobachtungspunkt und die Richtung des Sehstrahls bekannt sind, so läßt sich aus dieser Konstellation ein gewöhnlicher Flächenpunkt eindeutig¹ durch Schnitt des Sehstrahls mit der Fläche berechnen. Den drei unbekannten Koordinaten des Punktes stehen die bekannten (beobachteten) zwei Bildkoordinaten und eine Flächengleichung gegenüber. Wurde aber nicht ein allgemeiner Flächenpunkt beobachtet sondern ein Umrißpunkt, so kann man vermuten, daß eine weitere Bedingung vorliegen muß.

2.2 Ableitung der Umrißbedingung

Umrißpunkte sind besondere Punkte der Fläche. Es muß eine mathematische Bedingung zwischen der Fläche, dem Beobachtungspunkt und dem Umrißpunkt bestehen. Zuerst soll auf dieses Problem kurz im \mathbb{R}^2 eingegangen werden, da anschließend der Übergang in den \mathbb{R}^3 leichter fällt. Ein „Umrißpunkt“ einer Kurve θ im \mathbb{R}^2 bezüglich eines Punktes \mathbf{V} (Viewpoint) liegt dann vor, wenn die Tangente t im Umrißpunkt \mathbf{U} auch \mathbf{V} enthält, siehe Abbildung 2-1. Eine solche Bedingung wird in der Schule allgemein zwischen einem Kreis in Hauptlage und einer Tangente abgeleitet und ist als Berührbedingung bekannt [Kraft, 1974, p13].

¹ Eindeutig ist hier so zu verstehen, daß den 3 Unbekannten 3 Gleichungen gegenüberstehen und nicht, daß bei einem Schnitt von Sehstrahl und Fläche die Lösung eindeutig sein muß.

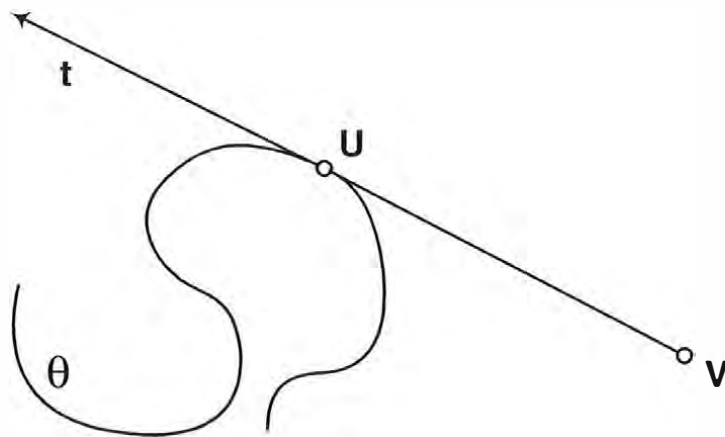


Abbildung 2-1: Bedingung zwischen Umrißpunkt, Tangente und Kurve im \mathbb{R}^2

Das Ziel ist es, eine möglichst allgemeine Formulierung der Bedingung für beliebige Kurven in Parametern der Kurve und des Beobachtungspunktes zu finden. Ausgehend von der Eigenschaft, daß der Punkt U genau dann ein Umrißpunkt bezüglich V ist, wenn die Tangente t im Punkt U auch V enthält. Aus dieser Eigenschaft erkennt man, daß der Sehstrahlvektor s ($s_\alpha = U_\alpha - V_\alpha$) normal auf den Normalenvektor \mathbf{n} der Kurve im Punkt U steht, siehe Abbildung 2-2.

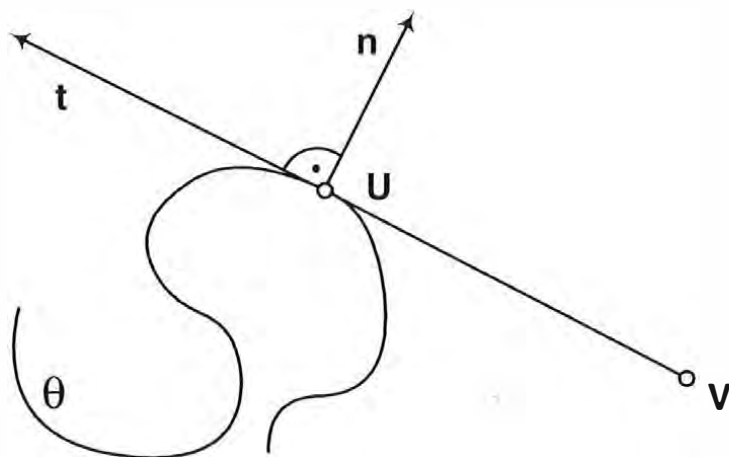


Abbildung 2-2: Umrißbedingung zwischen Normalen- und Sehstrahlvektor im \mathbb{R}^2

Diese Bedingung läßt sich nun sehr einfach über das innere Produkt der beiden Vektoren (\mathbf{n}, \mathbf{s}) in eine mathematische Formel kleiden:

$$n^\alpha s_\alpha = 0$$

(2.2-1)

Könnte man die Gleichung (2.2-1) vom \mathcal{R}^2 auf den im \mathcal{R}^3 erweitern, so hätte man eine passende Formulierung für die Umrißbedingung gefunden. Im \mathcal{R}^3 tritt anstelle einer Kurve θ eine Fläche Φ . Es liegt ein Umrißpunkt U der Fläche bezüglich des Beobachtungspunktes V dann vor, wenn die Tangentialebene τ in U auch V enthält. Diese Bedingung läßt sich analog zum Fall \mathcal{R}^2 wieder folgendermaßen formulieren: U ist Umrißpunkt der Fläche Φ bezüglich des Beobachtungspunktes V , wenn der Normalenvektor \mathbf{n} der Fläche normal auf den Sehstrahlvektor \mathbf{s} steht, siehe Abbildung 2-3.

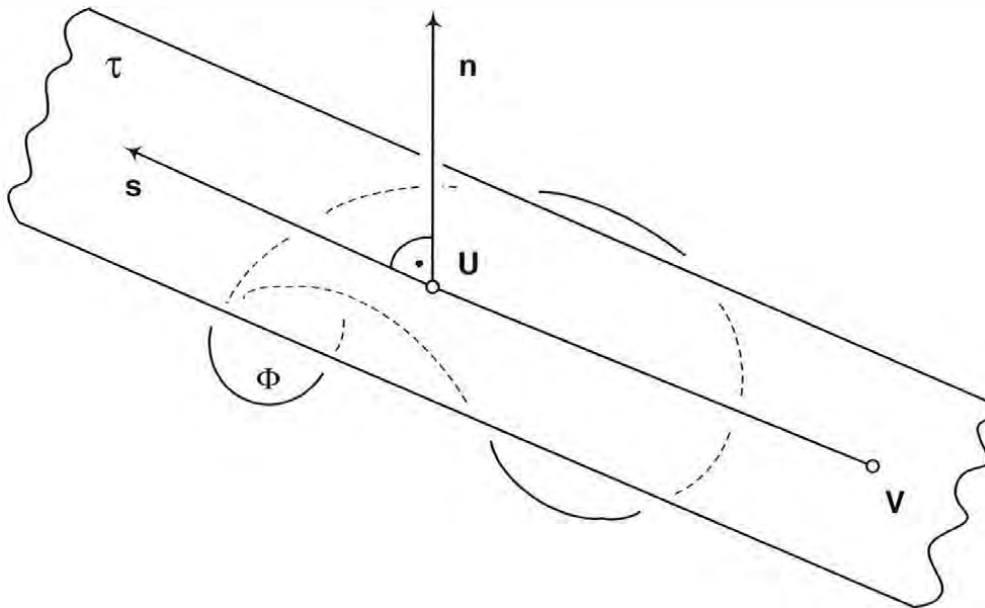


Abbildung 2-3: Umrißbedingung zwischen Fläche, Sehstrahl und Umrißpunkt im \mathcal{R}^3

Die Formel (2.2-1) ist daher auch im \mathcal{R}^3 anwendbar. Daher kann anstelle des Index α der Index i geschrieben werden.

$$n^i s_i = 0$$

(2.2-2)

2.3 Das überbestimmte System bei Umrißpunkten

Die in Kapitel 2.2 abgeleitete Bedingungsgleichung für einen Umrißpunkt bewirkt, daß das Gleichungssystem überbestimmt wird. Bei einem überbestimmten System liegen mehr Beobachtungen bzw. Bedingungen vor als Unbekannte. Ein sehr anschaulicher

Zugang, um zu den Parametern zu gelangen, ist der folgende, siehe Abbildung 2-4: Mit den Parametern u und v kann man den Punkt $U(u,v)$ auf der Fläche Φ beschreiben mit k den Punkt $W(k)$ am Sehstrahl g . Die Parameter u , v und k beschreiben genau dann eine „Umrißsituation“, wenn die beiden Kollinearitätsgleichungen in Verbindung mit den beobachteten Bildkoordinaten [Kraus, 1994, p14ff], die in Kapitel 2.2 abgeleitete Umrißbedingung und die Bedingung, daß U in der Normalebene zu g durch W liegt, erfüllt sind. Bildlich läßt sich die Suche nach den Unbekannten u , v und k so veranschaulichen: Man stelle sich vor, man befinde sich am Sehstrahl und schiebe eine Normalebene zu g vor sich her und suche gleichzeitig dazu jenen Punkt auf der Fläche, der einerseits in der Normalebene liegt und dessen Normalvektor andererseits normal auf g steht.

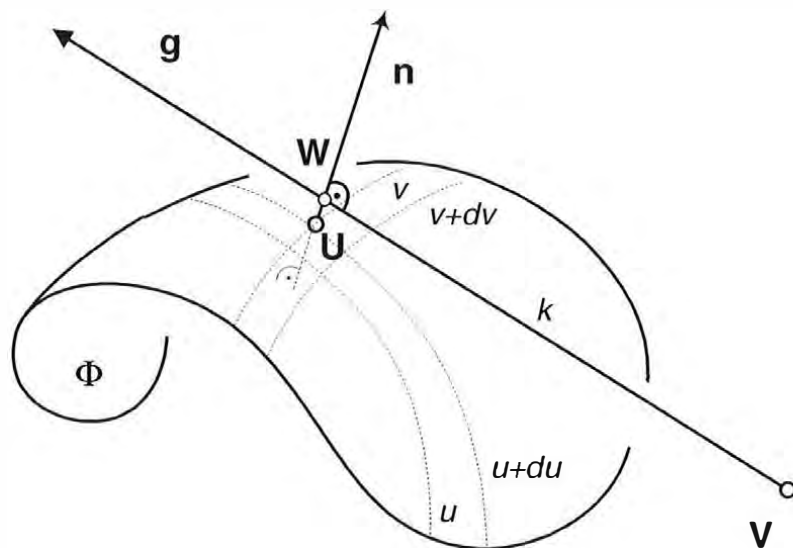


Abbildung 2-4: Veranschaulichung von Beobachtungen und Unbekannten bei einer Umrißbeobachtung

Diese Konstellation aus Bedingungen und Unbekannten ist in Tabelle 2-1 zusammengefaßt.

Beobachtungen	Anzahl	Unbekannte	Anzahl
Gemessene Bildkoordinaten des Umrißpunktes U	2	Flächenparameter u und v	2
U liegt in der Normalebene zu g durch W	1	Sehstrahlparameter k	1
Fiktive Umrißbeobachtung des Umrißpunktes U	1		
Σ	4	Σ	3

Tabelle 2-1: Gegenüberstellung von Beobachtungen und Unbekannten bei einer Umrißbeobachtung

Im Hinblick auf die Einbindung in das Programm ORIENT wurde ein anderer (analytischer) Zugang zu den Beobachtungen und Unbekannten des Gleichungssystems bewählt:

Als Unbekannte werden die drei Raumkoordinaten des Umrißpunktes **U** eingeführt. Dem gegenüber stehen wieder die beiden Kollinearitätsgleichungen in Verbindung mit den beobachteten Bildkoordinaten [Kraus, 1994, p14ff], die vom Umrißpunkt erfüllt werden müssen. Weiters muß **U** auch die Flächengleichung [Kraus, 1996, p33ff] und die Umrißbedingung (2.2-2) erfüllen. Diese Konstellation aus Bedingungen und Unbekannten ist in Tabelle 2-2 zusammengefaßt. Wiederum stehen den drei Unbekannten 4 Bedingungen gegenüber.

Beobachtungen	Anzahl	Unbekannte	Anzahl
Gemessene Bildkoordinaten des Umrißpunktes U	2	3D-Raumkoordinaten des Umrißpunktes U	3
Fiktive Flächenbeobachtung des Umrißpunktes U	1		
Fiktive Umrißbeobachtung des Umrißpunktes U	1		
Σ	4	Σ	3

Tabelle 2-2: Gegenüberstellung von Beobachtungen und Unbekannten bei einer Umrißbeobachtung

Man spricht hier von „fiktiven“ Flächen- und Umrißbeobachtungen, weil sie nicht direkt beobachtet werden wie die Bildkoordinaten, sondern auf theoretischem Wissen beruhen. Umrißpunkte müssen nicht zwingend durch photogrammetrische Methoden beobachtet werden, sie können auch mittels eines Theodolits beobachtet werden. Hier treten anstelle der beiden gemessenen Bildkoordinaten ein Horizontalwinkel und ein Vertikalwinkel, die in diesem Fall die Richtung des Sehstrahles festlegen.

Wie aus Tabelle 2-1 bzw. Tabelle 2-2 hervorgeht, würde ein gemessener Umrißpunkt eine Überbestimmung liefern. Die Behauptung, daß ein Umrißpunkt „genau“ eine Überbestimmung liefert, ist nicht ganz exakt. Der Grund für diese Unexaktheit liegt in der Art und Weise wie nicht-lineare überbestimmte Systeme in der Photogrammetrie gelöst werden. Aus Kapitel 4, in dem das Lösen derartiger Systeme ausführlich behandelt wird, geht hervor, daß die nicht-linearen Gleichungen durch lineare Gleichungen ersetzt werden. Betrachtet man das Gleichungssystem im ausiterierten (=gelösten) Zustand, so ergibt sich folgende Situation: Die Linearisierung der fiktive Flächenbeobachtung ist die Tangentialebene im Umrißpunkt, der Schnitt aus den beiden linearisierten Kollinearitätsgleichungen ergibt den Sehstrahl, und die linearisierte Umrißbeobachtung liefert eine Ebene, die normal auf den Sehstrahl steht und den Umrißpunkt enthält. Würde eine „herkömmliche“ Überbestimmung vorliegen, so könnte eine beliebige linearisierte Gleichung weggelassen werden. Würde man hier die Umrißbeobachtung weglassen, so könnte der Umrißpunkt nicht aus dem Schnitt der anderen drei Gleichungen bestimmt werden, da der Sehstrahl in der Tangentialebene bzw. parallel zu ihr liegt. Daraus folgt, daß die Umrißbedingung eine außerordentliche Stellung in diesem System hat. Sie ist nicht durch die anderen drei ersetzbar und wird daher auch exakt erfüllt, da es zu keinem

Widerspruch kommen kann. Die Überbestimmung liegt genau genommen in den beiden Kollinearitätsgleichungen gemeinsam mit der fiktiven Flächenbeobachtung.

3 Aufbereitung der Umrißbedingung für photogrammetrische Zwecke

3.1 Zusammenführung photogrammetrischer Koordinatensysteme

In der Photogrammetrie arbeitet man mit mehreren Koordinatensystemen. In dieser Arbeit wird ein übergeordnetes System verwendet, das Referenzsystem (Index R), in dem alle anderen eingebettet werden. Weiters gibt es Bildkoordinatensysteme (Index B), in denen die Bildkoordinaten unter anderem auch von den Umrißpunkten, gemessen werden, und Modellsysteme (Index M), in denen die Flächen dargestellt werden. Um die Umrißbedingung, die sowohl Elemente aus dem Modellsystem als auch aus dem Bildsystem enthält, formulieren zu können, müssen zuerst die Koordinatensysteme ineinander übergeführt werden. Die Grundgleichung dafür ist die räumliche Ähnlichkeitstransformation [Kraus, 1996 p14ff], die im folgenden - in der Notation an die Anwendung dieser Arbeit angepaßt - angeschrieben wird.

3.1.1 Transformation vom Bildkoordinatensystem ins Referenzkoordinatensystem

Die Stellung der beiden Systeme ist in Abbildung 3-1 dargestellt.

Die Transformationsgleichung für einen Punkt **X** lautet:

$$\begin{pmatrix} {}_R X^i - {}_R V^i \end{pmatrix} = {}_B m_B R^i_j \begin{pmatrix} {}_B X^j - {}_B V^j \end{pmatrix} \quad (3.1-1)$$

mit

$${}_B X^i = \begin{pmatrix} {}_B X^1 \\ {}_B X^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_B V^j = \begin{pmatrix} {}_B V^1 \\ {}_B V^2 \\ {}_B V^3 \end{pmatrix}$$

- _RX**: Punkt im Referenzsystem
- _BX**: Punkt im Bildsystem
- _Bm**: Punkt-Maßstabszahl
- _BR**: Rotationsmatrix: Stellung des Bildkoordinatensystems zum Referenzsystem
- _RV**: Projektionszentrum (Viewpoint) im Referenzsystem
- _BV**: innere Orientierung der Meßkamera

Die Transformationsgleichung für einen Vektor s lautet:

$${}_R s^i = {}_B m_B R^i_{j_B} s^j$$

(3.1-2)

${}_R s$: Vektor im Referenzsystem
 ${}_B s$: Vektor im Bildsystem
 ${}_B R$: Rotationsmatrix der Ähnlichkeitstransformation
 ${}_B m$: Maßstabsfaktor

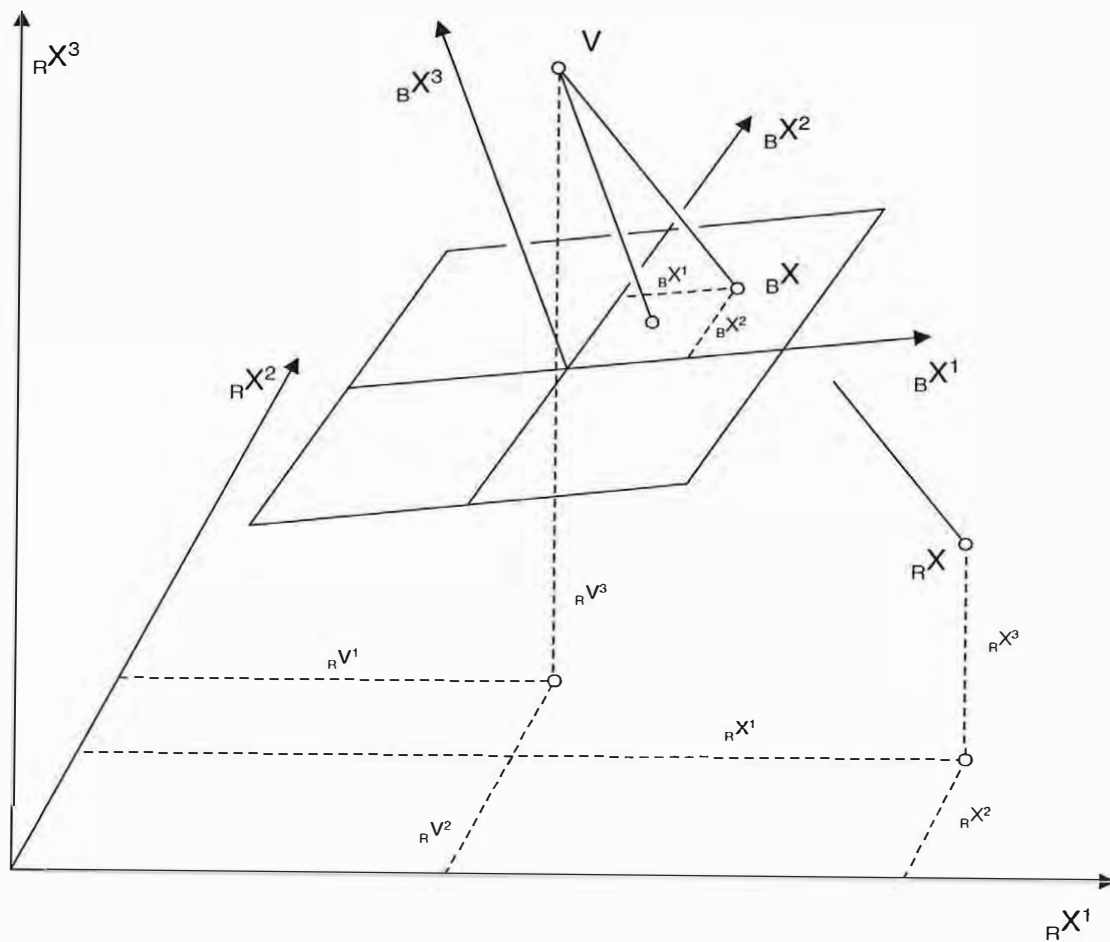


Abbildung 3-1: Zusammenhang zwischen Bild- und Referenzkoordinatensystem

3.1.2 Transformation vom Modellkoordinatensystem ins Referenzkoordinatensystem

Flächen können sowohl direkt im Referenzsystem (wie z.B. als DHM in SCOP), als auch in einem eigenen Modellsystem gegeben sein (wie z.B. die GESTALTen im Programmpaket ORIENT). Ist die Fläche in einem eigenen Modellsystem gegeben, so vereinfacht sich oft die analytische Darstellung der Fläche bei günstiger Wahl des Systems (kanonische Darstellung). Ein Nachteil hingegen ist, daß dieses System dann ins Referenzsystem transformiert werden muß.

Die Stellung von Modell- und Referenzkoordinatensystem ist in Abbildung 3-2 dargestellt.

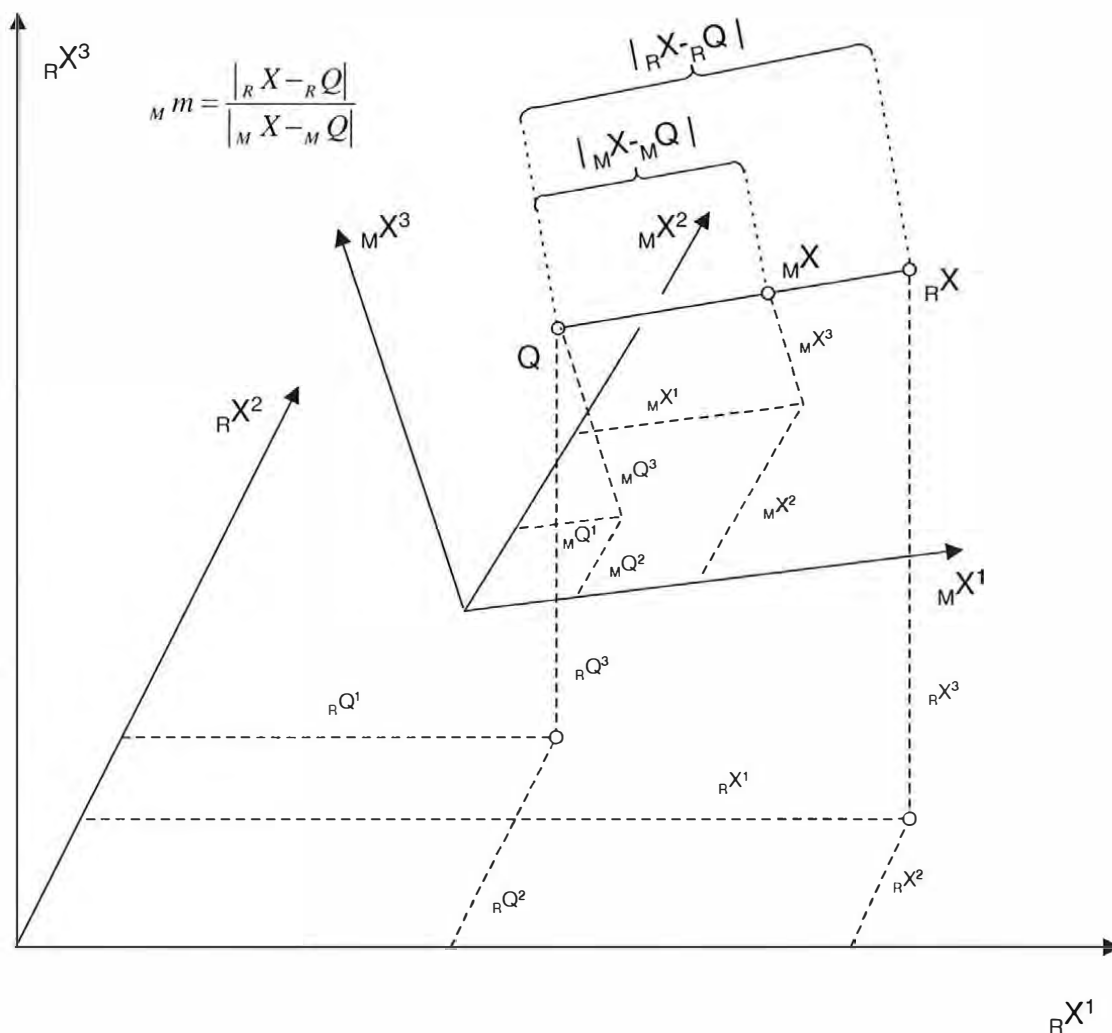


Abbildung 3-2: Zusammenhang zwischen Modell- und Referenzkoordinatensystem

Die Transformationgleichung für einen Punkt **X** lautet:

$$({}_R X^i - {}_R Q^i) = {}_M m {}_M R^i_j ({}_M X^j - {}_M Q^j) \quad (3.1-3)$$

${}_R \mathbf{X}$: Punkt im Referenzsystem
 ${}_M \mathbf{X}$: Punkt im Modellsystem
 ${}_M m$: Punkt-Maßstabszahl
 ${}_M \mathbf{R}$: Rotationsmatrix der Ähnlichkeitstransformation
 ${}_R \mathbf{Q}$: Bezugspunkt im Referenzsystem
 ${}_M \mathbf{Q}$: homologer Bezugspunkt zu ${}_R \mathbf{Q}$ im Modellsystem

Die Transformationgleichung für einen Vektor **s** lautet:

$${}_R s^i = {}_M m {}_M R^i_j {}_M s^j \quad (3.1-4)$$

${}_R \mathbf{s}$: Vektor im Referenzsystem
 ${}_M \mathbf{s}$: Vektor im Modellsystem
 ${}_M \mathbf{R}$: Rotationsmatrix der Ähnlichkeitstransformation
 ${}_M m$: Modellmaßstab

3.1.3 Transformation der Elemente der Umrißbedingung ins Referenzsystem

Die Umrißbedingung (2.2-2) ist eine allgemein - vom Koordinatensystem unabhängig - gültige Gleichung und lautet daher für das übergeordnete Referenzsystem:

$${}_R n^i {}_R s_i = 0 \quad (3.1-5)$$

Da der Flächennormalenvektor ${}_M \mathbf{n}$ im Modellkoordinatensystem und der Sehstrahlvektor ${}_B \mathbf{s}$ im Bildkoordinatensystem anfällt, müssen beide ins Referenzsystem transformiert werden.

Vektoren im Modellsystem werden nach (3.1-4) ins Referenzsystem transformiert. Der Normalenvektor ergibt sich daher zu:

$${}_R n^i = {}_M m {}_M R^i_j {}_M n^j \quad (3.1-6)$$

Für die Umrißbedingung wird der Vektor ${}_B \mathbf{s}$ ins Referenzsystem nach (3.1-2) übergeführt.

$${}_R s^i = {}_B m {}_B R^i_j {}_B s^j \quad (3.1-7)$$

Setzt man nun (3.1-6) und (3.1-7) in (3.1-5) ein, so ergibt sich die Bedingung im Referenzsystem in Elementen der anderen Systeme zu:

$${}_R n^i {}_R s^i = {}_M m {}_B m {}_M R^i_k {}_M n^k {}_B R^j_i {}_B s^j = 0 \quad (3.1-8)$$

3.2 Flächendarstellungen und Berechnung der Normalenvektoren

Die Berechnung des Flächennormalenvektors ${}_M \mathbf{n}$ und der Näherungskoodinaten des Umrißpunktes ${}_M \mathbf{U}$ (siehe Kapitel 5) hängt erheblich von der Darstellungsart der Fläche ${}_M \Phi$ ab. Daher werden die Vorgangsweisen für einige Flächendarstellungen angegeben. In den folgenden Unterkapiteln wird auf den Index für das Modellsystem verzichtet, weil alle Berechnungen in diesem System durchgeführt werden. Die Transformation vom Modellsystem zum Referenzsystem geschieht mit Formel (3.1-4).

3.2.1 In Parameterdarstellung gegebene Flächen

Die Fläche Φ sei wie folgt im Modellsystem gegeben (\mathbf{X} laufender Punkt der Fläche, abhängig von den Parametern u_1, u_2):

$$\Phi: \quad X^i = X^i(u_\alpha) \quad (3.2-1)$$

Man berechnet die partiellen Ableitungen nach u_1 und u_2 , diese Vektoren entsprechend den Tangentialvektoren an die Parameterlinien:

$$\left(\frac{\partial X^i}{\partial u_1}, \frac{\partial X^i}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial X^i}{\partial u_\alpha} = X^{i,\alpha} \quad (3.2-2)$$

Anschließend wird über das Kreuzprodukt (vektorielles Produkt) der Normalenvektor \mathbf{n} berechnet. In der Tensorrechnung wird ein Kreuzprodukt über den ε -Tensor dargestellt, siehe Kapitel 1.3.1:

$$n^i = \varepsilon^i_{jk} X^{j,1} X^{k,2} \quad (3.2-3)$$

3.2.2 Implizit algebraisch gegebene Flächen

Eine implizit gegebene Fläche Φ wird durch einen Term ϑ , der von den Koordinaten X^i abhängt, dargestellt. Liegt ein Punkt auf der Fläche, muß der Term ϑ verschwinden.

$$\Phi: \quad \vartheta(X^1, X^2, X^3) = 0 \quad (3.2-4)$$

Die Berechnung des Normalenvektors \mathbf{n} der Fläche Φ erfolgt, indem man den Gradienten von ϑ berechnet:

$$n^i = \text{grad}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial \vartheta}{\partial X_i} = \vartheta^i \quad (3.2-5)$$

3.2.3 Explizit algebraisch gegebene Flächen

Eine explizit algebraisch gegebene Fläche Φ ist der Graph einer Funktion θ , die von zwei Koordinaten X^1, X^2 abhängt.

$$\Phi: \quad X^3 = \theta(X^1, X^2) \quad (3.2-6)$$

Diese Fläche Φ läßt sich sowohl in eine implizit algebraische als auch in eine Fläche in Parameterform überführen. In welcher Darstellung man sie nun umrechnet, hängt davon ab, mit welcher Darstellung man das Umrißpunktproblem behandeln möchte.

3.2.3.1 Umwandlung von explizit algebraisch gegebenen Flächen in Parameterdarstellung:

Man setzt:

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv X^1 \\ u_2 &\equiv X^2 \\ \theta(u_1, u_2) &\equiv X^3 \\ X^i(u_\alpha) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta(u_1, u_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

Nun liegt die Fläche Φ in Parameterdarstellung vor.

Beispiel:

$$\begin{aligned} X^3 &= \theta(u_1, u_2) = (X^1)^2 - (X^2)^2 \\ X^i(u_\alpha) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ (u_1)^2 - (u_2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2.3.2 Umwandlung von explizit in implizit algebraisch gegebene Flächen:

Eine implizit algebraisch gegebene Fläche Φ hat folgende Gestalt:

$$\Phi: \quad \vartheta(X^1, X^2, X^3) = 0 \quad (3.2-8)$$

Die Umwandlung der explizit gegebenen Funktion ergibt sich zu:

$$\vartheta(X^1, X^2, X^3) = \theta(X^1, X^2) - X^3 = 0 \quad (3.2-9)$$

Beispiel:

$$X^3 = \theta(u_1, u_2) = (X^1)^2 - (X^2)^2$$

$$\theta(X^i) = (X^1)^2 - (X^2)^2 - X^3 = 0$$

3.3 Verbesserungsarten der fiktiven Umrißbedingung

Überbestimmte Systeme können im allgemeinen nicht in dem Sinn exakt gelöst werden, daß alle Beobachtungsgleichungen gleichzeitig erfüllt sind. Die Unbekannten des Gleichungssystems werden so bestimmt, daß die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen minimal wird [Kraus, 1994, p382ff]. Unter einer Verbesserung versteht man den Zuschlag, den man an die Beobachtung anbringen muß, damit sie exakt erfüllt ist. Beim überbestimmten System des Umrißpunktes treten 4 Beobachtungen auf, siehe Tabelle 2-2, die verbessert werden müssen. Bei Bildkoordinaten ist naheliegend, daß diese verbessert werden, weil sie auch wirklich beobachtet werden [Kraus, 1994, p14ff]. Bei einer fiktiven Flächenbeobachtung (3.2-8), die in impliziter Form vorliegt, ist das nicht mehr so offenkundig. In diesem Fall würde man die fiktive „Null“ beobachten und verbessern, hier fehlt aber eine anschauliche Deutung. Sinnvoll wäre es, den kürzesten Abstand zur Fläche zu verbessern, was auch in ORIENT geschieht [Kager, 2000]. Bei der fiktiven Umrißbeobachtung, wie in Kapitel 2.2 abgeleitet, würde das innere Produkt verbessert werden:

$$E_1: \quad n^i s_i = 0 + v \quad (3.3-1)$$

Doch so wie bei der Flächenbeobachtung fehlt auch hier eine anschauliche Interpretation. Geometrisch anschauliche Verbesserungen wären, siehe Abbildung 3-3: Die Normalprojektion von **s** auf **n**,

$$E_2: \quad \frac{n^i s_i}{\sqrt{n^j n_j}} = 0 + v_n \quad (3.3-2)$$

Die Normalprojektion von **n** auf **s**

$$E_3: \quad \frac{s^i n_i}{\sqrt{s^j s_j}} = 0 + v_s \quad (3.3-3)$$

Die Abweichung vom Rechten Winkel

$$E_4: \frac{n^i s_i}{\sqrt{n^j n_j} \sqrt{s^j s_j}} = \cos(90^\circ + v) = -\sin(v) \doteq 0 - v_w$$

(3.3-4)

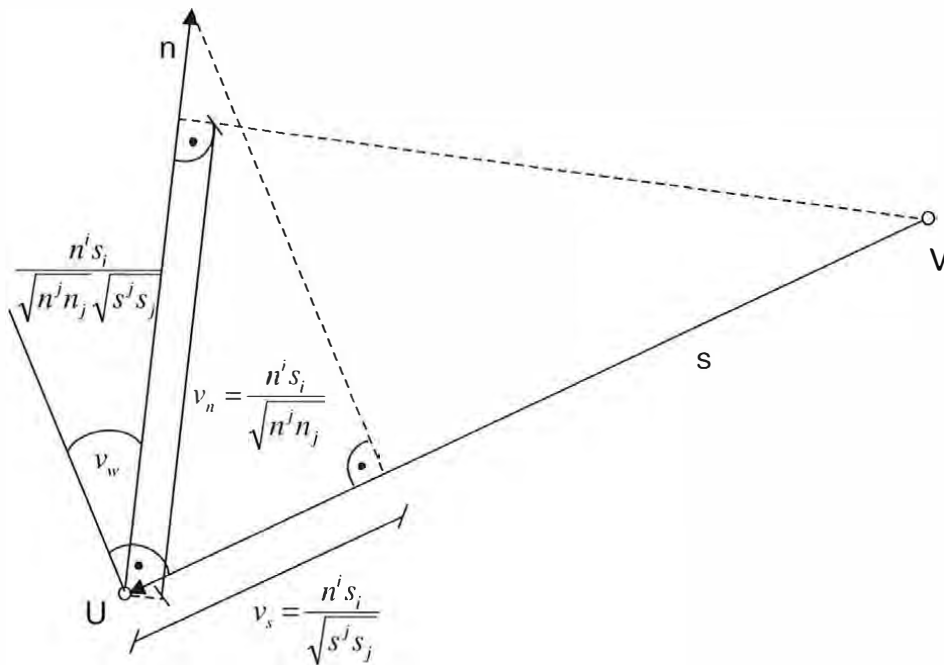


Abbildung 3-3: Geometrische Darstellung der Minimalkriterien für die Umrißbeobachtung

Aus der Abbildung 3-3 geht hervor, daß (3.3-3) zwar geometrisch interpretierbar ist, aber deren praktische Anwendung als Endminimumkriterium fraglich ist. Diese Art der Verbesserung ist aber dennoch sehr wichtig, wie in Kapitel 4 gezeigt wird.

Die geometrisch sinnvoll interpretierbaren Verbesserungen aller Beobachtungsarten werden in Tabelle 3-1 nochmals zusammenfassend aufgelistet:

Beobachtungen	Verbesserungen
Gemessene Bildkoordinaten v. U	Bildkoordinaten v. U
Fiktive Flächenbeobachtung v. U	Normalabstand zur Fläche
Fiktive Umrißbeobachtung v. U	Normalabstand zur Fläche oder der Rechte Winkel zwischen n und s

Tabelle 3-1: Die Verbesserungsarten beim überbestimmten System Umrißpunkt

4 Linearisierung und Konvergenzverhalten der Umrißbedingung

4.1 Lösen eines überbestimmten Systems

Liegt ein überbestimmtes System vor, so kann es mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate [Wolf, 1996] gelöst werden. Es soll hier näher in der Notation dieser Arbeit zitiert werden, weil diese Vorgangsweise sehr wichtig für das Verständnis dieses Kapitels ist.

Beobachtungen, wie z.B. Bildkoordinaten oder auch die fiktive Umrißbeobachtung, lassen sich als Funktion der Unbekannten darstellen:

$$l_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (4.1-1)$$

l_i Beobachtung
 x_j Unbekannte

Da die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate lineare Systeme voraussetzt, muß (4.1-1) in eine Taylorreihe entwickelt werden und diese wird nach den linearen Gliedern abgebrochen. Bei der Linearisierung ersetzt man eine nicht-lineare Funktion in n Unbekannten durch eine lineare n -dimensionale Hyperebene.

$$l_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^0 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^0 dx_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^0 dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)^0 dx_n \quad (4.1-2)$$

Eine lineare Funktion kann eine nicht-lineare nicht über den ganzen Definitionsbereich hinreichend gut approximieren, daher kommt dem Entwicklungspunkt $(x_i)^0$ (= Näherungswerte der Unbekannten²) eine große Bedeutung zu, siehe Abbildung 4-1:

² Der hier rechts hochgestellt Index 0 bedeutet, daß es sich um einen Näherungswert handelt und nicht um eine Potenz.

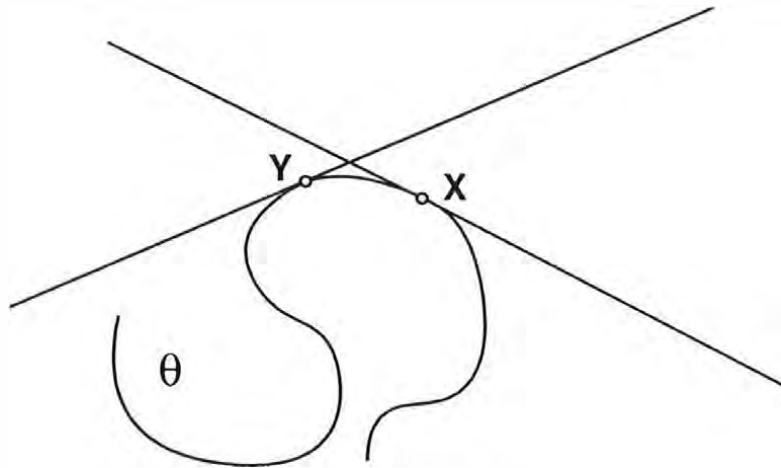


Abbildung 4-1: Approximation einer Kurve durch Geraden

Abbildung 4-1 zeigt, wie stark sich Richtung und Lage der Approximationsgeraden ändern können, obwohl die beiden Entwicklungspunkte **X** und **Y** knapp beisammen sind.

Die Linearisierungskoeffizienten $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^0$, ausgewertet an der Stelle $(x)^0$, lassen sich zu einer zweifach indizierten Größe A_i^j zusammenfassen:

$$A_i^j = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^0 \quad (4.1-3)$$

Die beobachteten Werte l_i werden nicht mit den berechneten Werten $f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^0$, die aus der Linearisierung stammen, übereinstimmen. Diese Abweichungen werden Widersprüche genannt und wie folgt berechnet:

$$w_i = l_i - f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^0 \quad (4.1-4)$$

Die Beobachtungsgleichungen (4.1-2) lassen sich nun zu einem linearen Gleichungssystem zusammenfassen:

$$A_i^j dx_j = w_i \quad (4.1-5)$$

Da ein überbestimmtes System vorliegt, können in der Regel nicht alle Gleichungen von (4.1-5) simultan erfüllt werden. Es müssen Korrekturen an die Beobachtungen l_i angebracht werden, die sogenannten Verbesserungen v_i . Aus dem Gleichungssystem (4.1-5) wird das Verbesserungsgleichungssystem:

$$v_i = A_i^j dx_j - w_i \quad (4.1-6)$$

Das Gleichungssystem (4.1-6) wird so gelöst, daß die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen minimal wird:

$$v_i P^{ij} v_j \rightarrow \min$$

(4.1-7)

P^{ij} Gewichtsmatrix

In die Gewichtsmatrix gehen die Genauigkeiten der Beobachtungen ein.

Die Zuschläge dx_i aus (4.1-7) ergeben sich zu:

$$dx_i = Q_{ik} A_l^k P^{lj} l_j \quad \text{mit} \quad A_l^m P^{lj} A_j^i Q_{ik} = \delta_k^m$$

(4.1-8)

Die gesuchte Lösung x_i ergibt sich iterativ zu:

$$x_i = (x_i)^0 + dx_i$$

(4.1-9)

4.2 Linearisierung der Umrißbedingung

Die fiktiven Beobachtungsgleichungen E₁-E₄ aus dem Kapitel 3.3 müssen nach den unbekannten Parametern, die sowohl in E₁-E₄ als auch im Ausgleichungssystem vorkommen, differenziert werden:

${}_R s$ kann direkt als Differenz des Umrißpunktes ${}_R X$ und dem Projektionszentrum ${}_R V$ in Referenzsystem angeschrieben werden.

$${}_R s^i = {}_R X^i - {}_R V^i$$

(4.2-1)

${}_R n$ kann leider nicht direkt durch Parameter im Referenzsystem ausgedrückt

werden, da er im Modellsystem berechnet wird. $\mathbf{m}\mathbf{n}$ wird nach (3.2-3) oder (3.2-5) berechnet und ist eine Funktion von:

$$\mathbf{m}\mathbf{n} = \mathbf{m}\mathbf{n}(\mathbf{A}, \mathbf{m}\mathbf{X})$$

Auf die Flächenparameter \mathbf{A} soll in diesem Kapitel noch nicht genauer eingegangen werden, da sie sehr von der Flächendarstellung abhängen. Im speziellen werden die Differentiale nur für jene Flächendarstellung, welche auch in ORIENT implementiert sind, ausformuliert (siehe Kapitel 6).

$\mathbf{m}\mathbf{X}$ ist auf Grund der Transformation vom Modell- ins Referenzsystem nach (3.1-3) eine Funktion von:

$$\mathbf{m}\mathbf{X} = \mathbf{m}\mathbf{X}(\mathbf{m}\mathbf{R}, \mathbf{r}\mathbf{Q}, \mathbf{m}\mathbf{Q}, m)$$

Die fiktive Umrißbeobachtung muß daher nach folgenden Unbekannten differenziert werden:

$\mathbf{r}\mathbf{X}$	Umrißpunkt im Referenzsystem
$\mathbf{r}\mathbf{V}$	Projektionszentrum im Referenzsystem
$\mathbf{m}\mathbf{R}(\mathbf{m}\mathbf{r})$	Rotationsmatrix in Abhängigkeit der Drehparameter \mathbf{r}
$\mathbf{r}\mathbf{Q}$	homologer Bezugspunkt des Modellsystems im Referenzsystem
m	Transformationsmaßstab
\mathbf{A}	Parameter der Fläche

Die Taylorentwicklung von E lautet formal:

$$\begin{aligned}
 0 + v = E^0 &+ \left(\frac{\partial E}{\partial A^i} \right)^0 dA_i + \left(\frac{\partial E}{\partial r X^i} \right)^0 d r X^i + \left(\frac{\partial E}{\partial r V^i} \right)^0 d r V^i + \\
 &+ \left(\frac{\partial E}{\partial r Q^i} \right)^0 d r Q^i + \left(\frac{\partial E}{\partial m r^i} \right)^0 d m r^i + \left(\frac{\partial E}{\partial m} \right)^0 d m
 \end{aligned}
 \tag{4.2-2}$$

4.2.1 Vom jeweiligen Typ unabhängige elementare Differentiale

$$\frac{\partial r n_j}{\partial m n_l} :$$

Folgt aus Differentiation von (3.1-4) :

$$\frac{\partial r n_j}{\partial m n_l} = m m_{l j}$$

(4.2-3)

$$\frac{\partial_M n_j}{\partial_M X_l} :$$

Dieses Differential ist von der jeweiligen Flächendarstellung abhängig. Es handelt sich in jedem Fall um eine zweifach indizierte Größe, da ein Vektor nach einem Vektor differenziert wird. Abkürzend wird dafür ${}_M \mathbf{F}$ geschrieben:

$$\frac{\partial_M n_j}{\partial_M X_l} = {}_M F_j^l$$

(4.2-4)

$$\frac{\partial_M X_j}{\partial_R X_l} :$$

Folgt aus Differentiation von (3.1-3):

$$\frac{\partial_M X_j}{\partial_R X_l} = \frac{1}{{}_M m} {}_M R_j^l$$

(4.2-5)

$$\frac{\partial_R s_j}{\partial_R X_l} :$$

Folgt aus Differentiation von (4.2-1) :

$$\frac{\partial_R s_j}{\partial_R X_l} = \delta_j^l$$

(4.2-6)

$$\frac{\partial_R s_j}{\partial_R V_l} :$$

Folgt aus Differentiation von (4.2-1) :

$$\frac{\partial_R s_j}{\partial_R V_l} = -\delta_j^l$$

(4.2-7)

$$\frac{\partial_M X_j}{\partial_R Q_l} :$$

Folgt aus Differentiation von (3.1-3) :

$$\frac{\partial_M X_j}{\partial_R Q_l} = -\frac{1}{{}_M m} {}_M R_j^l$$

(4.2-8)

$$\frac{\partial_R n_j}{\partial_M r_p};$$

Folgt aus Differentiation von (3.1-4) :

$$\frac{\partial_R n_j}{\partial_M R_{lm}} \frac{\partial_M R_{lm}}{\partial_M r_p} = {}_M m \delta_j^l {}_M R_{lm, p} {}_M n^m$$

(4.2-9)

$$\frac{\partial_R n_j}{\partial_M m};$$

Folgt aus Differentiation von (4.2-1) :

$$\frac{\partial_R n_j}{\partial_M m} = {}_M R^{ji} {}_M n_i$$

(4.2-10)

Die anderen Differentiale sind von der Art der Umrißbedingung abhängig und werden für jeden einzelnen Typ E₁-E₄ separat angegeben.

4.2.2 Differentiale für den Typ E₁

$$E_1: {}_R n^i {}_R s_i = 0 + v$$

(4.2-11)

Grunddifferentiale für den Typ E₁

$$\frac{\partial E_1}{\partial_R n_j};$$

Durch Differentiation von (4.2-11) gelangt man zu:

$$\frac{\partial E_1}{\partial_R n_j} = {}_R s^j$$

(4.2-12)

$$\frac{\partial E_1}{\partial_R s_j};$$

Durch Differentiation von (4.2-11) gelangt man analog zu:

$$\frac{\partial E_1}{\partial_R s_j} = {}_R n^j$$

(4.2-13)

Differential nach dem Umrißpunkt ${}_R\mathbf{X}$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_R X_i} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R X_i} + \frac{\partial E_1}{\partial {}_R s_j} \frac{\partial {}_R s_j}{\partial {}_R X_i}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_R X_i} = {}_R s^j {}_M R_j^i {}_M F_l^m {}_M R_m^i + {}_R n^i$$

(4.2-14)

abkürzend wird für

$${}_M R_j^l {}_M F_l^m {}_M R_m^i = {}_R F_j^i$$

gesetzt.

Differential nach dem Projektionszentrum ${}_R\mathbf{V}$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_R V_i} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R s_j} \frac{\partial {}_R s_j}{\partial {}_R V_i}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_R V_i} = -{}_R n^i$$

(4.2-15)

Differential nach dem Modellbezugspunkt ${}_R\mathbf{Q}$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_R Q_i} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R Q_i}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_R Q_i} = -{}_R s^j {}_R F_j^i$$

(4.2-16)

Differential nach den Drehparametern ${}_M\mathbf{r}$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_M r_p} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R n_k} \frac{\partial {}_R n_k}{\partial {}_M r_p}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_M r_p} = {}_M m {}_R s^i {}_M R_{ij}^p {}_M n^j$$

(4.2-17)

Differential nach dem Transformationsmaßstab ${}_M m$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_M m} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M m}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial {}_M m} = {}_R s^j {}_M R_j^i {}_M n_i$$

(4.2-18)

Differential nach den Flächenparametern \mathbf{A} :

$$\frac{\partial E_1}{\partial A_i} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial A_i} = {}_R s^j {}_M R_j^l \frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i}$$

(4.2-19)

Das Differential $\frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i}$ wird noch nicht näher ausgeführt, da eine konkrete Flächendarstellung dafür notwendig wäre (siehe Kapitel 6.3).

4.2.3 Differentiale für den Typ E_2

$$E_2: \frac{{}_R n^i {}_R s_i}{\sqrt{{}_R n^j {}_R n_j}} = 0 + v_n$$

(4.2-20)

Teildifferentiale für den Typ E_2

$$\frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_j} :$$

Durch Differentiation von (4.2-20) unter Verwendung von Produkt- und Quotientenregel gelangt man zu:

$$\frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_j} = \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} {}_R s_n \left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^j {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right)$$

(4.2-21)

abkürzend wird für

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^{}_R n^{}_R n^{}_j}{{}_R n^{}_k {}_R n^{}_k} \right) = G^{nj}$$

gesetzt.

$$\frac{\partial E_2}{\partial {}_R s_j} :$$

Durch Differentiation von (4.2-20) gelangt man zu:

$$\frac{\partial E_2}{\partial {}_R s_j} = \frac{1}{\sqrt{{}_R n^{}_k {}_R n^{}_k}} {}_R n^{}_j$$

(4.2-22)

Differential nach dem Umrißpunkt ${}_R \mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial {}_R X_i} &= \frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R X_i} + \frac{\partial E_2}{\partial {}_R s_j} \frac{\partial {}_R s_j}{\partial {}_R X_i} \\ \frac{\partial E_2}{\partial {}_R X_i} &= \frac{1}{\sqrt{{}_R n^{}_k {}_R n^{}_k}} \left({}_R s_n G^{nj} {}_M R_j^l {}_M F_l^m {}_M R^i_m + {}_R n^i \right) \end{aligned}$$

(4.2-23)

abkürzend wird für

$${}_M R_j^l {}_M F_l^m {}_M R^i_m = {}_R F_j^i$$

gesetzt.

Differential nach dem Projektionszentrum ${}_R \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial {}_R V_i} &= \frac{\partial E_2}{\partial {}_R s_j} \frac{\partial {}_R s_j}{\partial {}_R V_i} \\ \frac{\partial E_2}{\partial {}_R V_i} &= - \frac{1}{\sqrt{{}_R n^{}_k {}_R n^{}_k}} {}_R n^i \end{aligned}$$

(4.2-24)

Differential nach dem Modellbezugspunkt ${}_R \mathbf{Q}$:

$$\frac{\partial E_2}{\partial {}_R Q_i} = \frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R Q_i}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial {}_R Q_i} = - \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} {}_R S_n G^{nj} {}_R F_j^i \quad (4.2-25)$$

Differential nach den Drehparametern ${}_M \mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial {}_M r_p} &= \frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_k} \frac{\partial {}_R n_k}{\partial {}_M r_p} \\ \frac{\partial E_2}{\partial {}_M r_p} &= \frac{{}_M m}{\sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} {}_R S_n G^{ni} {}_M R_{ij, p} {}_M n^j \end{aligned} \quad (4.2-26)$$

Differential nach dem Transformationsmaßstab ${}_M m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial {}_M m} &= \frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M m} \\ \frac{\partial E_2}{\partial {}_M m} &= \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} {}_R S_n G^{nj} {}_M R_j^i {}_M n_i \end{aligned} \quad (4.2-27)$$

Differential nach den Flächenparametern \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial A_i} &= \frac{\partial E_2}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i} \\ \frac{\partial E_2}{\partial A_i} &= \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} {}_R S_n G^{nj} {}_M R_j^l \frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i} \end{aligned} \quad (4.2-28)$$

Das Differential $\frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i}$ wird noch nicht näher ausgeführt, da eine konkrete Flächendarstellung dafür notwendig wäre (siehe Kapitel 6.3).

4.2.4 Differentiale für den Typ E₃

$$E_3: \quad \frac{{}_R n^i {}_R s_i}{\sqrt{{}_R s^j {}_R s_j}} = 0 + v_s$$

(4.2-29)

Teildifferentiale für den Typ E₃:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R n_j};$$

Durch Differentiation von (4.2-29) gelangt man zu:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R n_j} = \frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R s^j$$

(4.2-30)

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R s_j};$$

Durch Differentiation von (4.2-29) unter Verwendung von Produkt- und Quotientenregel gelangt man analog zu:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R s_j} = \frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R n_n \left(\delta^{nj} - \frac{{}_R s^n {}_R s^j}{{}_R s^k {}_R s_k} \right)$$

(4.2-31)

abkürzend wird für

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R s^n {}_R s^j}{{}_R s^k {}_R s_k} \right) = H^{nj}$$

gesetzt.

Differential nach dem Umrißpunkt ${}_R X$:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R X_i} = \frac{\partial E_3}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R X_i} + \frac{\partial E_3}{\partial {}_R s_j} \frac{\partial {}_R s_j}{\partial {}_R X_i}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R X_i} = \frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} \left({}_R s^j {}_M R_j^l {}_M F_l^m {}_M R_m^i + {}_R n_n H^{ni} \right)$$

(4.2-32)

abkürzend wird für

$${}_M R_j^i = {}_M F_l^m \quad {}_M R^i_m = {}_R F_j^i$$

gesetzt.

Differential nach dem Projektionszentrum ${}_R \mathbf{V}$:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R V_i} = \frac{\partial E_3}{\partial {}_R s_j} \frac{\partial {}_R s_j}{\partial {}_R V_i}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R V_i} = -\frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R n_n H^m$$

(4.2-33)

Differential nach dem Modellbezugspunkt ${}_R \mathbf{Q}$:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R Q_i} = \frac{\partial E_3}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R Q_i}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_R Q_i} = -\frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R s^j {}_R F_j^i$$

(4.2-34)

Differential nach den Drehparametern ${}_M \mathbf{r}$:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_M r_p} = \frac{\partial E_3}{\partial {}_R n_k} \frac{\partial {}_R n_k}{\partial {}_M r_p}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_M r_p} = \frac{{}_M m}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R s^i {}_M R_{ij}^p {}_M n^j$$

(4.2-35)

Differential nach dem Transformationsmaßstab ${}_M m$:

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_M m} = \frac{\partial E_3}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M m}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial {}_M m} = \frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R s^j {}_M R_j^i {}_M n_i$$

(4.2-36)

Differential nach den Flächenparametern **A** :

$$\frac{\partial E_3}{\partial A_i} = \frac{\partial E_3}{\partial_R n_j} \frac{\partial_R n_j}{\partial_M n_l} \frac{\partial_M n_l}{\partial A_i}$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial A_i} = \frac{1}{\sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R s^j {}_M R_j^i \frac{\partial_M n_l}{\partial A_i}$$

(4.2-37)

Das Differential $\frac{\partial_M n_l}{\partial A_i}$ wird noch nicht näher ausgeführt, da eine konkrete Flächendarstellung dafür notwendig wäre (siehe Kapitel 6.3).

4.2.5 Differentiale für den Typ E₄

$$E_4: \frac{{}_R n^i {}_R s_i}{\sqrt{{}_R n^j {}_R n_j} \sqrt{{}_R s^j {}_R s_j}} = \cos(90^\circ + v_w) = -\sin(v_w) = 0 - v_w$$

(4.2-38)

Teildifferentiale für den Typ E₄

$$\frac{\partial E_4}{\partial_R n_j} :$$

Durch Differentiation von (4.2-38) unter Verwendung von Produkt- und Quotientenregel gelangt man zu:

$$\frac{\partial E_4}{\partial_R n_j} = \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k {}_R n_k} \sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} {}_R s_n \left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^n {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right)$$

(4.2-39)

abkürzend wird für

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^n {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right) = G^{nj}$$

gesetzt.

$$\frac{\partial E_4}{\partial_R s_j};$$

Durch Differentiation von (4.2-38) unter Verwendung von Produkt- und Quotientenregel gelangt man analog zu:

$$\frac{\partial E_4}{\partial_R s_j} = \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k} {}_R n_k \sqrt{{}_R s^k} {}_R s_k} {}_R n_n \left(\delta^{nj} - \frac{{}_R s^n {}_R s^j}{{}_R s^k {}_R s_k} \right) \quad (4.2-40)$$

abkürzend wird für

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R s^n {}_R s^j}{{}_R s^k {}_R s_k} \right) = H^{nj}$$

gesetzt.

Differential nach dem Umrißpunkt ${}_R \mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_4}{\partial_R X_i} &= \frac{\partial E_4}{\partial_R n_j} \frac{\partial_R n_j}{\partial_M n_l} \frac{\partial_M n_l}{\partial_M X_m} \frac{\partial_M X_m}{\partial_R X_i} + \frac{\partial E_4}{\partial_R s_j} \frac{\partial_R s_j}{\partial_R X_i} \\ \frac{\partial E_4}{\partial_R X_i} &= \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k} {}_R n_k \sqrt{{}_R s^k} {}_R s_k} \left({}_R s_n G^{nj} {}_M R_j^l {}_M F_l^m {}_M R_m^i + {}_R n_n H^{ni} \right) \end{aligned} \quad (4.2-41)$$

abkürzend wird für

$${}_M R_j^l {}_M F_l^m {}_M R_m^i = {}_R F_j^i$$

gesetzt.

Differential nach dem Projektionszentrum ${}_R \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_4}{\partial_R V_i} &= \frac{\partial E_4}{\partial_R s_j} \frac{\partial_R s_j}{\partial_R V_i} \\ \frac{\partial E_4}{\partial_R V_i} &= - \frac{1}{\sqrt{{}_R s^k} {}_R s_k \sqrt{{}_R n^k} {}_R n_k} {}_R n_n H^{ni} \end{aligned} \quad (4.2-42)$$

Differential nach dem Modellbezugspunkt ${}_R Q$:

$$\frac{\partial E_4}{\partial {}_R Q_i} = \frac{\partial E_4}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial {}_M X_m} \frac{\partial {}_M X_m}{\partial {}_R Q_i}$$

$$\frac{\partial E_4}{\partial {}_R Q_i} = - \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k} \sqrt{{}_R n_k} \sqrt{{}_R s^k} \sqrt{{}_R s_k}} {}_R s_n G^{nj} {}_R F_j^i$$

(4.2-43)

Differential nach den Drehparametern ${}_M r$:

$$\frac{\partial E_4}{\partial {}_M r_p} = \frac{\partial E_4}{\partial {}_R n_k} \frac{\partial {}_R n_k}{\partial {}_M r_p}$$

$$\frac{\partial E_4}{\partial {}_M r_p} = \frac{{}_M m}{\sqrt{{}_R n^k} \sqrt{{}_R n_k} \sqrt{{}_R s^k} \sqrt{{}_R s_k}} {}_R s_n G^{ni} {}_M R_{ij}^p {}_M n^j$$

(4.2-44)

Differential nach dem Transformationsmaßstab ${}_M m$:

$$\frac{\partial E_4}{\partial {}_M m} = \frac{\partial E_4}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M m}$$

$$\frac{\partial E_4}{\partial {}_M m} = \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k} \sqrt{{}_R n_k} \sqrt{{}_R s^k} \sqrt{{}_R s_k}} {}_R s_n G^{nj} {}_M R_j^i {}_M n_i$$

(4.2-45)

Differential nach den Flächenparametern A :

$$\frac{\partial E_4}{\partial A_i} = \frac{\partial E_4}{\partial {}_R n_j} \frac{\partial {}_R n_j}{\partial {}_M n_l} \frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i}$$

$$\frac{\partial E_4}{\partial A_i} = \frac{1}{\sqrt{{}_R n^k} \sqrt{{}_R n_k} \sqrt{{}_R s^k} \sqrt{{}_R s_k}} {}_R s_n G^{nj} {}_M R_j^l \frac{\partial {}_M n_l}{\partial A_i}$$

(4.2-46)

Das Differential $\frac{\partial_M n_l}{\partial A_i}$ wird noch nicht näher ausgeführt, da eine konkrete Flächendarstellung dafür notwendig wäre (siehe Kapitel 6.3).

4.3 Konvergenzbereich – Wie genau müssen die Näherungswerte für den Umrißpunkt sein?

Um das Gleichungssystem (4.1-5) aufstellen zu können müssen die Differentiale aus dem Kapitel 4.2 an der Stelle des Entwicklungspunktes (=Näherungswerte) ausgewertet werden. Von der Güte der Näherungswerte hängt es ab, ob das Gleichungssystem konvergiert. Die Zuschläge für die Näherungswerte, die mit (4.1-8) berechnet werden, werden dann mit (4.1-9) angebracht. Diese korrigierten Werte dienen als neuer Entwicklungspunkt für die Differentiale. Ein Gleichungssystem konvergiert, wenn die Näherungswerte nach einigen Iterationen gegen die gesuchte Lösung konvergieren³. Verfahren und Hinweise zur Bestimmung von Näherungswerte für die Orientierungen und Flächenparameter werden in [Kraus, 1996, p46ff] bzw. [Kraus, 1996, p33ff] angegeben, Verfahren zur Bestimmung der Näherungswerte für Umrißpunkte wird im Kapitel 5 angegeben. In diesem Kapitel soll zuvor die Frage behandelt werden, wie nahe die Näherungswerte des Umrißpunktes am Umrißpunkt selbst liegen müssen, damit die gewünschte Konvergenz erreicht wird. Jede Bedingungsgleichung, die noch nicht linearisiert wurde, beschreibt einen *geometrischen Ort* im \mathbb{R}^n , n ist die Anzahl der Unbekannten. Im Falle einer Fläche und eines unbekannten Punktes, wäre es die Fläche selbst, auf der der Punkt zu liegen hat. Schneidet man die m ($m > n$) geometrischen Örter miteinander, so findet man den gewünschten n -dimensionalen Lösungsvektor ohne Näherungswerte und ohne Iteration. Jedoch ist ein ausgleichender Schnitt von m , im allgemeinen nicht-linearen Gleichungen, in n Variablen nicht trivial. Daher schlägt man den Weg ein, der in Kapitel 4.1 beschrieben wird. Die allgemeinen geometrischen Örter der Gleichungen werden durch *differentielle geometrische Örter* ersetzt, die auch n -dimensionale Hyperebenen genannt werden, und geschnitten. Jede Zeile aus der Gleichung (4.1-5) entspricht einem differentiellen geometrischen Ort. Eine Flächengleichung (z.B. von einer Quadrik) würde durch eine Ebene ersetzt werden. In der differentiellen Umgebung des Entwicklungspunktes wird die allgemeine Gleichung durch die Hyperebene ausreichend gut ersetzt. Je weiter jedoch der Entwicklungspunkt von der gesuchten Lösung entfernt ist, desto schlechter wird die Hyperebene die Fläche approximieren. Das kann zu schleifenden oder unbrauchbaren Schnitten (neuer Entwicklungspunkt liegt weiter von der gesuchten Lösung entfernt als der vorherige) führen; darin liegt der Grund für ein divergierendes Gleichungssystem. Es ist zu erwarten, je höhergradig die Gleichung ist, desto genauer müssen die Näherungswerte bestimmt werden. Schön wäre es, den „günstigen“ Bereich um den Umrißpunkt (Konvergenzbereich) abgrenzen zu können ohne jegliche Messungen einfließen zu lassen. Im Fall des Umrißpunktsystems verfügt man über zwei fiktive Bedingungsgleichungen und zwei Beobachtungsgleichungen, siehe Tabelle 2-2. Würde

³ Ein Gleichungssystem kann auch gegen eine „falsche“ Lösung konvergieren, das ist dann der Fall, wenn das System in einem lokalen Minimum hängen bleibt.

man nur die zwei fiktiven differentiellen Örter miteinander schneiden, so würde man keine eindeutige Lösung bekommen sondern eine Gerade, weil eben noch Bestimmungsgleichungen fehlen. Diese Unterbestimmung kann man beheben, indem man immer einen ebenen Schnitt durch die Fläche betrachtet. Diese Annahme schränkt die allgemeinen Überlegungen nicht ein, da man mehrere benachbarte Schnitte betrachten kann, erleichtert aber die Darstellung.

Jede Zeile des Gleichungssystems (4.1-5) stellt einen differentiellen geometrischen Ort dar. Da ein Konvergenzbereich für den Umrißpunkt angegeben werden soll, sind nur die Differentiale der fiktiven Flächen- und Umrißbeobachtung nach ${}_R\mathbf{X}$ von Interesse. A^j in (4.1-5) wird je nach gewünschtem Minimumkriterium durch eines der Differentiale (4.2-14), (4.2-23), (4.2-32) oder (4.2-41) bestimmt. Der Widerspruch w ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} E_1: \quad w &= 0 - {}_R n_j \quad {}_R s^j & E_2: \quad w &= 0 - \frac{{}_R n_j \quad {}_R s^j}{\sqrt{{}_R n_j \quad {}_R n^j}} \\ E_3: \quad w &= 0 - \frac{{}_R n_j \quad {}_R s^j}{\sqrt{{}_R s_j \quad {}_R s^j}} & E_4: \quad w &= 0 - \frac{{}_R n_j \quad {}_R s^j}{\sqrt{{}_R n_j \quad {}_R n^j} \sqrt{{}_R s_j \quad {}_R s^j}} \end{aligned} \quad (4.3-1)$$

Die differentiellen Örter der Umrißbedingung ergeben sich zu:

$$E_1: \quad \left({}_R s^j \quad {}_R F_j^i + {}_R n^i \right) d {}_R X_i = - {}_R n_j \quad {}_R s^j \quad (4.3-2)$$

$$E_2: \quad \left({}_R s^j \quad {}_R G_j^k \quad {}_R F_k^i + {}_R n^i \right) d {}_R X_i = - {}_R n_j \quad {}_R s^j \quad (4.3-3)$$

$$E_3: \quad \left({}_R s^j \quad {}_R F_j^i + {}_R n^l \quad {}_R H_l^i \right) d {}_R X_i = - {}_R n_j \quad {}_R s^j \quad (4.3-4)$$

$$E_4: \quad \left({}_R s^j \quad {}_R G_j^k \quad {}_R F_k^i + {}_R n^l \quad {}_R H_l^i \right) d {}_R X_i = - {}_R n_j \quad {}_R s^j \quad (4.3-5)$$

Die differentiellen Örter für die Flächenbedingung werden berechnet, indem die Flächengleichung $\Phi({}_R\mathbf{X})=0$ nach ${}_R\mathbf{X}$ differenziert und anschließend der Widerspruch berechnet wird, siehe [Kager, 2000]:

$$F_1: \quad {}_R n^i \quad d {}_R X_i = -\Phi({}_R X_i) \quad (4.3-6)$$

$$F_2: \quad {}_R n^j \left(\delta_j^i - \frac{\Phi({}_R X_i)}{{}_R n^k {}_R n_k} F_j^i \right) d{}_R X_i = -\Phi({}_R X_i) \quad (4.3-7)$$

(4.3-6) stellt den Partner für E_1 als auch für E_3 dar, weil sowohl Umriß- als auch Flächenbedingung nicht mit ${}_R \mathbf{n}$ normiert wurde. (4.3-7) ist der Partner für E_2 und für E_4 , weil hier eine Normierung mit ${}_R \mathbf{n}$ vorliegt. Normiert man die Fläche mit ${}_R \mathbf{n}$, so verbessert man in erster Näherung den Normalabstand Fläche - Punkt, was wiederum eine sehr anschauliche Verbesserungsart darstellt.

Um das Konvergenzverhalten der unterschiedlichen Minimumskriterien untersuchen zu können wurde ein Programm erstellt, das sowohl Normalenvektorfelder als auch die geometrischen Örter von Quadriken darstellen kann. Durch eine Schnittstelle mit ORIENT können auch andere Flächen untersucht werden (siehe Kapitel 6).

4.3.1 Untersuchung der Normalenvektorfelder der differentiellen geometrischen Örter von Umriß- und Flächenbedingungen

Der Normalenvektor der differentiellen geometrischen Örter ist der Vektor, der in den Formeln (4.3-2) bis (4.3-7) links von $\mathbf{d}_R \mathbf{X}$ steht. Weisen diese Vektorfelder Wirbel auf, so weist das daraufhin, daß in diesem Bereich der diff. geom. Ort stark seine Richtung ändert. Starke Richtungsänderungen wirken sich instabil auf die Konvergenz aus. Treten Örter auf, in denen der Normalenvektor verschwindet, so würde das zu Singularitäten im Gleichungssystem führen.

Allgemeine Erläuterungen zu den folgenden Darstellungen:

Element	Farbe
Fläche, Kurve Φ	Dunkelgrau
Thalesfläche, Thaleskurve T	Braun
Elemente vom Typ E_1 (4.3-2)	Blau
Elemente vom Typ E_2 (4.3-3)	Grün
Elemente vom Typ E_3 (4.3-4)	Rot
Elemente vom Typ E_4 (4.3-5)	Gelb
Elemente vom Typ F_1 (4.3-6)	Magenta
Elemente vom Typ F_2 (4.3-7)	Zyan

Tabelle 4-1: Farbcodes für die Vektorfelddarstellungen und für die diff. geom. Örter

In Anlehnung an den Thaleskreis wird jener Ort, an dem der rechte Winkel zwischen \mathbf{n} und \mathbf{s} erfüllt ist, allgemein als Thalesfläche bezeichnet. Dieser Ort wird durch die Gleichung ${}_R n_j {}_R s^j = 0$ beschrieben. In den folgenden Abbildungen werden die Fläche Φ , der Flächenmittelpunkt \mathbf{Q} , die Thalesfläche T, das Projektionszentrum \mathbf{V} und der Umrißpunkt \mathbf{U} mit einem regelmäßigen Punkteraster überzogen. Dieser Punkteraster legt die zu testenden Näherungswerte fest.

Zuerst sollen die Normalenvektoren der diff. geom. Örter für eine **Kugel** untersucht werden, da man hier die charakteristischen Eigenschaften der Vektorfelder besser erkennen kann. Die Matrix **F** ergibt sich bei einer Kugel zu einem Vielfachen der Einheitsmatrix.

Anmerkung: In den Abbildung 4-2 bis Abbildung 4-12 werden ebene Schnitte der Normalenvektorfelder dargestellt. Liegt der Normalenvektor nicht in dieser Schnittebene, so wird dieser in die Ebene projiziert. Daher kann es in diesen Fällen zu minimalen Verzerrungen in der Länge des Vektors kommen. Diese Verzerrungen wirken sich in keiner Weise auf die abgeleiteten Ergebnisse aus.

Abbildung 4-2 und Abbildung 4-3 zeigen die Normalenvektorfelder der vier Bedingungstypen der Umrißbedingung. Bei der Fläche handelt es sich um eine Kugel, dargestellt werden Schnitte, die sowohl **Q** als auch **V** enthalten:

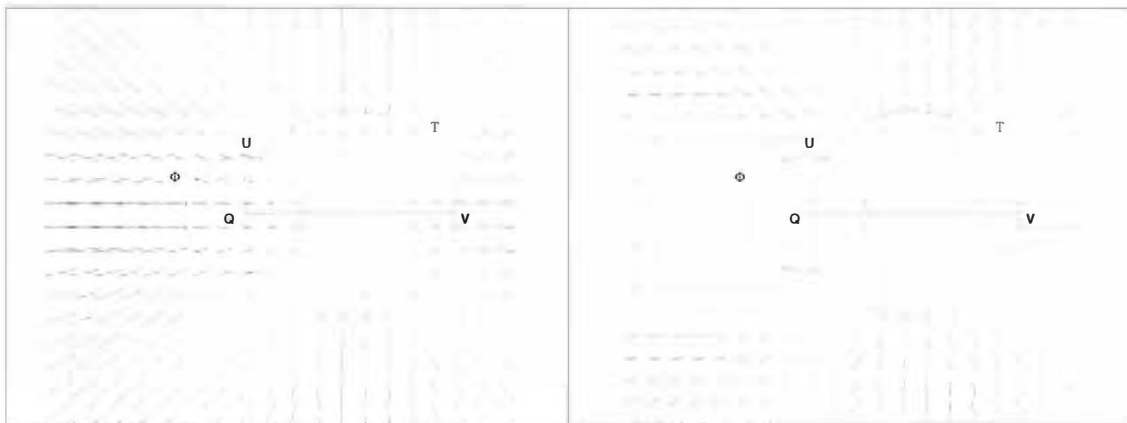


Abbildung 4-2: Normalenvektorfelder für ebenen Kugelschnitt der Umrißtypen E_1 links und E_2 rechts

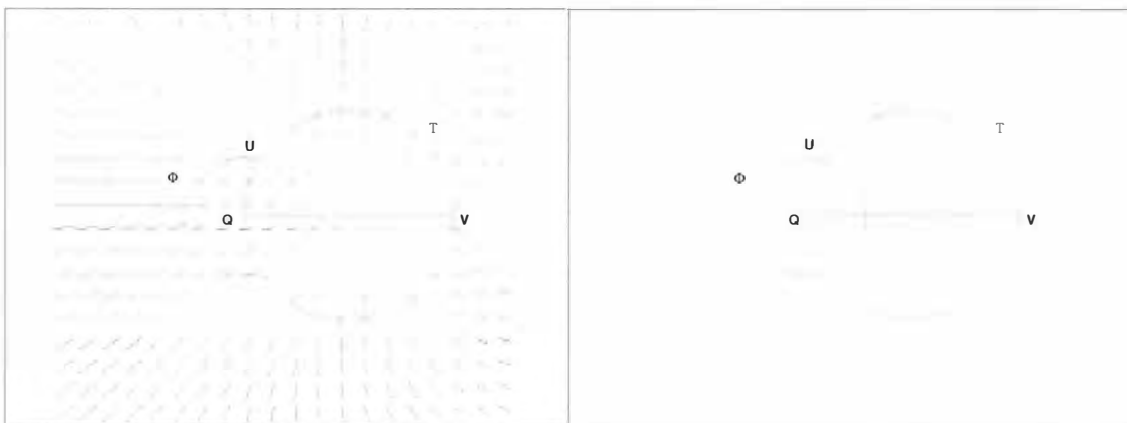


Abbildung 4-3: Normalenvektorfelder für ebenen Kugelschnitt der Umrißtypen E_3 links und E_4 rechts

Vektorfeld E_1 (blau): Es handelt sich um ein wirbelfreies Feld. Es besitzt als ausgezeichneten Punkt den Mittelpunkt des Thaleskreises, an dem der Normalenvektor

des diff. geom. Ortes verschwindet. Das Feld ist auch radialsymmetrisch bezüglich dieses Punktes.

Schlußfolgerung: Bei E_1 ist lediglich darauf zu achten, daß die Näherungswerte nicht in der Nähe des Mittelpunktes der Thalesfläche liegen.

Vektorfeld E_2 (grün): Es handelt sich um ein Feld mit einem Wirbel. Es besitzt als ausgezeichneten Punkt den Mittelpunkt der Fläche, an dem der Normalenvektor des diff. geom. Ortes verschwindet und auch gleichzeitig das Zentrum des Wirbels ist.

Schlußfolgerung: Bei E_2 ist darauf zu achten, daß die Richtungen der diff. geom. Örter in der Nähe von Q instabil sind und daher zu numerischen Problemen oder Divergenzen führen können.

Vektorfeld E_3 (rot): Es handelt sich um ein Feld mit einem Wirbel. Es besitzt als ausgezeichneten Punkt das Projektionszentrum V , an dem der Normalenvektor des diff. geom. Ortes verschwindet und auch gleichzeitig das Zentrum des Wirbels ist.

Schlußfolgerung: Bei E_3 ist darauf zu achten, daß die Richtungen der diff. geom. Örter in der Nähe von V instabil sind und daher zu numerischen Problemen oder Divergenzen führen können.

Vektorfeld E_4 (gelb): Es handelt sich um ein Feld mit zwei Wirbeln. Es besitzt sowohl den Wirbel bei Q als auch den bei V . Entlang der Geraden QV verschwinden die Normalenvektoren des diff. geom. Ortes.

Schlußfolgerung: Bei E_4 ist darauf zu achten, daß die Richtungen der diff. geom. Örter in der Nähe von V und Q instabil sind und daher zu Divergenzen führen können. Näherungswerte zu nahe an der Geraden QV führen zu Singularitäten.

Der Grund für diese Wirbel liegt in den Matrizen G und H .

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^n {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right) = G^{nj} \qquad \left(\delta^{nj} - \frac{{}_R S^n {}_R S^j}{{}_R S^k {}_R S_k} \right) = H^{nj}$$

Es handelt sich hier um Normalprojektionsmatrizen. Bei G werden Vektoren ${}_R m$ parallel zu ${}_R n$ auf den Nullvektor abgebildet, Vektoren ${}_R p$ normal zu ${}_R n$ auf sich selbst:

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^n {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right) {}_R m_j = \left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^n {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right) k {}_R n_j = k {}_R n^n - k {}_R n^n = 0$$

$$\left(\delta^{nj} - \frac{{}_R n^n {}_R n^j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right) {}_R p_j = \left({}_R p^j - \frac{{}_R n^n {}_R n^j {}_R p_j}{{}_R n^k {}_R n_k} \right) = {}_R p^j - 0 = {}_R p^j$$

Für H gilt Analoges mit ${}_R S$. Die so entstehenden Verdrehungen der Normalenvektoren kann man sich sehr schön veranschaulichen, wenn man per Hand einige Normalenvektoren der diff. geom. Örter konstruiert. Die Normalenvektoren aller Typen

fallen im Umrißpunkt zusammen, da hier die Projektionsmatrizen die zu projizierenden Vektoren auf sich selbst abbilden.

Die Abbildung 4-4 zeigt die Normalenvektorfelder der 2 Bedingungstypen der Flächenbedingung:

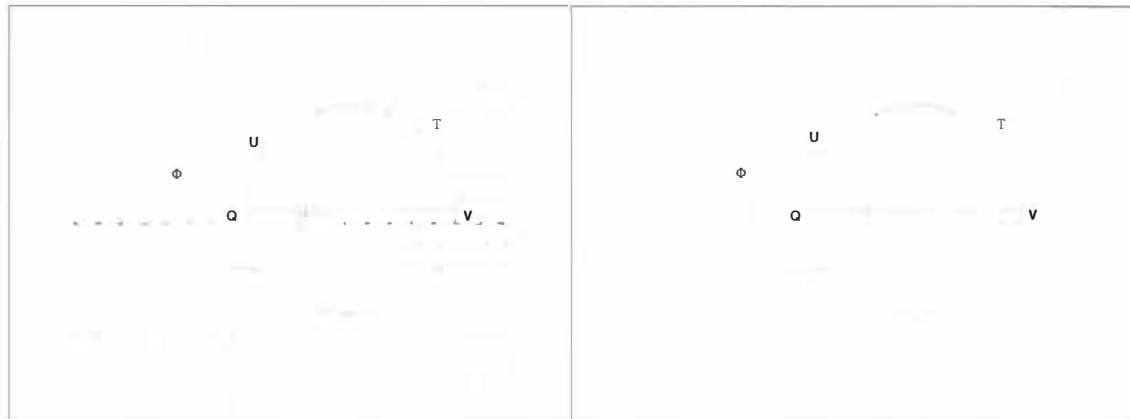


Abbildung 4-4: Normalenvektorfelder für ebenen Kugelschnitt der Flächentypen F_1 links und F_2 rechts

Vektorfeld F_1 (magenta): Es handelt sich um ein wirbelfreies Feld. Es besitzt als ausgezeichneten Punkt den Mittelpunkt Q der Fläche, an dem verschwindet der Normalenvektor des diff. geom. Ortes. Das Feld ist auch radialsymmetrisch bezüglich dieses Punktes.

Schlußfolgerung: Bei E_1 ist lediglich darauf zu achten, daß die Näherungswerte nicht in der Mitte der Fläche liegen.

Vektorfeld F_2 (zyan): Für F_2 gilt dasselbe wie für F_1 .

Die beiden Vektorfelder unterscheiden sich nicht in den Richtungen der Vektoren. Der Klammerausdruck in (4.3-7) bewirkt keine Richtungs- sondern nur eine Längenänderung.

Geht man bei der Fläche von der Kugel zum **Ellipsoid** über, so ist \mathbf{F} nicht mehr ein Vielfaches von der Einheitsmatrix sondern eine konstante symmetrische Matrix, in der die Achsenparameter des Ellipsoids vorkommen. Dargestellt werden wieder Schnitte vom Ellipsoid, die wieder Q und V enthalten

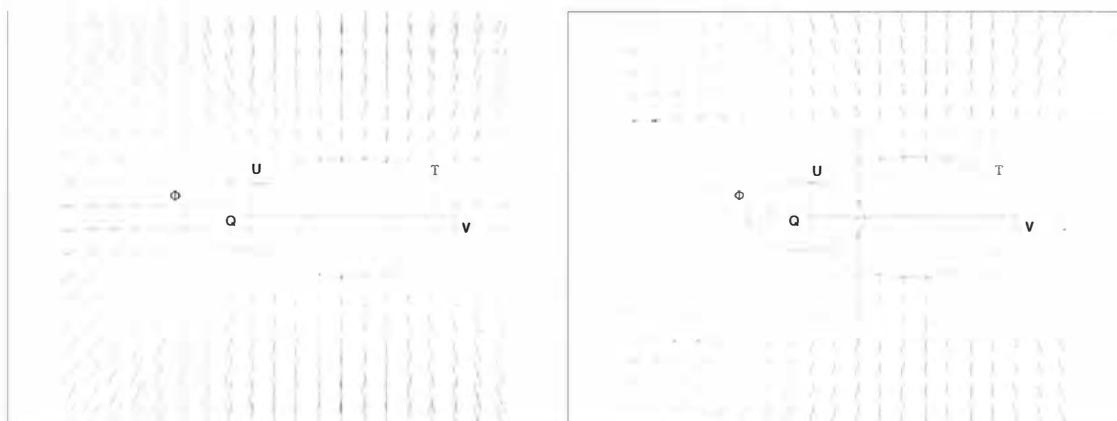


Abbildung 4-5: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt der Umrißtypen E_1 links und E_2 rechts

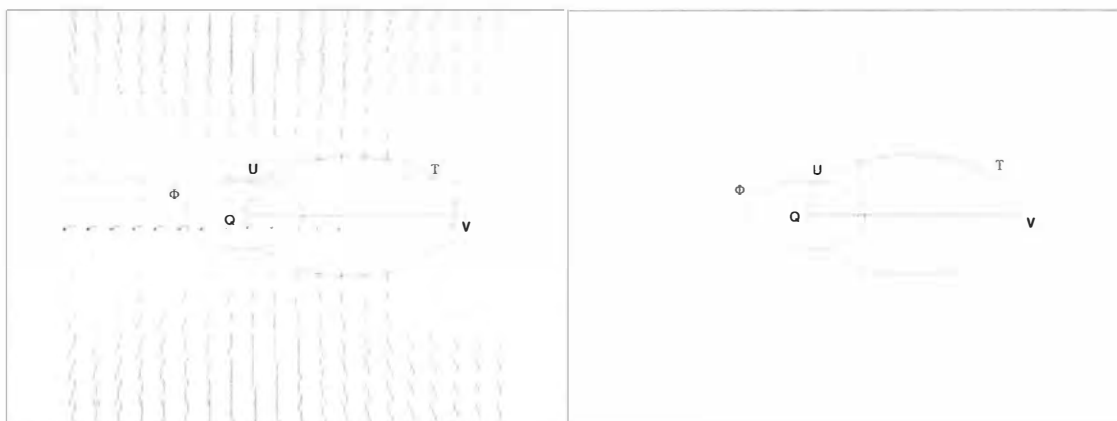


Abbildung 4-6: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt der Umrißtypen E_3 links und E_4 rechts

Abbildung 4-5 und Abbildung 4-6 zeigen ein sehr ähnliches Verhalten der unterschiedlichen Typen wie bei einer Kugel. Auf folgende Besonderheiten soll speziell hingewiesen werden: Anstelle der Thaleskugel bei der Kugel, tritt ein Thalesellipsoid. Es kann allgemein für Quadriken gezeigt werden, daß die Gleichung ${}_R n_j {}_R s^j = 0$, die die Thalesfläche beschreibt, wieder von derselben Art ist wie die Fläche. Das Vektorfeld E_1 besitzt bei der Ellipse auch einen Wirbel, der sein Zentrum im Mittelpunkt des Thalesellipsoids hat. Bei E_2 , E_3 und E_4 kommt es zu einer Überlagerung des Wirbels, der von \mathbf{G} und \mathbf{H} herrührt mit jenem, der von \mathbf{F} bedingt ist.

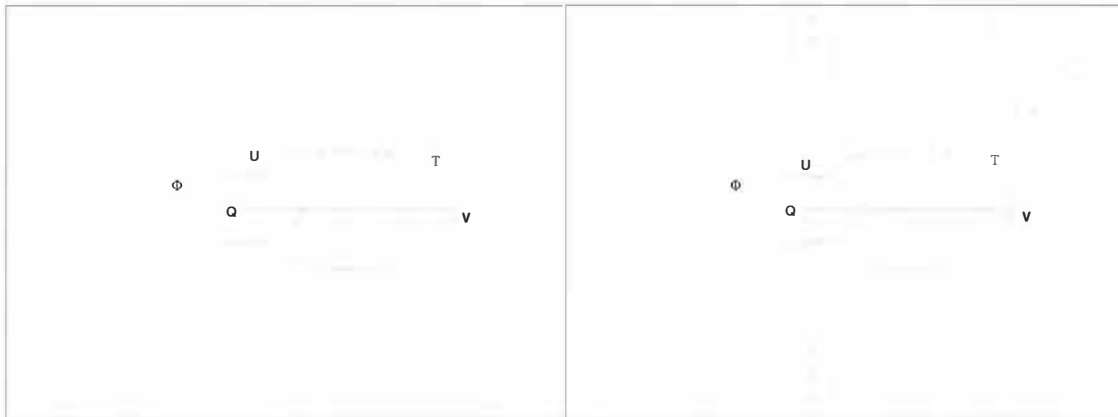


Abbildung 4-7: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt
der Flächentypen F_1 links und F_2 rechts

Die Matrix \mathbf{F} von Ellipsoiden bewirkt bei den Normalenvektoren der diff. geom. Örter der Flächengleichungen (siehe Abbildung 4-7) unterschiedliche Richtungen.

Bei **Hyperboloiden** ist \mathbf{F} auch nicht mehr ein Vielfaches der Einheitsmatrix sondern eine konstante symmetrische Matrix, in der allgemein die Achsenparameter des Hyperboloids eingehen.

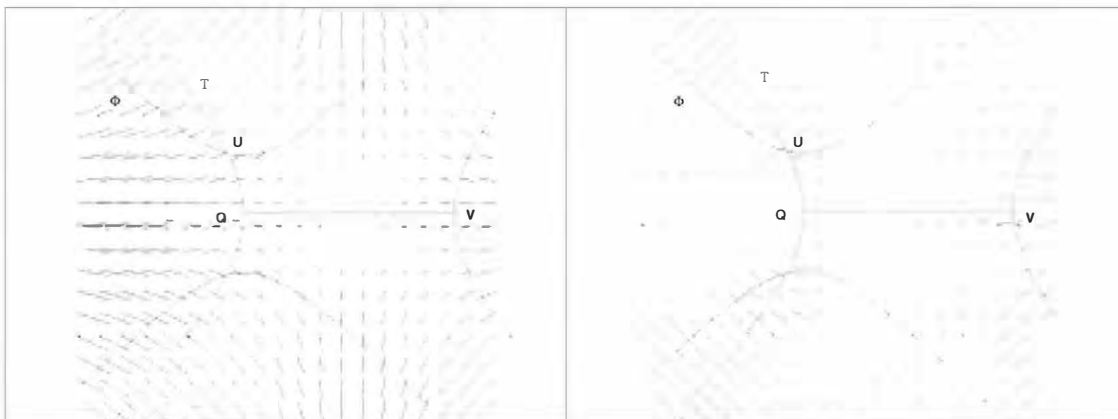


Abbildung 4-8: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt
der Umrißtypen E_1 links und E_2 rechts

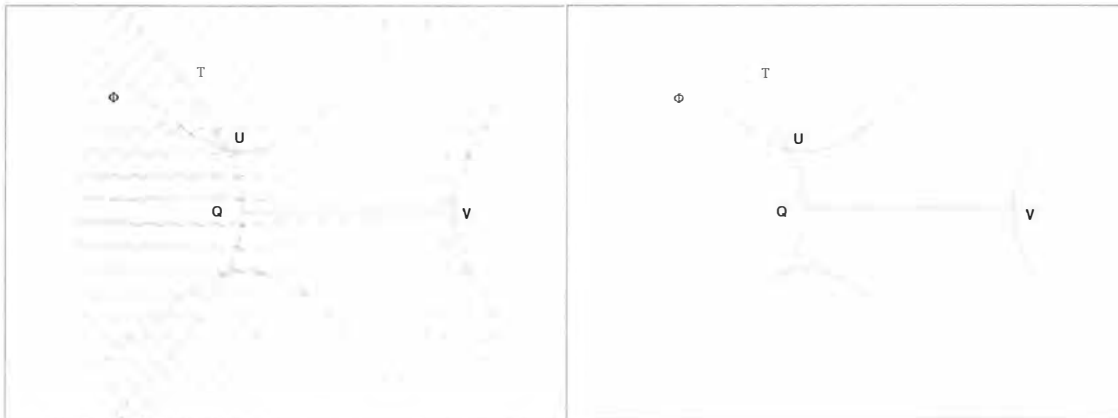


Abbildung 4-9: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt der Umrißtypen E_3 links und E_4 rechts

Abbildung 4-8 und Abbildung 4-9 wirken auf den ersten Blick ganz anders als jene von Kugel und Ellipsoid. Dieser Unterschied ist jedoch auf die Geometrie des Hyperboloids zurückzuführen, da es im Gegensatz zu Ellipsoid und Kugel nicht geschlossen sondern zweigeteilt ist. Bei näherer Betrachtung weisen die unterschiedlichen Typen ähnliche Charakteristika auf. E_1 (blau) besitzt einen ausgezeichneten Punkt: den Mittelpunkt des Thaleshyperboloids, an dem der Normalenvektor des diff. geom. Ortes verschwindet. Bei E_2 (grün) ist der ausgezeichnete Punkt Q , an dem der Normalenvektor des diff. geom. Ortes verschwindet und auch gleichzeitig das Zentrum des Wirbels ist. Bei E_3 (rot) ist der ausgezeichnete Punkt V , an dem der Normalenvektor des diff. geom. Ortes verschwindet und auch gleichzeitig das Zentrum des Wirbels ist. E_4 (gelb) vereint den Wirbel von E_2 bei Q mit dem von E_3 bei V .

Auffällig ist, daß der ebene Schnitt des Thaleshyperboloids eine Hyperbel in 1. Hauptlage ist, obwohl der Schnitt der Fläche hier in 2. Hauptlage ist. Die Begründung liegt darin, daß die Bedingungen E_1 - E_4 in den Punkten Q und V erfüllt werden müssen. Das ist aber nur dann erfüllt, wenn die Strecke QV ein reeller Durchmesser der Hyperbel darstellt.

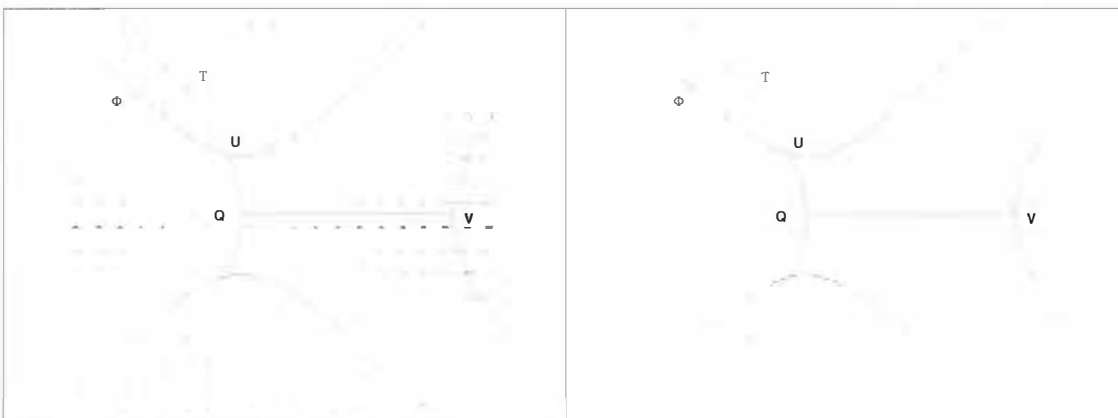


Abbildung 4-10: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt der Flächentypen F_1 links und F_2 rechts

Auch bei den Hyperbeln bewirkt die Matrix \mathbf{F} unterschiedliche Richtungen bei den Normalenvektoren der Flächengleichungen (siehe Abbildung 4-10).

Dieses Kapitel soll noch mit den Vektorfeldern von einer Ellipse (Abbildung 4-11) und einer Hyperbel (Abbildung 4-12) in allgemeiner Lage abgerundet werden. In diesem Fall liegt \mathbf{V} nicht auf einer verlängerten Achse des Kegelschnittes. In diesen Abbildungen werden die Vektorfelder farbig überlagert, damit die unterschiedlichen Richtungen besser sichtbar werden:

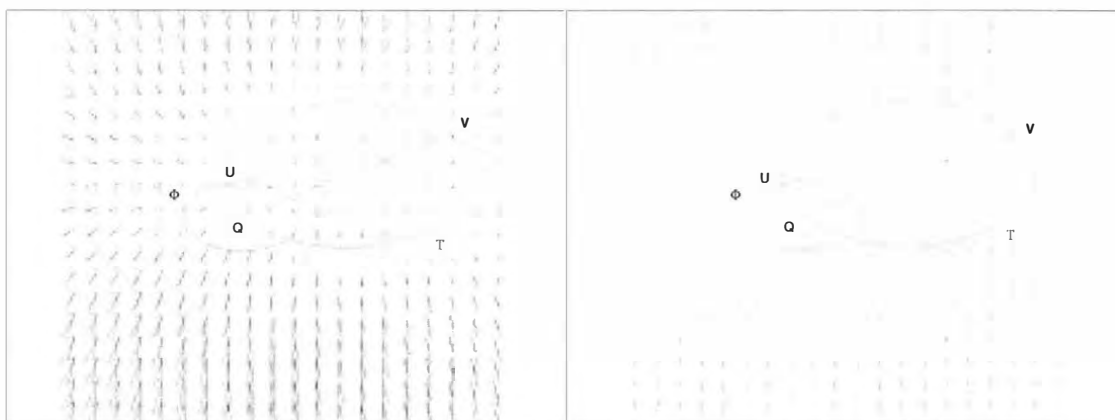


Abbildung 4-11: Normalenvektorfelder für ebenen Ellipsoidschnitt in allgemeiner Lage der Umrißtypen E_3 - E_4 links und der Flächentypen F_1 und F_2 rechts

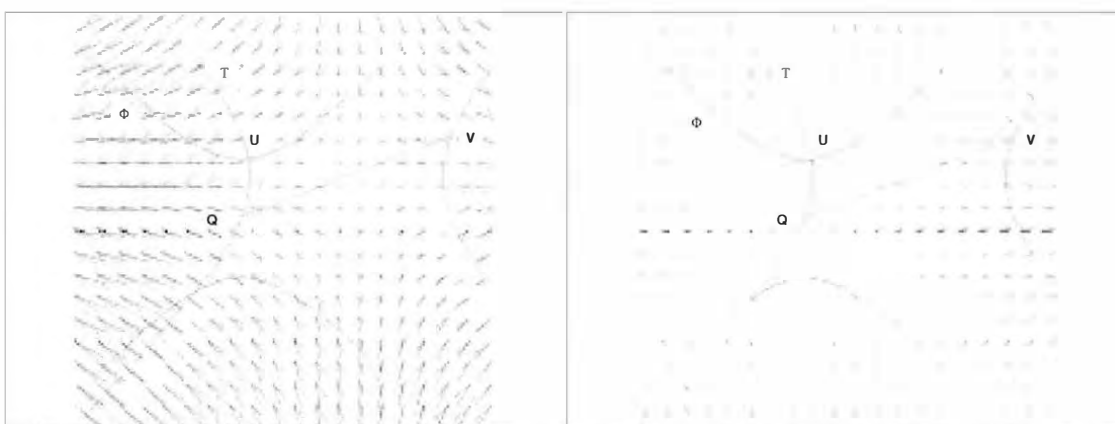


Abbildung 4-12: Normalenvektorfelder für ebenen Hyperboloidschnitt in allgemeiner Lage der Umrißtypen E_3 - E_4 links und der Flächentypen F_1 und F_2 rechts

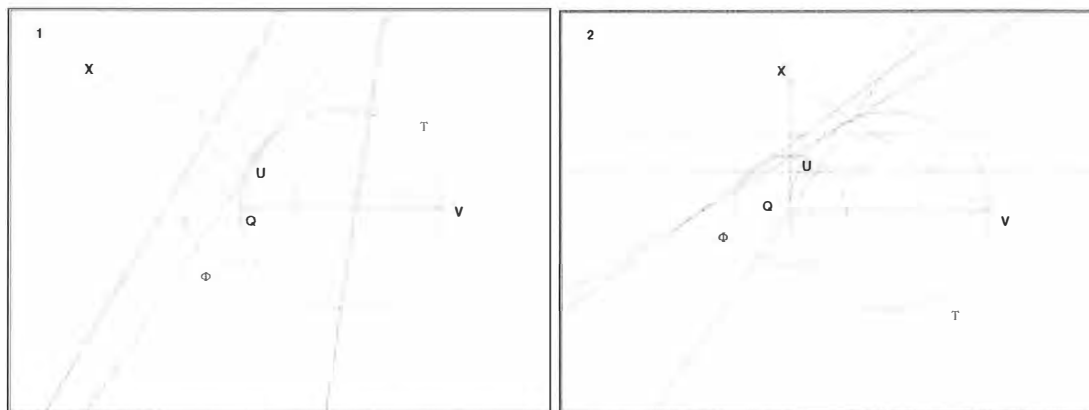
Zusammenfassend haben die Untersuchungen der Vektorfelder der diff. geom. Örter voraussichtlich sensible und definitiv unmögliche Örter für die Lage der Näherungswerte des Umrißpunktes aufgezeigt. Jedoch geben uns diese Vektorfelder nur Auskunft über die Richtungen der Normalenvektoren aber nicht über die Lage der Örter. Daher liegt es

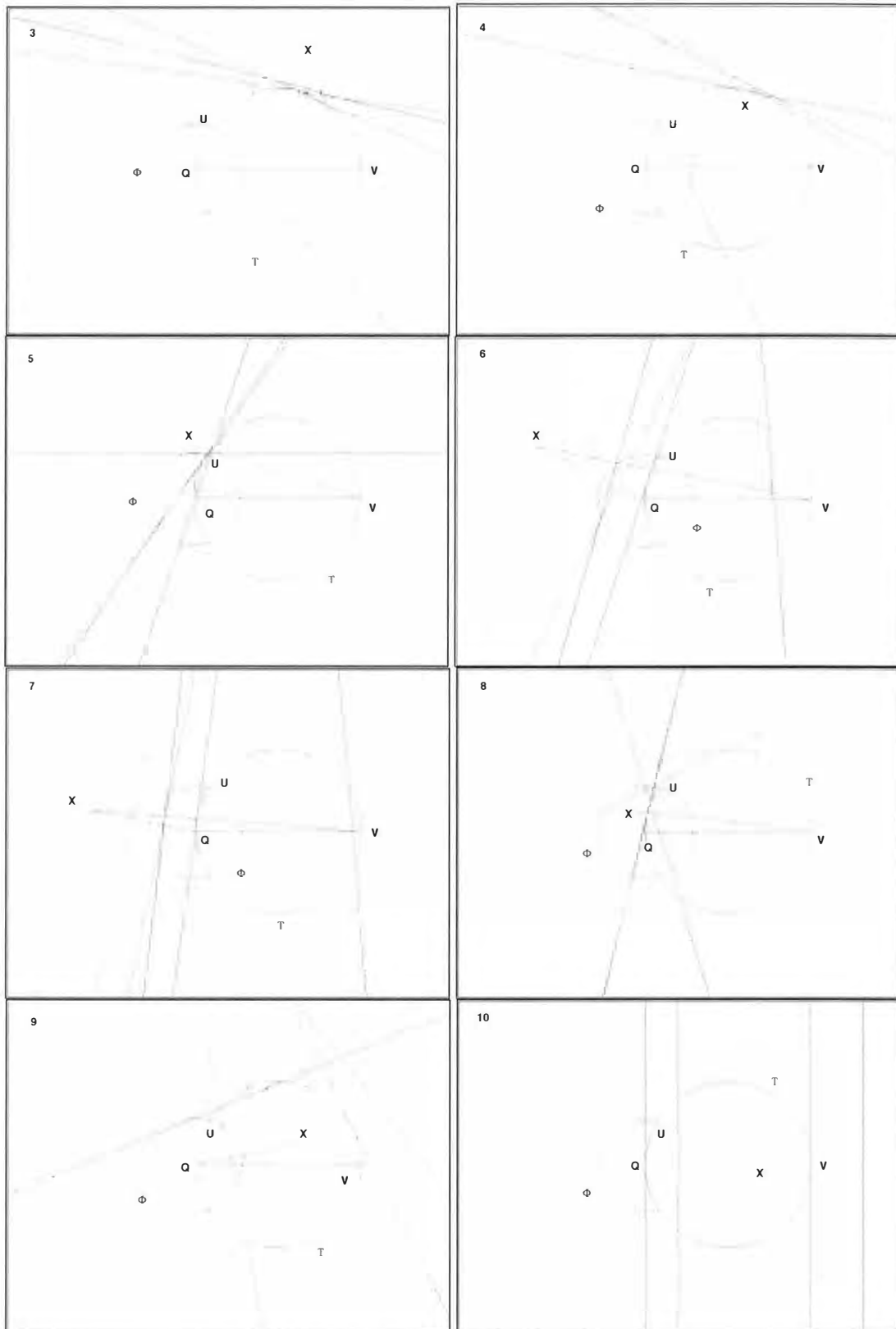
nahe, nicht nur die Normalenvektoren zu untersuchen sonder die Lage der differentiellen geometrischen Örter.

4.3.2 Lageuntersuchung der differentiellen geometrischen Örter von Umriß- und Flächenbedingungen

Wie schon erwähnt stellt der diff. geom. Ort die lineare Ersatzfläche (=Hyperebene) der Beobachtungsgleichung dar. Da hier Schnitte durch die Fläche betrachtet werden, wird der geom. Ort durch eine Gerade repräsentiert. Bevor auf geometrische Zusammenhänge unter den Typen näher eingegangen wird, sollen einige Örter dargestellt werden, um dem Leser ein Gefühl für deren Lage zu vermitteln. Die Berechnung der diff. geom. Örter erfolgt durch die Auswertung der Gleichungen (4.3-2) bis (4.3-7).

Die folgende Abbildung 4-13 zeigt die diff. geom. Örter der unterschiedlichen Typen an zwölf verschiedenen Näherungswerten. Die zwölf Punkte sind gleichmäßig in der oberen Hälfte (oberhalb der Geraden **QV**) verteilt, aus Symmetriegründen (**QV** ist Spiegelachse für diff. geom. Örter) verhält sich die Situation in der unteren Hälfte gleich. Als Fläche wurde eine **Kugel** gewählt, da hier die Zusammenhänge besser sichtbar werden. Dargestellt werden wieder ebene Schnitte, die **Q** und **V** enthalten, es gelten die Farbcodes von Tabelle 4-1.





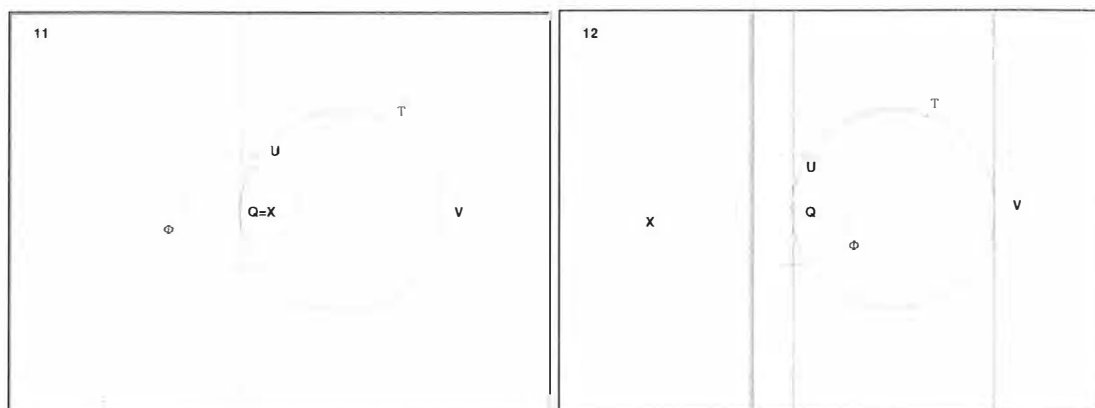


Abbildung 4-13: Darstellung der unterschiedlichen Lagen der diff. geom. Örter bei unterschiedlichen Näherungswerten für ebene Kugelschnitte

Betrachtungen zu den Örtern der fiktiven Umrißbeobachtung:

Auffallend ist, daß sich die diff. geom. Örter in der Lage je nach Typ stark unterscheiden. Lediglich in der Nähe des Umrißpunktes, siehe Abbildung 4-13 Bild 5, liegen die Örter nahe beisammen. Allein diese Tatsache weist darauf hin, daß ein unterschiedliches Konvergenzverhalten je nach gewähltem Typ zu erwarten ist. Auf dem ersten Blick scheinen die Örter der unterschiedlichen Typen in keinem direkten Zusammenhang zu stehen, jedoch bei genauerem Betrachten fallen folgende Gesetzmäßigkeiten auf, die sowohl für die Konstruktion als auch für die Vorstellung wichtig sind. Aus didaktischen Gründen wird zuerst mit den Typen E_2 (grün) und E_3 (rot) begonnen. Die Richtungen der Örter werden, wie in Kapitel 4.3.1 beschrieben, bestimmt. Zur Festlegung fehlt daher nur mehr ein Punkt des Ortes⁴:

Diff. geom. Ort für E_2 (grün): Schneidet man die Gerade XQ mit der Thaleskurve T , so bekommt man einen Punkt des diff. geom. Ortes. Diese Tatsache bewirkt, daß der Ort in der Nähe von V zu liegen kommt, wenn X in der Nähe der Geraden QV liegt, siehe Abbildung 4-13 Bilder 7, 9-12. Auf diese Eigenschaft ist besonders zu achten, wenn die Fläche relativ klein zur Entfernung QV ist, denn hier befindet sich einerseits der Umrißpunkt relativ nahe an der Geraden QV und andererseits kommt dann der diff. geom. Ort weit vom Umrißpunkt zu liegen!

Diff. geom. Ort für E_3 (rot): Schneidet man die Gerade XV mit der Thaleskurve T so bekommt man einen Punkt des diff. geom. Ortes. Diese Tatsache bewirkt, daß der Ort in der Nähe von Q zu liegen kommt, wenn X in der Nähe der Geraden QV liegt, siehe Abbildung 4-13 Bilder 7, 9-12. Auf diese Eigenschaft ist besonders zu achten, wenn die Fläche relativ groß zur Entfernung QV ist. Dadurch liegt der Umrißpunkt nahe bei V , hingegen aber der diff. geom. Ort weit entfernt vom Umrißpunkt bei Q !

⁴ Im Graphikprogramm wurden die diff. geom. Örter nicht mit Hilfe der Konstruktionsvorschriften gezeichnet, sondern berechnet. Diese Konstruktionsregeln sind aber für das Verständnis sehr nützlich.

Diff. geom. Ort für E_1 (blau): Legt man eine Gerade normal zur Geraden XV durch X und schneidet diese mit dem diff. geom. Ort vom Typ E_3 , so liegt dieser Schnittpunkt auf E_1 .

Diff. geom. Ort für E_4 (gelb): Legt man eine Gerade normal zur Geraden XV durch X und schneidet diese mit dem diff. geom. Ort vom Typ E_2 , so liegt dieser Schnittpunkt auf E_4 . Die Kombination aus den Wirbeln des Vektorfeldes und der Schnittkonstruktion bewirkt, daß dieser diff. geom. Ort in Abbildung 4-13 in den Bildern 1 und 7 außerhalb des Rasters liegt und in den Bildern 10-12 unbestimmt ist.

Betrachtungen zu den Örtern der fiktiven Flächenbeobachtung:

Die Abbildung 4-13 zeigt, daß die diff. geom. Örter der Flächenbeobachtung nicht derart große Lagedifferenzen aufweisen wie die Umrißbeobachtungen. Jedoch fällt folgende herausstechende Eigenschaft auf: Der diff. geom. Ort von F_1 (magenta) liegt immer außerhalb der Fläche, hingegen jener von F_2 (cyan) immer innerhalb!

Handelt es sich wie im oberen Musterfall um eine Kugel, so können noch weitere Zusammenhänge unter der Örtern gefunden werden, jedoch würden diese nicht für Quadriken gelten. Die oben angeführten Eigenschaften gelten alle auch für Quadriken wie aus Abbildung 4-14 zu erkennen ist.

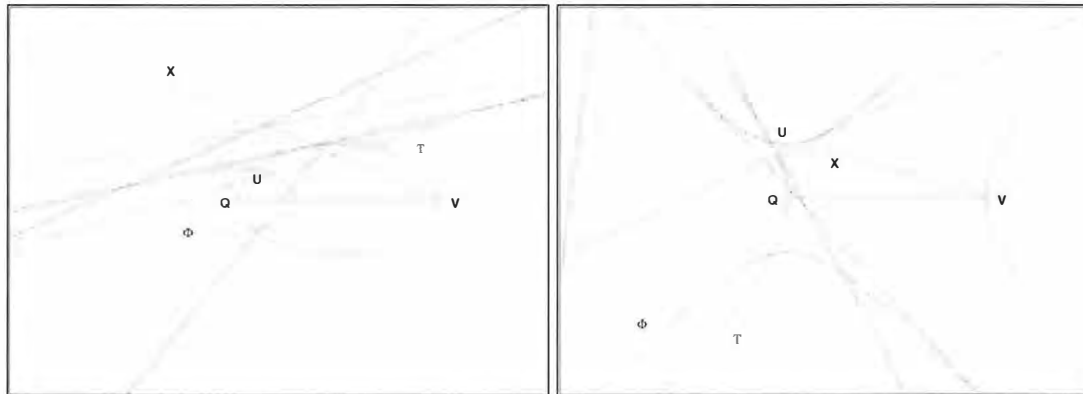


Abbildung 4-14: Darstellung der unterschiedlichen Lagen der diff. geom. Örter in einem ebenen Schnitte von Ellipsoid und Hyperboloid für einen allgemein gewählten Näherungspunkt

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Art des Minimumkriteriums (E_1 - E_4 ; F_1 , F_2) erheblichen Einfluß auf das Konvergenzverhalten nimmt. Eine Grundtendenz läßt sich jetzt schon herauslesen, daß der Typ E_1 wohl die besten und der E_4 die schlechtesten Eigenschaften für eine erfolgreiche Konvergenz aufweist. E_2 scheint mit E_3 und F_1 mit F_2 halbwegs gleichwertig zu sein. Aber um genauere Aussagen treffen zu können, wurde eine Methode entwickelt, die im folgenden Kapitel erklärt und angewendet wird.

Anmerkung: In dieser ausführlichen Art wurden bis jetzt nur Flächen zweiter Ordnung untersucht. Stichprobenartig wurden auch Flächen höherer Ordnung untersucht (z.B. Torus) bei denen ähnliches festgestellt werden konnte. Es ist daher zu erwarten, daß sich

auch andere Flächen nach diesen Gesetzen verhalten werden. Allgemeine und weiterführende Untersuchungen zu diff. geom. Örtern von Flächen höherer Ordnung würde ein sehr interessantes Forschungsgebiet abgeben, jedoch hätte das den Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

4.3.3 Konvergenzbereich für Umriß- und Flächenbedingungen

Ziel ist es, jenen Bereich abzugrenzen, der als Näherungswert für den Umrißpunkt geeignet ist. Wie im Kapitel 4.2 bereits erwähnt wurde, liefert der Schnitt der diff. geom. Örter den neuen Näherungswert. In den Kapiteln 4.3.1 und 4.3.2 konnten aussagekräftige Eigenschaften aus 2-D Darstellungen für die Vektorfelder als auch für die Lage der diff. geom. Örter abgeleitet werden. Um jedoch den Konvergenzbereich abgrenzen zu können, bedarf es der Darstellung von vier Hyperebenen, herrührend aus den vier Beobachtungen (siehe Tabelle 2-2). Diese vier Beobachtungen enthalten einerseits die zwei fiktiven Beobachtungen (Umriß- und Flächenbedingungen) und andererseits die gemessenen Bildkoordinaten. Wünschenswert wäre es, über das Konvergenzverhalten ausschließlich von Umriß- und Flächenbedingungen Aussagen treffen zu können, da bei diesen beiden Beobachtungen keine Meßgrößen angenommen werden müssen. Läßt man hingegen die Beobachtungen der Bildkoordinaten weg, so könnte der neue Näherungswert nicht mehr eindeutig aus dem Schnitt der beiden verbleibenden Hyperebenen – Schnittgerade – bestimmt werden. Betrachtet man allerdings wieder ebene Schnitte von den Flächen, die sowohl Q als auch V enthalten, kann der neue Näherungswert eindeutig bestimmt werden. Durch diese „2-D“ Vorgangsweise wird der Konvergenzbereich des Systems, das aus allen vier Beobachtungen besteht, verfälscht. Allerdings treten hierbei die Konvergenzeigenschaften von Flächen- und Umrißbedingung besser hervor. Rückschlüsse aus den „2-D“ Ergebnissen (ohne gemessenen Bildkoordinaten) auf Eigenschaften des kompletten Systems werden im Kapitel 4.3.4 gezogen.

Für den „2-D“ Fall müssen die Örter von Flächen- und Umrißbedingung miteinander geschnitten werden. Zur Übersichtlichkeit werden die zusammengehörenden Typen in Tabelle 4-2 zusammengefaßt.

Umrißtyp	Flächentyp
Typ E_1 (4.3-2)	Typ F_1 (4.3-6)
Typ E_2 (4.3-3)	Typ F_2 (4.3-7)
Typ E_3 (4.3-4)	Typ F_1 (4.3-6)
Typ E_4 (4.3-5)	Typ F_2 (4.3-7)

Tabelle 4-2: Zusammengehörigkeiten von Umriß- und Flächentypen

Für den Umrißtyp E_1 und dem dazugehörigen Flächentyp F_1 wird eine erfolgreiche Konvergenz in der Abbildung 4-15 dargestellt:

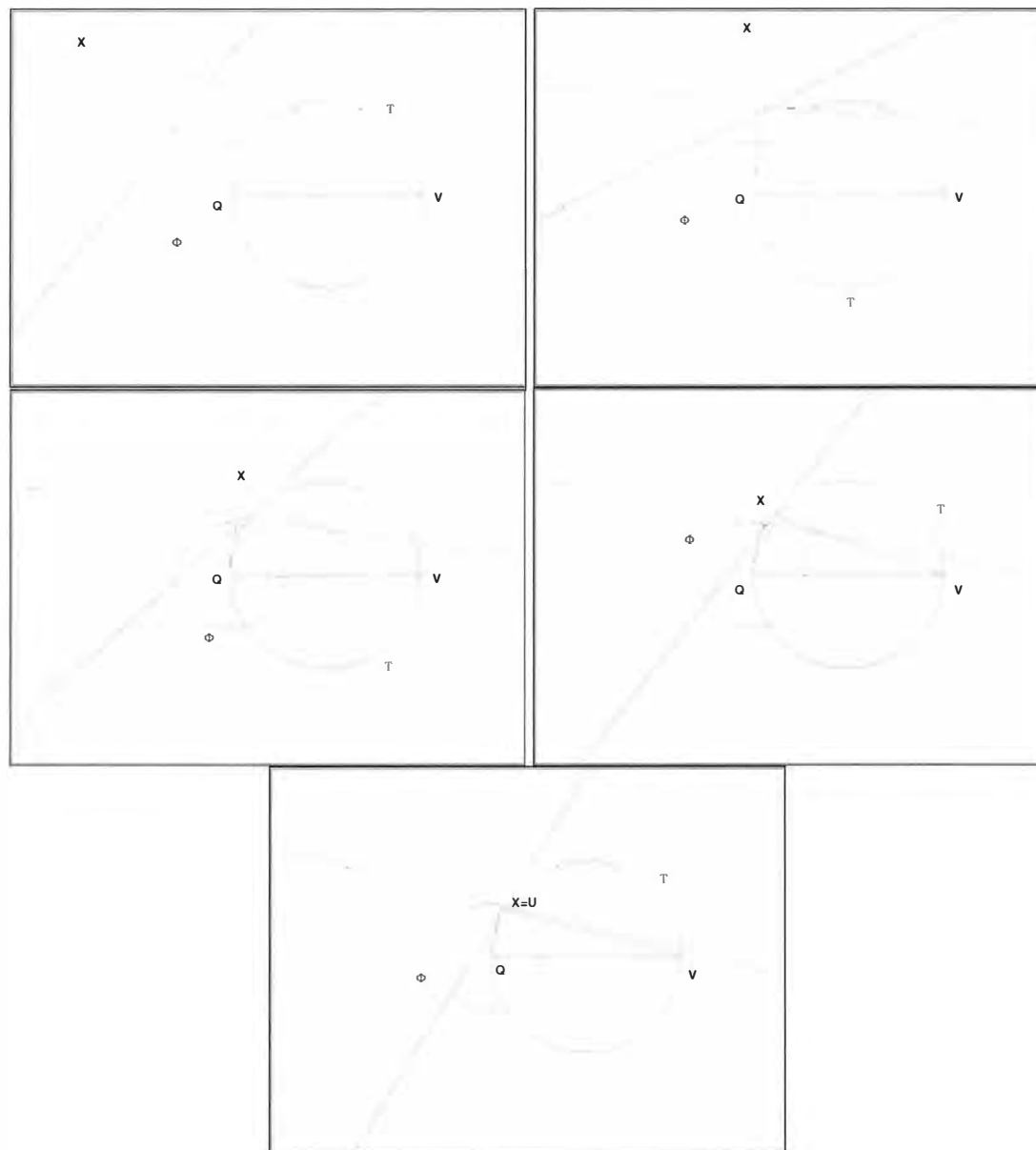


Abbildung 4-15: Erfolgreiche Konvergenz von Umriß- und Flächenbeobachtung

In Abbildung 4-15 sieht man sehr schön, wie von Iteration zu Iteration der Näherungspunkt X dem Umrißpunkt U zustrebt, bis er schließlich mit ihm im letzten Bild zusammenfällt. Prüft man für jeden Rasterpunkt, ob die Iterationen zum Umrißpunkt führen, so kann dadurch der Konvergenzbereich bestimmt werden. Alle Punkte, von denen aus das System konvergiert, werden mit einem Kreis versehen. Die Farbe des Kreises gibt Auskunft wie viele Iterationen nötig sind, bis der Umrißpunkt erreicht wird. Von Punkten mit gleicher Farbe ausgehend konvergiert das System gleich schnell. Die Anzahl der Iterationen kann so eruiert werden, indem man die Farbübergänge vom Umrißpunkt zum Näherungspunkt zählt. Punkte mit einem schwarzen Doppelkreis zeigen

jene Punkte an, an denen der diff. geom. Ort unbestimmt ist. Punkte, von denen das System aus nicht konvergiert, werden lediglich durch den Rasterpunkt dargestellt.

Zu Beginn werden die Konvergenzbereiche für den **Kreis** (analog zur Kugel im \mathbb{R}^3) untersucht:

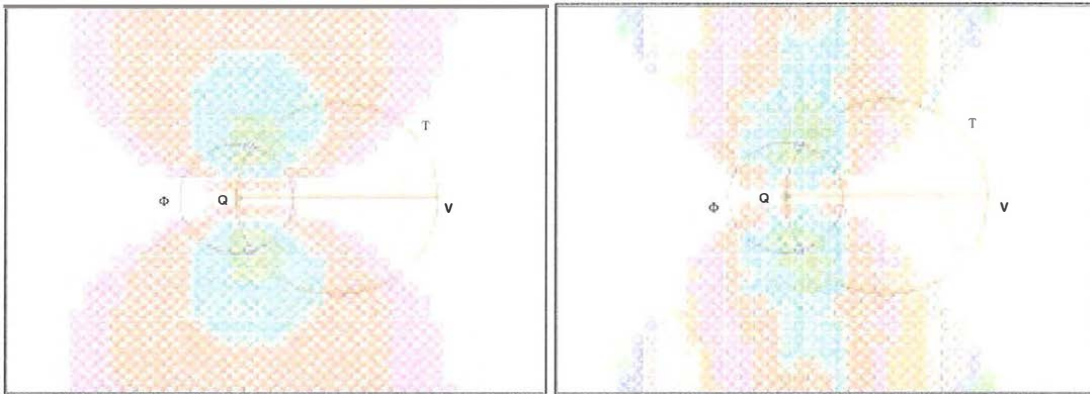


Abbildung 4-16: Konvergenzbereiche bei einem Kreis für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts

Abbildung 4-16 zeigt die Konvergenzbereiche für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts. Beide weisen einen zusammenhängenden, annähernd gleich großen Bereich auf. Auffällig ist, daß E_2 bei weitem mehr Farbschichten hat, was ein Zeichen für langsamere Konvergenz ist. Die zwei konvergenzfreien Räume, der eine hinter dem Kreis (Art „Schlagschatten“) der andere davor, liegen dort, wo man das erwarten kann.

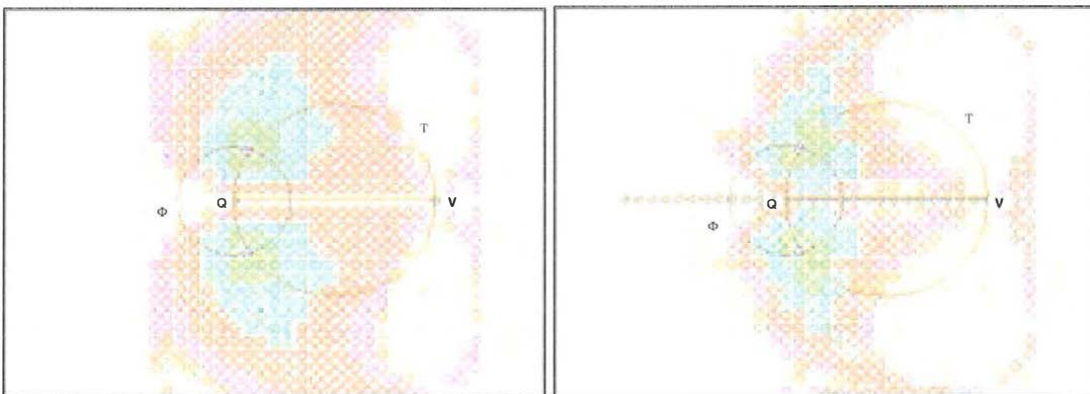


Abbildung 4-17: Konvergenzbereiche bei einem Kreis für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts

Abbildung 4-17 zeigt die Konvergenzbereiche für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts. Diese Konvergenzbereiche unterscheiden sich optisch stark von jenen in Abbildung 4-16. Beide haben wieder einen zusammenhängenden Bereich, jedoch enthält dieser ein Loch neben V . Besonders auffällig ist, daß sowohl bei E_3 als auch bei E_4 das System bei Punkten konvergiert, die hinter V liegen. Weiters fällt auf, daß der Konvergenzbereich bei E_4 kleiner ist als bei den anderen.

Ellipse in 1. Hauptlage:

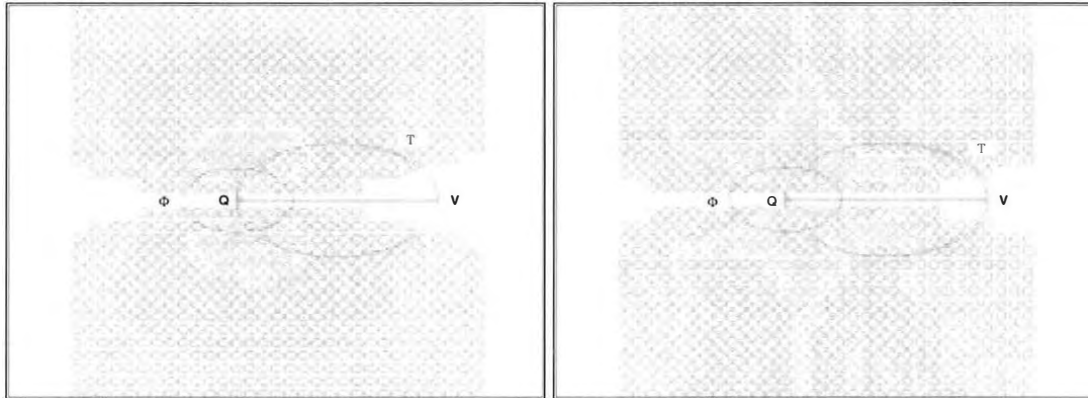


Abbildung 4-18: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 1. Hauptlage für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts

Abbildung 4-18 zeigt die Konvergenzbereiche für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts. Beide Konvergenzbereiche sind wieder zusammenhängend, jedoch größer als jene bei der Kugel, Ursache dafür ist die Matrix \mathbf{F} . Würde eine Ellipse in 2. Hauptlage gegeben sein, würde sich der Konvergenzbereich gegenüber der Kugel verkleinern. Weiters sind bei E_2 wieder mehr Farbschichten, was ein Zeichen für eine langsamere Konvergenz ist.

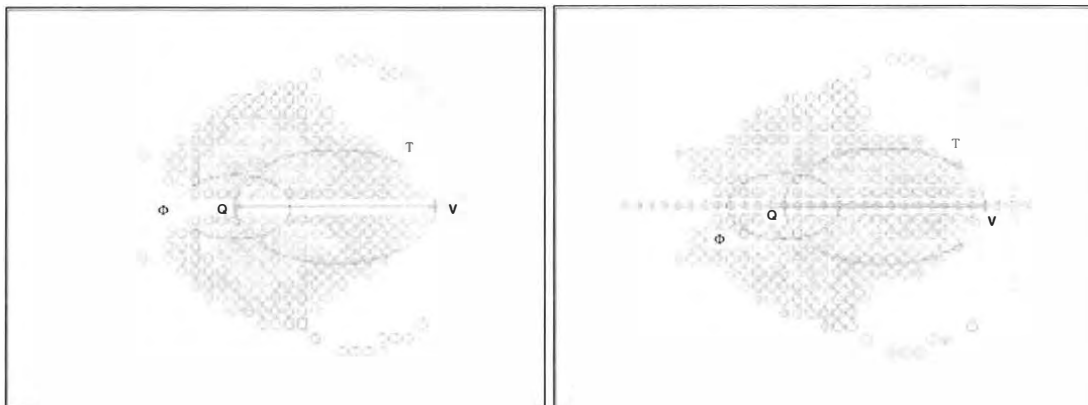


Abbildung 4-19: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 1. Hauptlage für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts

Abbildung 4-19 zeigt die Konvergenzbereiche für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts. Auch diese Konvergenzbereiche unterscheiden sich wieder optisch stark von jenen in Abbildung 4-18. Diesmal liegt kein einzelner zusammenhängender Bereich mehr vor. Es besteht weiterhin ein dominierender Bereich jedoch existieren auch vereinzelte isolierte Punkte bzw. Punktgruppen, von denen das System aus konvergiert. Weiters fällt auf, daß der Konvergenzbereich bei E_3 und E_4 kleiner ist als bei den beiden anderen.

Ellipse in 2. Hauptlage, \mathbf{V} nicht auf einer der beiden Ellipsenachsen:



Abbildung 4-20: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 2. Hauptlage für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts

Abbildung 4-20 zeigt die Konvergenzbereiche für E_1 mit F_1 links; dieser unterscheidet sich lediglich von jenem in Abbildung 4-18 dadurch, daß er verzerrt ist auf Grund der Verschiebung von \mathbf{V} . Die Tatsache, daß es sich hier um eine Ellipse in 2. Hauptlage handelt, wirkt sich nur sehr schwach bis gar nicht aus. Jedoch bei E_2 mit F_2 rechts bewirkt die 2. Hauptlage, daß der Bereich viel kleiner wird als in Abbildung 4-18. Ursache dafür ist die Matrix \mathbf{F} , wie schon zuvor erwähnt wurde.

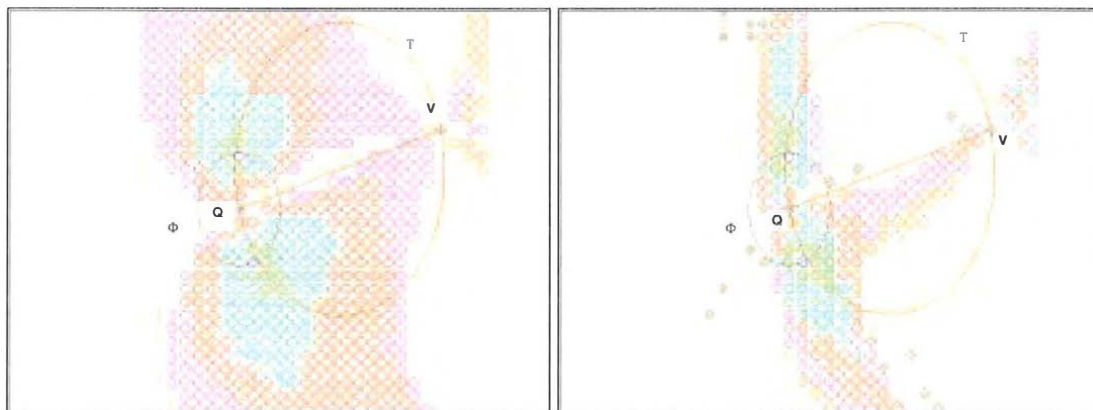


Abbildung 4-21: Konvergenzbereiche bei einer Ellipse in 2. Hauptlage für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts

Abbildung 4-21 zeigt die Konvergenzbereiche für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts. Besonders auffallend ist, daß der Konvergenzbereich von E_3 größer ist als jener von E_2 , man könnte sagen, daß die beiden Typen die „Rollen“ getauscht haben. Die Begründung liegt wieder bei der Matrix \mathbf{F} . E_4 weist wieder einen sehr auffälligen Konvergenzbereich auf, der diesmal jenem von E_2 ähnelt. Es besteht bei E_2 und E_4 ein dominanter Bereich; jedoch existieren auch vereinzelte isolierte Punkte bzw. Punktgruppen, von denen das System aus konvergiert. Weiters fällt auf, daß der Konvergenzbereich bei E_2 und E_4 kleiner ist als bei den beiden anderen.

Hyperbel in 2. Hauptlage:

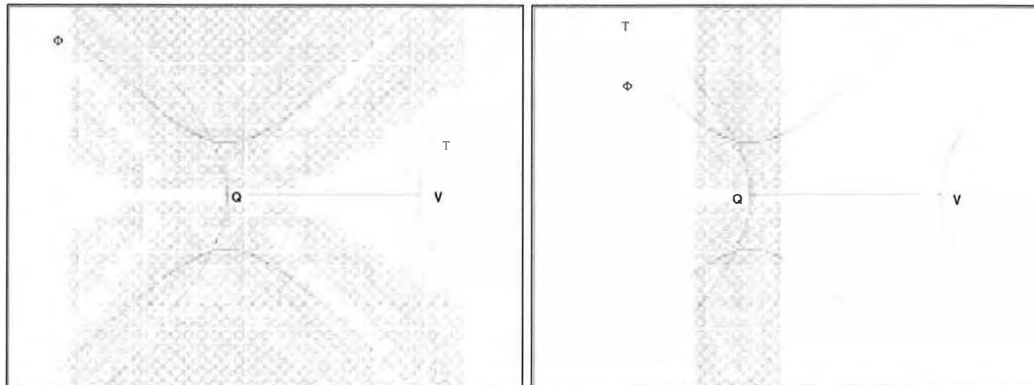


Abbildung 4-22: Konvergenzbereiche bei einer Hyperbel in 2. Hauptlage für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts

Abbildung 4-22 zeigt die Konvergenzbereiche für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts. E_1 besticht wieder durch einen großen und zusammenhängenden Konvergenzbereich. E_2 hingegen weist nur ein relativ kleines Band, normal zur Geraden QV , als Konvergenzbereich aus.

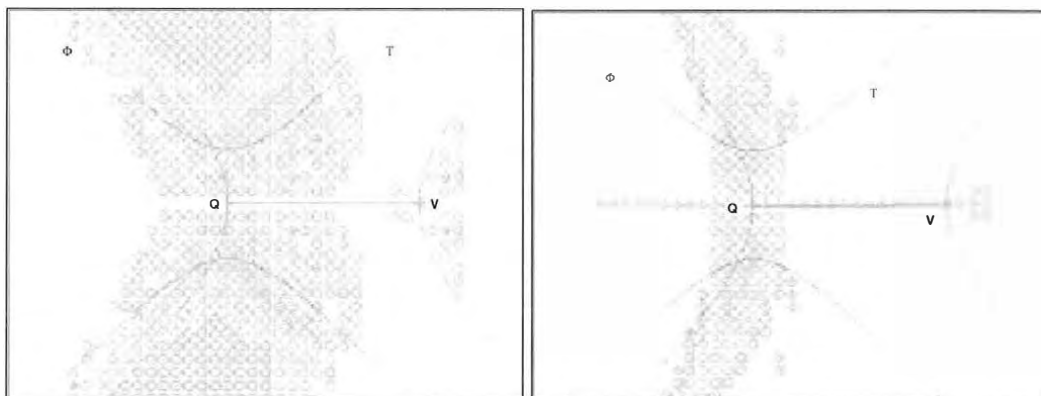


Abbildung 4-23: Konvergenzbereiche bei einer Hyperbel in 2. Hauptlage für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts

Abbildung 4-23 zeigt die Konvergenzbereiche für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts. Der Konvergenzbereich von E_3 ist größer als jener von E_2 , aber nicht ganz so groß wie jener von E_1 . E_4 weist wieder einen sehr auffälligen Konvergenzbereich auf, der eine Art Kombination aus E_2 und E_3 ist. Die Größe stammt von E_2 , die Form von E_3 .

Hyperbel in 1. Hauptlage:

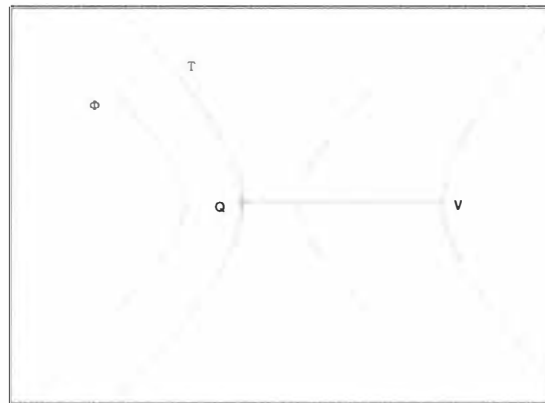


Abbildung 4-24: Konvergenzbereich bei einer Hyperbel in 1. Hauptlage für E_1 mit F_1

Das besondere an diesem Beispiel ist, daß das Projektionszentrum V in der rechten Schale der Hyperbel liegt und somit kein Umrißpunkt existieren kann. Abbildung 4-24 zeigt dieses auch, weil Φ mit T keinen Schnitt hat, und weist auch keinen Punkt als geeigneten Näherungswert aus.

Es soll nochmals erwähnt werden, daß die in diesem Kapitel gefundenen Konvergenzbereiche und deren Eigenschaften auf Vereinfachungen beruhen. Im Kapitel 4.3.4 werden die hier gewonnenen Erkenntnisse vor allem durch geometrische Überlegungen auf das komplette System (mit gemessenen Bildkoordinaten und im \mathbb{R}^3) übertragen.

4.3.4 Erweiternde Überlegungen zum Konvergenzbereich von Umriß- und Flächenbedingung im \mathbb{R}^3

Die in Kapitel 4.3.3 abgeleiteten Ergebnisse beruhen auf der Tatsache, daß die zwei Beobachtungen der Bildkoordinaten weggelassen wurden und nur ebene Schnitte, die Q und V enthielten, der Fläche betrachtet wurden. Ziel ist es, diese Ergebnisse für das System Umriß- und Flächenbedingung und beobachtete Bildkoordinaten zu erweitern. Um einen Bereich für die Schnittkonvergenz von diesem System angeben zu können, müßte für *jeden* Rasterpunkt und für *jede* Richtung des Sehstrahls ein ausgleichender Schnitt der Hyperebenen durchgeführt werden. Dieser Schnittpunkt wäre dann der neue Näherungswert, für den dann wiederum die Örter berechnet werden würden und so weiter, bis eine Konvergenz oder Divergenz des Gleichungssystems erfolgt. Eine derartig empirisch Untersuchung wäre für diese Arbeit einerseits zu umfangreich geworden, andererseits gelingt es, durch allgemeine Überlegungen und geschickt getroffene Annahmen hinreichende Aussagen über die Konvergenz im \mathbb{R}^3 abzuleiten.

Zwei Fragen erscheinen von besonderer Wichtigkeit zu sein:

1. Vergrößert oder verkleinert sich der Konvergenzbereich?
2. Gelten die unterschiedlichen Charakteristika der Typen E_1 - E_4 auch im \mathbb{R}^3 ?

Zur Beantwortung beider Fragen ist folgende Überlegung sehr wichtig: Wie schon oben erwähnt, bekommt man den neuen Näherungswert als Schnitt der vier Hyperebenen. Diese vier Ebenen schneiden einander allgemein nicht in einem Punkt sondern in einem Tetraeder. Der Schnittpunkt ist bei gleicher Gewichtung der Beobachtungen der Schwerpunkt des Tetraeders. Der Schnittpunkt könnte auch über folgende Konstruktion bestimmt werden: Man scheidet paarweise die Hyperebenen von Umriß- und Flächenbedingung und die Ebenen der beiden Bildkoordinatenbeobachtungen miteinander (Anm.: Der Schnitt der dieser beiden Hyperebenen liefert den Sehstrahl.). So liegt dann der Schnittpunkt in der Mitte des Gemeinlots der beiden Geraden.

Ad 1: Zuerst betrachten wir einen ebenen Schnitt, der den Sehstrahl g und die Strecke QV enthält. Der Näherungswert X soll vorab auch in dieser Ebene liegen. Diese Annahme bewirkt, daß in diesem Fall (Kugel) die Hyperebenen projizierend erscheinen. In blau ist die Hyperebene vom Typen E_1 und in magenta jene vom Typ F_1 dargestellt. Die Schnittgerade h der beiden Hyperebenen ist daher auch projizierend, somit liegt das Gemeinlot und S auch in dieser Ebene und kann eingezeichnet werden (siehe Abbildung 4-25). Aus dieser Abbildung kann man sofort erkennen, daß der neue Näherungswert (Schnittpunkt) S mit Berücksichtigung des Sehstrahls näher zum Umrißpunkt U rückt als ohne. Jedoch das hängt natürlich sehr von der Exaktheit der Richtung des Sehstrahls ab. Aber bei der Objektrekonstruktion kann man davon ausgehen, daß eine sehr gute Richtung des Sehstrahls vorliegt.

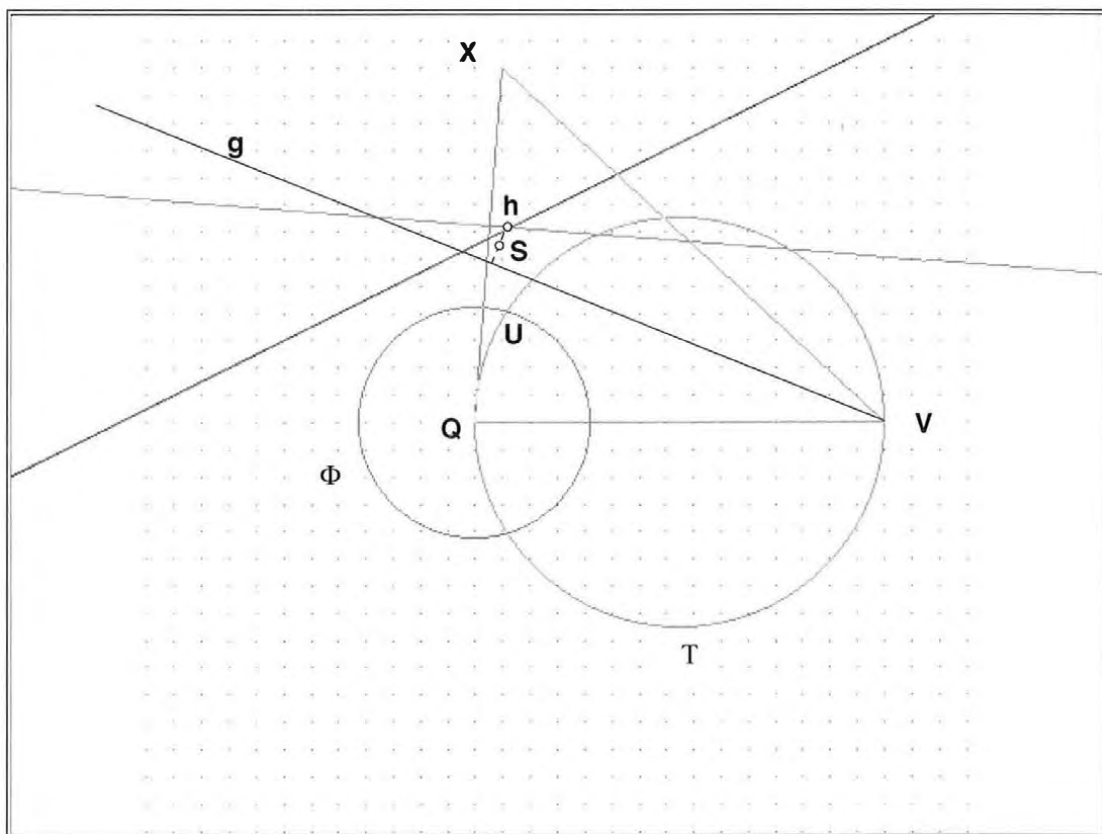


Abbildung 4-25: Bestimmung des Schnittpunktes im \mathbb{R}^3 über Gemeinlot

Löst man sich von der Annahme, daß der Näherungswert \mathbf{X} auch in der Schnittebene liegt und läßt ihn z.B. um die Achse \mathbf{QV} rotieren, so könnte der Schnittpunkt in sehr ungünstigen Bereichen, vergleiche Kapitel 4.3.1 und 4.3.2, zu liegen kommen. Je weiter sich \mathbf{X} vom Sehstrahl entfernt, desto eher muß mit ungewünschten Effekten oder sogar mit Singularitäten gerechnet werden. Liegt der Näherungswert \mathbf{X} auf dem Sehstrahl g, so kann dieses Problem einfach umgangen werden. Betrachtet man in Kombination Abbildung 4-25 und Abbildung 4-16 (rechtes Bild) so erkennt man, daß nicht unbedingt jeder Punkt am Sehstrahl zur Konvergenz führen muß. In jedem Fall führen die Punkte zur Konvergenz, die es auch ohne Sehstrahl getan haben. Durch Einbeziehung des Sehstrahls vergrößert sich sogar der Konvergenzbereich, weil in den Abbildungen über die Konvergenzbereiche Punkte als ungünstig ausgewiesen werden, deren Schnittpunkt z.B. von E_1 und F_1 außerhalb des Rasters lagen. Der Sehstrahl bewirkt nun, daß der Schnittpunkt näher beim Umrißpunkt zu liegen kommt und somit zu einer Konvergenz führt. Allgemein kann gesagt werden, je weiter man sich am Sehstrahl mit dem Näherungswert von der Fläche entfernt, desto wahrscheinlicher wird eine Divergenz. Daher sollte man den Näherungswert am Sehstrahl auf etwa gleicher Höhe der Fläche suchen, um nicht in gefährliche Randzonen zu kommen. Abschließend kann gesagt werden, daß die Konvergenzbereiche im \mathcal{R}^3 jenen im \mathcal{R}^2 ähneln, wenn man die oben genannten (einfach zu bewerkstelligenden) Lagebeziehungen berücksichtigt.

Ad 2:

Geht man davon aus, daß die Näherungswerte unter Berücksichtigung der oben genannten Kriterien bestimmt werden, so kann aus analogen und geometrischen Überlegungen gesagt werden, daß die in Kapitel 4.3.3 für die Typen unterschiedlichen Merkmale auf den \mathcal{R}^3 -Fall übertragen werden können. Diese Behauptung wurde auch stichprobenartig an Quadriken und Toren überprüft.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Konvergenzverhalten sowohl in \mathcal{R}^2 - bzw. im \mathcal{R}^3 -Fall sehr stark von Fläche, Typ und Sehstrahl abhängt und dadurch eine sehr hohe Bedeutung der Güte der Näherungswerte für die Umrißpunkte zukommt. Aus den untersuchten Flächen geht hervor, daß der Typ E_1 in den meisten Fällen der geeignetste ist, um die gewünschte Konvergenz zu erzielen. Ist dieser Typ jedoch als Minimumkriterium ungeeignet, sollte man die Iteration trotzdem mit diesem Typ starten und erst in der letzten Iteration auf den gewünschten anderen Typ umschalten. Im Kapitel 5 werden verschiedene Verfahren zur Bestimmung von Näherungswerten für Umrißpunkte angegeben, um sie mit hinreichender Qualität zu bestimmen.

5 Bestimmung der Näherungswerte für Umrißpunkte

Wie aus Kapitel 4 hervorgeht, ist die Güte der Näherungswerte für die Umrißpunkte von besonderer Wichtigkeit. Daher werden in diesem Kapitel verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Näherungswerte angegeben. Grob können diese Verfahren in drei Gruppen zusammen gefaßt werden: Verfahren, die unabhängig von der Flächendarstellung sind, werden im Kapitel 5.2 angeführt; Verfahren, die nur für Flächen in Parameterdarstellung geeignet sind, im Kapitel 5.3 und Verfahren, die für implizit gegebene Flächen geeignet sind, im Kapitel 5.4. Explizit gegebene Flächen können in eine der beiden anderen Darstellungsmöglichkeiten übergeführt werden (siehe Kapitel 3.2.3).

Für die Berechnung der Näherungswerte des Umrißpunktes müssen Sehstrahl und Fläche im selben Koordinatensystem dargestellt werden. Naheliegender wäre es, den Näherungswert im Referenzsystem zu berechnen, da auch in diesem System die Umrißbedingung formuliert wird. Aber dazu müßte die Fläche transformiert werden, was wiederum zu einer komplizierteren Flächendarstellung führen kann. Daher transformiert man den Sehstrahl ins Modellsystem.

5.1 Transformation des Sehstrahls vom Bild- ins Modellsystem

Die Darstellung des Sehstrahls g im Bildsystem lautet:

$$g: \quad {}_B X^i = {}_B V^i + m \cdot {}_B s^i \quad (5.1-1)$$

mit

$${}_B s^i = {}_B U^i - {}_B V^i$$

$${}_B \mathbf{U} = \begin{pmatrix} {}_B U^1 \\ {}_B U^2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad {}_B \mathbf{V} = \begin{pmatrix} {}_B V^1 \\ {}_B V^2 \\ c \end{pmatrix}$$

${}_B U^i$ gemessene Bildkoordinaten des Umrißpunktes
 ${}_B V^i$ Bildkoordinaten des Hauptpunktes
 c Kammerkonstante
 m Parameter der Sehstrahlgleichung

Da das Projektionszentrum \mathbf{V} der homologe Punkt bei der Transformation vom Bild- ins Referenzsystem ist (siehe Kapitel 3.1.1), wird \mathbf{V} nur vom Referenz- ins Modellsystem nach Umkehrung von (3.1-3) transformiert:

$${}_M V^i = \frac{1}{{}_M m} {}_M R_j^i ({}_R V^j - {}_R Q^j) + {}_M Q^i \quad (5.1-2)$$

Der Sehstrahlvektor ${}_B \mathbf{s}$ wird nach (3.1-2) ins Referenzsystem und anschließend durch Umkehrung von (3.1-4) ins Modellkoordinatensystem transformiert:

$${}_M S^i = \frac{{}_B m}{{}_M m} {}_M R_j^i {}_B R_k^j {}_B S^k \quad (5.1-3)$$

Nun bekommt man den Sehstrahl im Modellsystem:

$$g: \quad {}_M X^i = {}_M V^i + m {}_M S^i \quad (5.1-4)$$

m Parameter der Sehstrahlgleichung

5.2 Flächenunabhängige Lösungsansätze zur Bestimmung der Näherungswerte

In diesem Kapitel werden Verfahren zur Bestimmung der Näherungswerte für die Umrißpunkte angegeben, die unabhängig von der Darstellungsart der Fläche sind. Wie in Kapitel 4.3.4, kann auch hier angenommen werden, daß die Richtung \mathbf{s} des Sehstrahls g und das Projektionszentrum \mathbf{V} bei der Objektrekonstruktion der Fläche Φ sehr gut bekannt sind. Dadurch läßt sich der Sehstrahl g mit Hilfe der Formel (5.1-4) im Modellsystem beschreiben. In den Formeln wird wieder auf den systemanzeigenden Index verzichtet, da alle Berechnungen im Modellsystem erfolgen:

Verfahren I:

Für dieses Verfahren ist es wichtig, daß eine mittlere Distanz d von \mathbf{V} zur Fläche Φ bekannt ist. Die Distanz d kann über verschiedene Arten bestimmt werden: Man könnte eine mittlere Entfernung zur Fläche mit genäherter Normalfallphotogrammetrie oder auch mit einem Entfernungsmesser bestimmen. Es besteht aber auch die Möglichkeit die Entfernung zu berechnen: Wurde ein Verknüpfungspunkt \mathbf{T} auf der Fläche bestimmt, so kann für die Distanz d die Länge der Strecke \mathbf{TV} verwendet werden.

Dann wird der Näherungswert \mathbf{S} für den Umrißpunkt \mathbf{U} so berechnet, daß \mathbf{S} am Sehstrahl liegt und die Strecke \mathbf{SV} die Länge d hat:

$$S^i = V^i + \frac{d}{\sqrt{S^k S_k}} S^i \quad (5.2-1)$$

Hinweis: Gefahr besteht bei diesem Verfahren, daß eine Distanz d nicht für alle Punkte ausreichend genau ist, oder sogar für einen Sehstrahl mehrere Punkte in unterschiedlichen Entfernungen in Frage kommen. Bei Quadriken oder ähnlich geformten Flächen wird man mit einer Distanz auskommen, hingegen bei einem Torus sollten mehrere Distanzen verwendet werden oder man greift auf ein anderes Verfahren zurück (siehe Kapitel 5.4).

Verfahren 2:

Dieses Verfahren ist besonders gut geeignet, wenn sich der Wahre Umriß der Fläche Φ nahezu in einer Ebene ε befindet. Kennt man weiters einen Punkt P in dieser oder nahe dieser Ebene ε , so kann der Näherungswert S wie folgt bestimmt werden:

Bei dem Punkt P kann es sich um einen Verknüpfungspunkt auf der Fläche, oder auch um den Flächenmittelpunkt handeln. Die Ebene ε wird dann so gelegt, daß sie einerseits P enthält und andererseits normal auf s steht.

Die Normalform von ε lautet:

$$\varepsilon: \quad s^i X_i = s^i P_i \quad (5.2-2)$$

Den Näherungswert S erhält man als Schnittpunkt von Sehstrahl g und Ebene ε .

S kann auf folgende Art berechnet werden: Das Einsetzen der Sehstrahlgleichung (5.1-4) in (5.2-2) führt zu einer linearen Gleichung in m , löst man diese Gleichung nach m auf und setzt m wieder in (5.1-4) ein, so erhält man den gesuchten Schnittpunkt S .

Hinweis: Es muß nicht für jeden Sehstrahl eine eigene Ebene aufgespannt werden. Es reicht in vielen Fällen, wenn eine mittlere Richtung dazu verwendet wird. Bei dem Musterbeispiel in Kapitel 7 wird dieses Verfahren zur Bestimmung der Näherungswerte angewendet. Auch hier werden alle Näherungswerte der Umrißpunkte in einem Bild mit Hilfe einer Ebene bestimmt, die normal zum Hauptstrahl des Bildes (ist gleichbedeutend mit Bildebene und Ebene ε sind parallel) steht. Diese Methode wird deshalb in Kapitel 7 angewendet, weil sie sehr leicht in ORIENT realisierbar ist. Weiters würde sich auch als mittlere Richtung der Vektor $s^i = V^i - P^i$ anbieten.

5.3 Bestimmung der Näherungswerte für Flächen in Parameterdarstellung

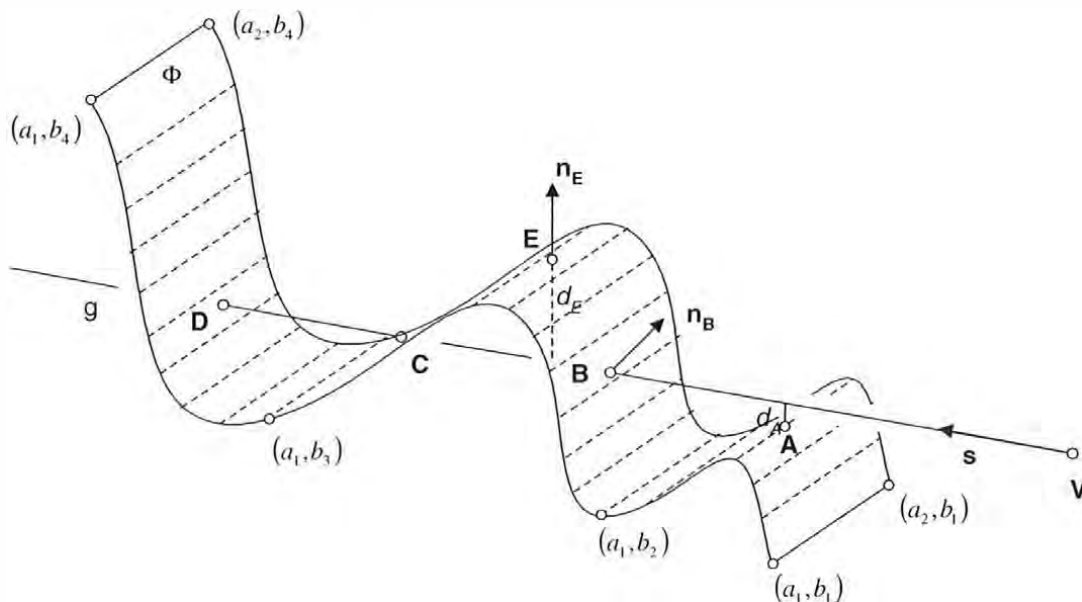
Die hier angegebene Methode sollte nur dann verwendet werden, wenn die in Kapitel 5.2 versagen oder die Voraussetzungen nicht gegeben sind. Grund dafür ist, daß bei der Objektrekonstruktion im Gegensatz zum Sehstrahl die Lage und Orientierung der Fläche nur sehr ungenau bekannt sind. Darüber hinaus muß auch noch über die Formparameter der Fläche verfügt werden. Diese Tatsachen sind deshalb sehr unangenehm, da bei dieser Methode ein Punkt auf der Fläche gesucht wird und daher auch mit der Fläche gerechnet wird.

Die Grundidee dieses Verfahrens ist, jenen Punkt A auf der Fläche zu finden, an dem die Umrißbedingung $n^i s_i = 0$ erfüllt ist und einen möglichst kurzen Abstand zum Sehstrahl g

1. *Schritt:* Dieser Schritt ist wohl der wichtigste bei dieser Methode. Es muß eine Fläche Φ , die der zu bestimmenden Fläche ähnelt, und deren Parameterdarstellung gefunden werden. Dazu können diverse Flächenatlanten, z.B. [Loria, 1910], herangezogen werden. Anschließend muß die Fläche Φ in annähernd richtiger Stellung zum Sehstrahl g gebracht werden. Dieser Schritt kann im Falle einer Kugel oder Quadrik einfach sein, hingegen bei Flächen höherer Ordnung durchaus zu einem diffizilen Problem für den Benutzer werden.

2. *Schritt:* Im nächsten Schritt muß die Domäne der Fläche Φ bestimmt werden. Mit dem Begriff Domäne wird in dieser Arbeit jener relevante Teil des Definitionsbereiches der Fläche bezeichnet, der für die Näherungswertsuche in Frage kommt. Der Definitionsbereich für die Fläche kann gemeinsam mit der Flächendarstellung aus den Flächenatlanten entnommen werden. Wurde schließlich eine Fläche Φ gefunden, so kann sie und ihr Definitionsbereich in folgender Form angeschrieben werden:

Bevor Kriterien für die Bestimmung der Domäne angegeben werden, soll Abbildung 5-1 auf mögliche Gefahren hinweisen.



63

Aus Abbildung 5-1 erkennt man, daß ohne näheres Wissen über die Lage des Umrißpunktes mehrere Bereiche für die Kandidaten in Frage kommen. Die Parameter u_1 und u_2 des einen Kandidaten würden im Intervall $[a_1, a_2]$ beziehungsweise im Intervall $[b_1, b_2]$ liegen, die des anderen in $[a_1, a_2]$ beziehungsweise in $[b_2, b_3]$. Daran erkennt man, wie wichtig eine sorgfältige Wahl einer Domäne ist. In einigen Fällen wird bereits das Wissen, daß die Fläche außerhalb eines gewissen Bereiches in der Natur nicht mehr existiert, die Mehrdeutigkeit lösen. In allen anderen Fällen wird der Benutzer klärend eingreifen müssen. Auf den ersten Blick scheint eine vollständige Automatisierung dieser Methode nicht möglich zu sein. Man sollte aber auch in diese Überlegung einbeziehen, daß die in Abbildung 5-1 dargestellte Situation bewußt schwierig gewählt wurde, und in vielen anderen Fällen die Domäne automatisch gefunden werden kann. Somit ergibt sich eine mögliche Domäne bei sehr gutem Vorwissen über die Parameterverteilung zu:

$$u_1 \in [a_1, a_2]; u_2 \in [b_1, b_2] \quad (5.3-2)$$

oder bei praktisch keinem oder sehr geringem Vorwissen zu:

$$u_1 \in [a_1, a_2]; u_2 \in [b_1, b_4] \quad (5.3-3)$$

Bei der im Fall (5.3-3) angegebenen Domäne bedarf es einer weiteren, wenn möglich automatischen, Einschränkung des Bereiches, um eine ähnlich gute und vielversprechende Ausgangsposition zu bekommen, wie im Fall (5.3-2). Ferner ist auf Singularitäten der Flächendarstellung zu achten. Kommen Singularitäten in der Nähe oder sogar in der Domäne vor, so gilt hier höchste Vorsicht. Diese können natürlich genauso wie beim Definitionsbereich auch aus der Domäne ausgeschlossen werden, wobei dies aber eher auf eine falsche Wahl der Domäne hindeutet oder überhaupt auf eine falsche Wahl der Fläche.

Es sei darauf hingewiesen, daß die im folgenden angegebene Methode zur Einschränkung der Domäne mit Vorsicht zu genießen ist, da sie nie in der Praxis ausreichend getestet wurde:

Um die Domäne weiter einschränken zu können, versucht man Punkte auf der Fläche Φ zu finden, die einen möglichst kurzen Abstand d zum Sehstrahl g haben. Zu diesem Zweck verteilt man regelmäßig über der Domäne (5.3-3) die Punkte $A_{lm}(u_1, u_2)$ und berechnet die Abstände $d_{lm}(u_1, u_2)$ zum Sehstrahl g (siehe Abbildung 5-2):

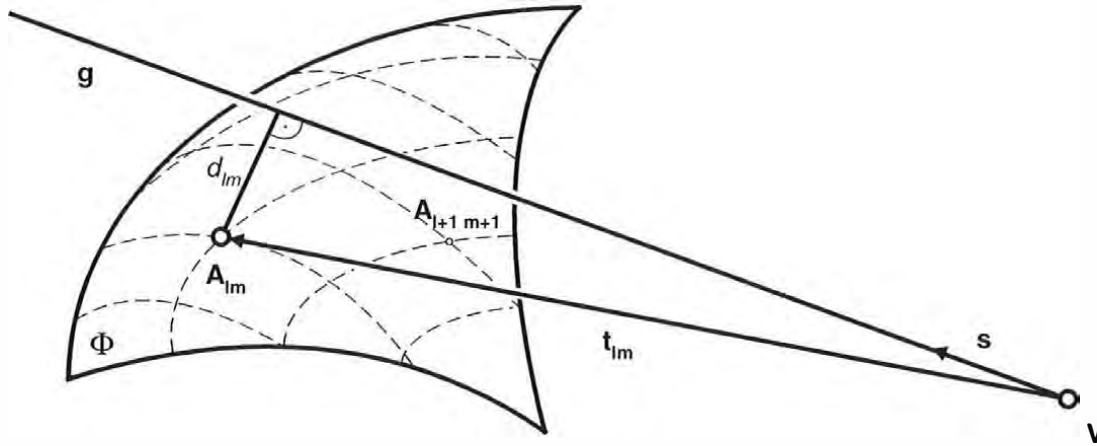


Abbildung 5-2: Testpunktverteilung und Abstände zum Sehstrahl

Die Testpunkte werden innerhalb der Domäne regelmäßig verteilt durch:

$$u_{\alpha} = a_{\alpha} + k_{\alpha} \delta u_{\alpha} \quad \text{mit} \quad k_{\alpha} = 0 (1) n_{\alpha} \quad (5.3-4)$$

Bei einer Anzahl von $(n_1+1)(n_2+1)$ Testpunkten ergeben sich die δu_i zu:

$$\delta u_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}; \delta u_2 = \frac{b_2 - b_1}{n_2} \quad (5.3-5)$$

Bei der Wahl der Größen n_1 und n_2 sollte man folgendes beachten: Eine zu geringe Anzahl an Testpunkten könnte zu einem Versagen des Verfahrens führen, jedoch eine zu große Anzahl lediglich zu längeren Rechenzeiten. Eine vernünftige Richtlinie wäre, daß die Anzahl der Testpunkte so zu wählen ist, daß diese Testpunkte den charakteristischen Verlauf der Fläche wiedergeben.

Die Indizes l, m laufen in den folgenden Formeln nicht von 1 bis 3 sondern von 0 bis n_{α} , dann ergeben sich die Testpunkte A_{lm} zu:

$$A_{lm}^i = X^i(u_{1l}, u_{2m}) \quad (5.3-6)$$

t_{lm} seien die Vektoren vom Projektionszentrum V zu den Testpunkten A_{lm} :

$$t_{lm}^i = A_{lm}^i - V^i \quad (5.3-7)$$

Wobei nur jene \mathbf{t}_{lm} relevant sind, deren innere Produkte mit \mathbf{s} größer Null sind. Mit dieser Bedingung wird sicher gestellt, daß \mathbf{s} und \mathbf{t}_{lm} in denselben Halbraum zeigen.

Die Abstände d_{lm} berechnen sich zu:

$$d_{lm} = \sqrt{m_{lm}^i m_{i lm}} \quad (5.3-8)$$

mit

$$m_{lm}^i = \varepsilon^i_{jk} t^j_{lm} \frac{s^k_{lm}}{\sqrt{s^k_{lm} s_{klm}}}$$

Bei der Suche nach jenen Punkten $\mathbf{A}_{lm}(u_1, u_2)$, die einen möglichst kleinen Abstand d_{lm} in einem lokalen Bereich haben, sollte folgende Strategie angewendet werden: Man sortiert die Punkte $\mathbf{A}_{lm}(u_1, u_2)$ nach dem steigenden Betrag der Vektoren \mathbf{t}_{lm}^i aus Formel (5.3-7). Damit bewirkt man, daß man zuerst jene Punkte untersucht, die nahe dem Projektionszentrum \mathbf{V} sind. Diese sortierte Liste wird der Reihe nach nach lokalen Minima untersucht. Betrachtet man nochmals die Abbildung 5-1, so hätte man die folgenden Stellen, der Reihe nach, als Punkte **A**, **B**, **C**, **D** mit lokalen minimalen Abstand zu \mathbf{g} gefunden. An diesen Stellen verfeinert man den Raster, hier ausgeführt nur für ein Parameterpaar \underline{u}_1 und \underline{u}_2 (\underline{u}_1 und \underline{u}_2 gehört zu jenem Punkt \mathbf{A}_{lm} mit dem kürzesten Abstand zum Sehstrahl):

$$\begin{aligned} a_1 &:= \underline{u}_1 - \delta u_1 & a_2 &:= \underline{u}_1 + \delta u_1 \\ b_1 &:= \underline{u}_1 - \delta u_2 & b_2 &:= \underline{u}_2 + \delta u_2 \end{aligned} \quad (5.3-9)$$

Mit diesen verkleinerten Bereichen führt man eine weitere Abstands-minimumsuche, analog zur ersten mit angepaßten n_1 und n_2 , durch. Diesen Schritt wiederholt man solange, bis entweder der Minimalabstand kleiner als eine gewisse Schranke ε_1 ist, oder das Verhältnis der Minimalabstände aus der letzten und vorletzten Iteration kleiner als eine Schranke ε_2 ist. Als Richtwert für ε_1 könnte ein Prozentsatz p der Entfernung von Rasterpunkt und Projektionszentrum genommen werden; ε_2 könnte direkt auf diesen Prozentsatz p gesetzt werden. Als Prozentsatz p könnte sich z.B. 0.05 eignen.

Die so gefundenen Punkte prüft man der Reihe nach auf folgende Kriterien:

Ist der Abstand $d_{lm} > \varepsilon_1$, so geht der Sehstrahl an der Fläche vorbei und der Punkt bleibt als Kandidat für den Näherungswert erhalten. Das würde beim Punkt **A** in diesem Musterbeispiel der Fall sein. Das macht man mit jedem weiteren Punkt, bis der Abstand an einem Punkt $d_{lm} \leq \varepsilon_1$ ist. In diesem Fall muß man zwischen zwei Fällen unterscheiden, dazu berechnet man den Winkel zwischen \mathbf{s} und \mathbf{n} nach der Formel (3.3-4). Weicht dieser Winkel nicht mehr als z.B. 5 Grad vom Rechten Winkel ab, so hat man den Kandidaten gefunden und kann die Suche beenden. Weicht dieser Winkel jedoch mehr als diese angenommenen 5 Grad ab, so heißt das, daß der Sehstrahl an diesem Punkt in die Fläche eindringt (siehe Abbildung 5-1 Punkt **B**). In diesem Fall spannen dieser Punkt und der nächste Punkt (siehe Abbildung 5-1 Punkt **C**) in der Liste ein Intervall auf, in dem ein weiterer möglicher Kandidat enthalten sein kann. Alle

anderen Punkte der Liste können auf Grund von Sichtbarkeitsüberlegungen ausgeschlossen werden. Dieses Intervall kann aufgespannt werden, wenn der eine Punkt die Parameter (a_1, b_1) und der andere (a_2, b_2) hat, mit:

$$u_1 \in [a_1, a_2]; u_2 \in [b_1, b_2] \quad (5.3-10)$$

In diesem Intervall startet man eine weitere Minimumsuche, in der jener Punkt A_{lm} gefunden werden soll, dessen Normalenvektor \mathbf{n}_{lm} und Sehstrahlvektor \mathbf{s} die kleinste Winkelabweichung von einem Rechten Winkel nach Formel (3.3-4) aufweisen:

Die Berechnung der Rasterpunkte geschieht wieder mit den Formeln (5.3-4) bis (5.3-6). Die Normalenvektoren \mathbf{n}_{lm}^i an den Stellen A_{lm}^i werden nach den Formeln (3.2-1) bis (3.2-5) berechnet. Anschließend berechnet man die Abweichungen vom Rechten Winkel nach der Formel (3.3-4). An jener Stelle mit der kleinsten Winkelabweichung führt man solange eine Intervallverdichtung durch, bis die Winkelabweichung kleiner als die angenommene Schranke von 5 Grad ist. Letztlich würde das in unserem Beispielsfall zu Punkt **E** führen.

Um jetzt aus der Liste der verbleibenden Kandidaten den richtigen, besser gesagt den wahrscheinlichsten, zu finden, berechnet man nochmals für diese Punkte die Abstände zum Sehstrahl \mathbf{g} und nimmt jenen mit dem kleinsten Abstand als Näherungswert für den Umrißpunkt. Im Beispielsfall wäre das der Punkt **A** gewesen.

Anschließend wird der gefundene Punkt ${}_MA$ nach Umformung von (3.1-3) mit (5.3-11) ins Referenzsystem transformiert.

$${}_RA^i = {}_Mm_M R^i_j ({}_MA^j - {}_MQ^j) + {}_RQ^i \quad (5.3-11)$$

5.4 Bestimmung der Näherungswerte für implizit algebraisch gegebene Flächen

Im folgenden werden zwei Vorgehensweisen zur Bestimmung der Näherungswerte für implizit algebraisch gegebene Flächen ausgeführt. Variante eins eignet sich besonders gut, wenn Φ von niedrigem Grad ist, Variante 2 beruht auf derselben Grundidee wie jene in Kapitel 5.3.

1. Variante:

Die Schnittkurve der 1. Polarfläche Γ von Φ mit Φ selbst liefert den Wahren Umriß bezüglich eines festen Punktes \mathbf{V} [Pottmann, 1996]. Nach Berechnung von Γ wird die Polarfläche mit dem Sehstrahl \mathbf{g} geschnitten; das liefert den gesuchten Näherungswert \mathbf{S} für den Umrißpunkt \mathbf{U} .

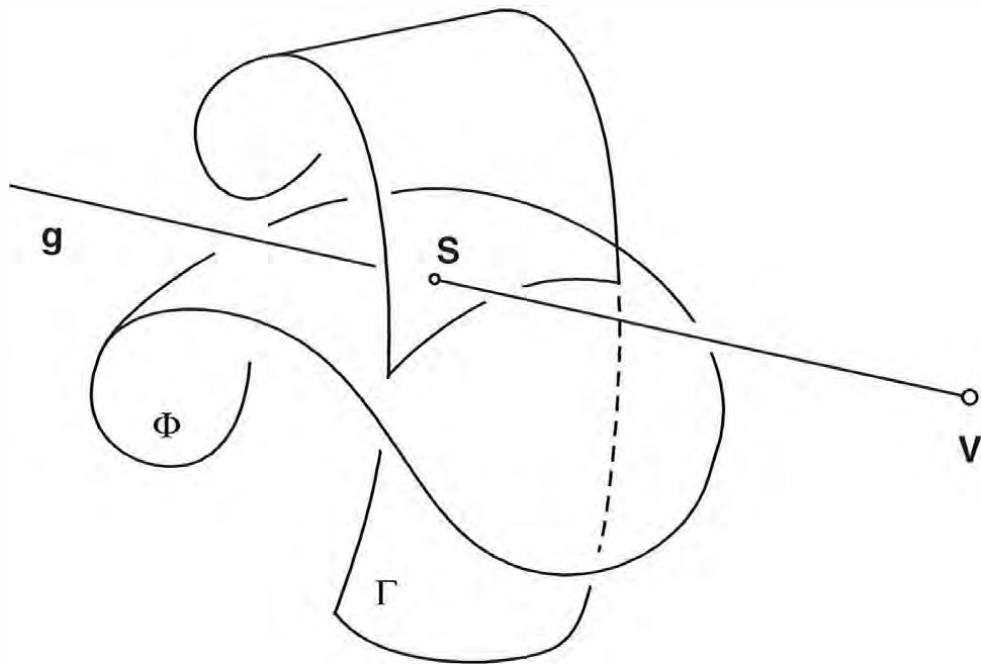


Abbildung 5-3: Stellung von Fläche, Polarfläche und Sehstrahl zueinander

Der Index M zur Kennzeichnung des Modellkoordinatensystems wird auch hier für die folgende Berechnung des Näherungswertes zum Zwecke der Übersichtlichkeit weggelassen, da alle folgenden Berechnungen in diesem System stattfinden.

$$\Phi: \quad \vartheta(X^1, X^2, X^3) = 0 \quad (5.4-1)$$

Zur Berechnung der 1. Polarfläche Γ muß die Fläche in homogenen Koordinaten, hier gekennzeichnet durch ein links von der Variable hochgestelltes h , dargestellt werden [Boehm, 1994, p307ff]. Bei Variablen in homogenen Koordinaten laufen daher die Indizes von 0 bis 3:

$$X^1 = \frac{{}^h X^1}{{}^h X^0}; \quad X^2 = \frac{{}^h X^2}{{}^h X^0}; \quad X^3 = \frac{{}^h X^3}{{}^h X^0}; \quad (5.4-2)$$

Nach Einsetzen in (5.4-1) und Wegmultiplizieren mit $({}^h X^0)^n$ erhält man eine homogene Gleichung für die Fläche ${}^h\Phi$ vom Grad n :

$${}^h\Phi: \quad {}^h\vartheta({}^h X^0, {}^h X^1, {}^h X^2, {}^h X^3) = 0 \quad (5.4-3)$$

Die Gleichung der Tangentialebene τ in einem festen Flächenberührungspunkt ${}^h\mathbf{X}$ ${}^h\vartheta({}^hX^i) = 0$ lautet - ${}^hY^i$ seien jetzt die laufenden Koordinaten in τ :

$${}^h\tau: \quad {}^h\vartheta_{,i} ({}^hX^i - {}^hY^i) = 0 \quad (5.4-4)$$

worin ${}^h\vartheta_{,i} = \frac{\partial {}^h\vartheta}{\partial {}^hX^i}$ die partielle Ableitung von ${}^h\vartheta$ nach ${}^hX^i$ darstellt.

Für irgend einen festen Punkt ${}^h\mathbf{Y}$ - jetzt laufe ${}^hX^i$ - stellt diese Gleichung die erste Polarfläche Γ dieses Punktes dar. Da der gesuchte Umrißpunkt auch auf der Fläche Φ selbst liegt, vereinfacht sich die Gleichung für Γ nach Einsetzen der Euler'schen Identität [Bretterbauer, 1994, p.68f]:

$${}^hX^i \quad {}^h\vartheta_{,i} = n \quad {}^h\vartheta({}^hX^i) \quad (5.4-5)$$

und mit ${}^h\vartheta({}^hX^i) = 0$ zu:

$$\Gamma: \quad {}^hY^i \quad {}^h\vartheta_{,i} = 0 \quad (5.4-6)$$

Anstelle irgendeines festen Punktes ${}^h\mathbf{Y}$ wird das Projektionszentrum ${}^h\mathbf{V}$ eingesetzt:

$$\Gamma_V: \quad {}^hV^i \quad {}^h\vartheta_{,i} = 0 \quad (5.4-7)$$

Der Punkt \mathbf{X} des Sehstrahls g in (5.1-4) wird in homogenen Koordinaten dargestellt:

$$g: \quad \begin{pmatrix} {}^hX^1 \\ \frac{{}^hX^0}{{}^hX^2} \\ \frac{{}^hX^0}{{}^hX^3} \\ \frac{{}^hX^0}{{}^hX^u} \end{pmatrix} = V^i + m s^i \quad (5.4-8)$$

Nach Einsetzen von g in die Gleichung (5.4-7), bekommt man eine Gleichung vom Grad $n-1$, in der m der unbekannte Parameter ist - ${}^hX^0$ läßt sich bei algebraisch gegebenen Flächen immer herausheben und kürzen. Wird der Wert von m in (5.1-4) eingesetzt, so ergibt sich ${}_M\mathbf{S}$ zu:

$${}_M S^i = {}_M V^i + m {}_M S^i \quad (5.4.9)$$

Achtung: Die Gleichung für m ist vom Grad $n-1$ und hat daher $n-1$ Lösungen für m ; von diesen muß die richtige - reelle - Nullstelle durch Einsetzen von \mathbf{mS} in (5.4-1) gefunden werden. Für jeden Kandidaten \mathbf{mS} ergibt sich nach Einsetzen eine Diskrepanz d . Jener Punkt mit dem absolut kleinsten d ist der gesuchte Umrißpunkt.

Anschließend wird \mathbf{mS} nach Umformung von (3.1-3) mit (5.4-10) ins Referenzsystem transformiert.

$${}_R S^i = {}_M m \quad {}_M R^i \left({}_M S^j - {}_M Q^j \right) + {}_R Q^i \quad (5.4-10)$$

Beispiel:

Geg.: Torus Φ und ein Sehstrahl g :

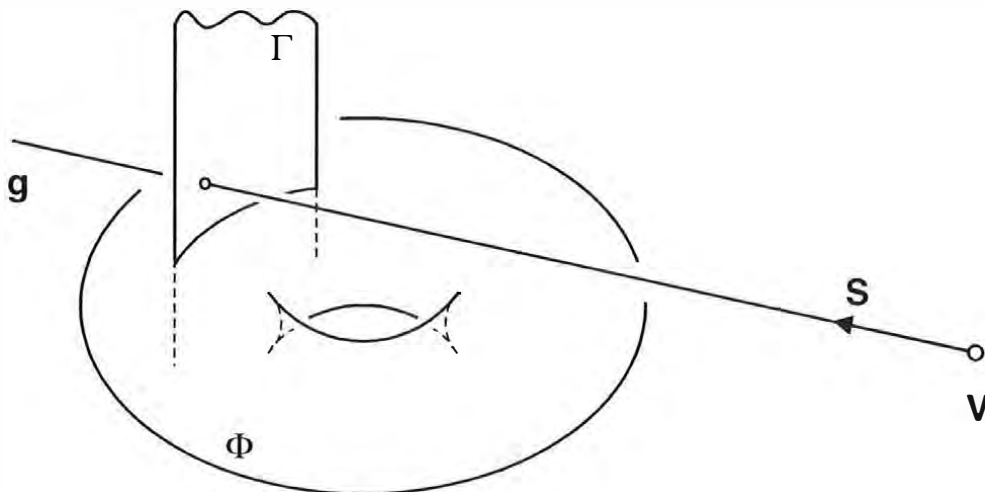


Abbildung 5-4: Stellung von Torus, Polarfläche und Sehstrahl zueinander

Die Sehstrahlgleichung lautet:

$$g: \quad X^i = V^i + m s^i$$

(5.4-11)

Die Parameterdarstellung eines Torus lautet (zur Interpretation der Parameter, siehe Abbildung 5-5):

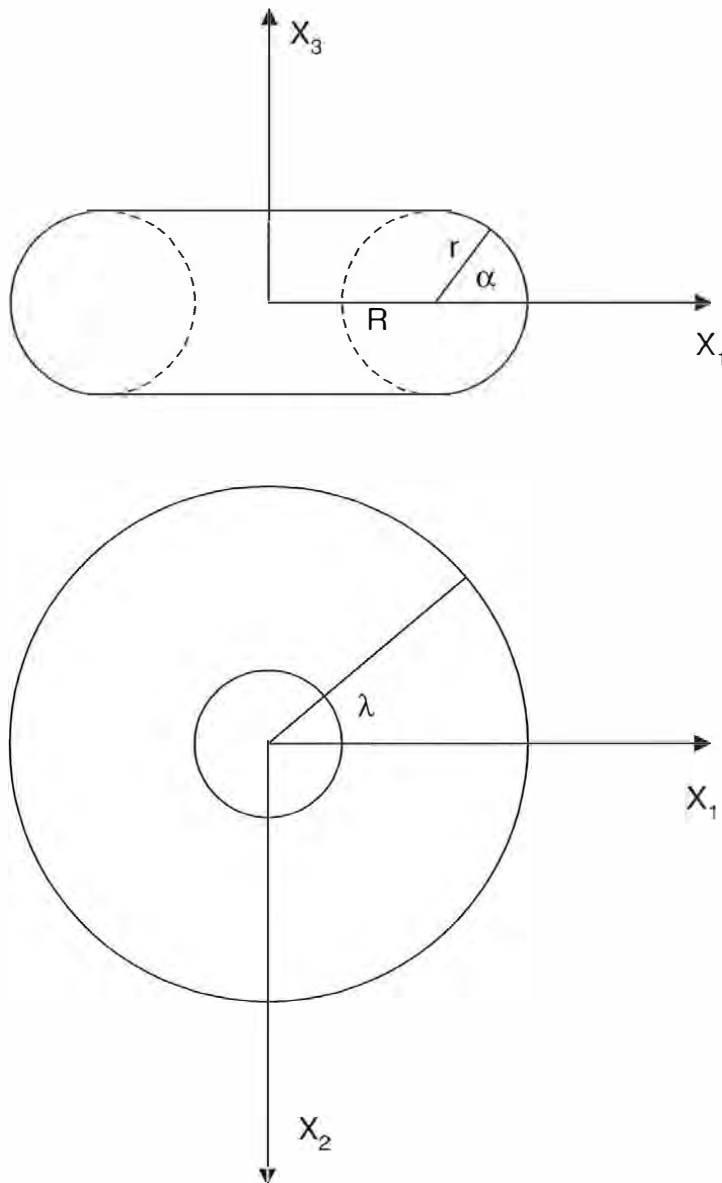


Abbildung 5-5: Grund- und Aufriß eines Torus

$$\Phi: \quad X_i = \begin{pmatrix} (R + r \cos \alpha) \cos \lambda \\ (R + r \cos \alpha) \sin \lambda \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Die implizite Darstellung lautet:

$$\Phi: \quad \begin{aligned} & (X_1)^4 + (X_2)^4 + (X_3)^4 + 2(X_1)^2(X_2)^2 + 2(X_1)^2(X_3)^2 + 2(X_2)^2(X_3)^2 - \\ & - 2r^2(X_1)^2 - 2R^2(X_1)^2 - 2r^2(X_2)^2 - 2R^2(X_2)^2 - 2r^2(X_3)^2 + 2R^2(X_3)^2 + \\ & + r^4 - 2r^2R^2 + R^4 \end{aligned} = 0$$

Folgende Abkürzungen werden gesetzt:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -2(R^2 + r^2) \\ c &= 2(R^2 - r^2) \\ d &= (R^2 - r^2)^2 \end{aligned}$$

$$\Phi: \quad \begin{aligned} & (X_1)^4 + (X_2)^4 + (X_3)^4 + a(X_1)^2(X_2)^2 + a(X_1)^2(X_3)^2 + a(X_2)^2(X_3)^2 + \\ & + b(X_1)^2 + b(X_2)^2 + c(X_3)^2 + \\ & + d \end{aligned} = 0$$

Ges.: Näherungswert **S** des Umrißpunktes.

Übergang auf homogene Koordinaten mit (5.4-2) und Multiplikation mit $({}^hX_0)^4$:

$$\begin{aligned} {}^h\Phi: \quad & ({}^hX_1)^4 + ({}^hX_2)^4 + ({}^hX_3)^4 + \\ & + a({}^hX_1)^2({}^hX_2)^2 + a({}^hX_1)^2({}^hX_3)^2 + a({}^hX_2)^2({}^hX_3)^2 + \\ & + b({}^hX_0)^2({}^hX_1)^2 + b({}^hX_0)^2({}^hX_2)^2 + c({}^hX_0)^2({}^hX_3)^2 + \\ & + d({}^hX_0)^4 \end{aligned} = 0$$

Berechnung der 1. Polarfläche Γ nach (5.4-4):

$$\begin{aligned} \Gamma_h: \quad & (2({}^hX_1)^3 + a({}^hX_1)({}^hX_2)^2 + a({}^hX_1)({}^hX_3)^2 + b({}^hX_1)({}^hX_0)^2)({}^hX_1 - {}^hY_1) + \\ & + (2({}^hX_2)^3 + a({}^hX_1)^2({}^hX_2) + a({}^hX_2)({}^hX_3)^2 + b({}^hX_2)({}^hX_0)^2)({}^hX_2 - {}^hY_2) + \\ & + (2({}^hX_3)^3 + a({}^hX_1)^2({}^hX_3) + a({}^hX_2)^2({}^hX_3) + c({}^hX_3)({}^hX_0)^2)({}^hX_3 - {}^hY_3) + \\ & + (2d({}^hX_3)^3 + b({}^hX_1)^2({}^hX_0) + b({}^hX_2)^2({}^hX_0) + c({}^hX_3)^2({}^hX_0))({}^hX_0 - {}^hY_0) = 0 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Euler'schen Identität und von ${}^h\mathbf{V}$ für ${}^h\mathbf{Y} - {}^h\vartheta({}^hX_i) = 0$ - folgt die Gleichung der 1 Polarfläche bezüglich ${}^h\mathbf{V}$ - Vergleich mit (5.4-6):

$$\Gamma_h: \begin{aligned} & (2({}^hX_1)^3 + a({}^hX_1({}^hX_2)^2 + a({}^hX_1({}^hX_3)^2 + b({}^hX_1({}^hX_0)^2) {}^hV_1 + \\ & + (2({}^hX_2)^3 + a({}^hX_1)^2 {}^hX_2 + a({}^hX_2({}^hX_3)^2 + b({}^hX_2({}^hX_0)^2) {}^hV_2 + \\ & + (2({}^hX_3)^3 + a({}^hX_1)^2 {}^hX_3 + a({}^hX_2)^2 {}^hX_3 + c({}^hX_3({}^hX_0)^2) {}^hV_3 + \\ & + (2d({}^hX_0)^3 + b({}^hX_1)^2 {}^hX_0 + b({}^hX_2)^2 {}^hX_0 + c({}^hX_3)^2 {}^hX_0) {}^hV_0 = 0 \end{aligned}$$

Berechnung des Sehstrahles g nach (5.4-7):

$$g: X_i = V_i + m s_i$$

g wird in ${}^h\Gamma$ eingesetzt. Nach einigen Umformungen ergibt sich eine kubische Gleichung in m; ${}^h\mathbf{V}$ kann herausgehoben werden.

$$e + f m + g m^2 + h m^3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{mit } e = & 2b({}^hV_1)^2 + 2b({}^hV_2)^2 + 2c({}^hV_3)^2 + \\ & + 2({}^hV_1)^4 + 2({}^hV_2)^4 + 2({}^hV_3)^4 + \\ & + 2a({}^hV_1)^2({}^hV_2)^2 + 2a({}^hV_1)^2({}^hV_3)^2 + 2a({}^hV_2)^2({}^hV_3)^2 + \\ & + 2d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = & 6({}^hV_1)^3 s_1 + 6({}^hV_2)^3 s_2 + 6({}^hV_3)^3 s_3 + \\ & + 3a({}^hV_2)^2 {}^hV_1 s_1 + 3a({}^hV_3)^2 {}^hV_1 s_1 + 3a({}^hV_1)^2 {}^hV_2 s_2 + \\ & + 3a({}^hV_3)^2 {}^hV_2 s_2 + 3a({}^hV_1)^2 {}^hV_3 s_3 + 3a({}^hV_2)^2 {}^hV_3 s_3 + \\ & + 3b({}^hV_1 s_1 + 3b({}^hV_2 s_2 + 3c({}^hV_3 s_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = & 6({}^hV_1)^3 s_1^2 + 6({}^hV_2)^3 s_2^2 + 6({}^hV_3)^3 s_3^2 + \\ & + 4a({}^hV_2)^2 {}^hV_1 s_1 s_2 + 4a({}^hV_3)^2 {}^hV_1 s_1 s_2 + 4a({}^hV_2)^2 {}^hV_3 s_2 s_3 + \\ & + a({}^hV_1)^2 s_2^2 + a({}^hV_1)^2 s_3^2 + a({}^hV_2)^2 s_1^2 + \\ & + a({}^hV_2)^2 s_3^2 + a({}^hV_3)^2 s_1^2 + a({}^hV_3)^2 s_2^2 + \\ & + b s_1^2 + b s_2^2 + c s_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h = & 2({}^hV_1 s_1^3 + 2({}^hV_2 s_2^3 + 2({}^hV_3 s_3^3 + \\ & + a({}^hV_1 s_1 s_2^2 + a({}^hV_2 s_1^2 s_2 + a({}^hV_1 s_1 s_3^2 + \\ & + a({}^hV_3 s_1^2 s_3 + a({}^hV_2 s_2 s_3^2 + a({}^hV_3 s_3 s_2^2 \end{aligned}$$

Folgende Beispielswerte werden angenommen:

$$R = 5$$

$$r = 2$$

$${}^hX_i = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{2} \\ 15/\sqrt{2} \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_i = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -5,9\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Mit diesen Werten ergeben sich folgende Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} a &= 2 & b &= -58 & c &= 42 & d &= 441 \\ e &= 194432 & f &= -738338,2736 \\ g &= 959825,0401 & h &= -417396,8741 \end{aligned}$$

Für diese Koeffizienten gibt es nur eine reelle Lösung für m :

$$m = 0,9770$$

Setzt man m in g ein, so bekommt man den gesuchten Umrißpunkt U :

$$U_i = \begin{pmatrix} -4,05 \\ -4,05 \\ 1,85 \end{pmatrix}$$

Hätte es für m mehrere reelle Lösungen gegeben, so würde es auch mehrere Kandidaten für den gesuchten Umrißpunkt geben. Den gesuchten Umrißpunkt würde man herausfinden, indem man alle drei Punkte in die Gleichung von Φ einsetzt und die Diskrepanzen d_i betrachtet. Der Punkt mit dem absolut kleinsten d_i wäre dann der gesuchte Umrißpunkt. Bei diesem Beispiel gibt es nur eine Diskrepanz:

$$d = -6,7130$$

2. Variante:

Die hier angegebene Methode ähnelt jener, die im Kapitel 5.3 angegeben ist. Der Unterschied liegt darin, daß man bei diesem Verfahren einen Punkt S auf dem Sehstrahl g und nicht auf der Fläche Φ sucht, an dem die Umrißbedingung $n^i s_i = 0$ erfüllt ist und einen möglichst kurzen Abstand d zur Fläche Φ hat.

Der Sehstrahl g ist gegeben durch:

$$g: \quad X^i = V^i + m \cdot s^i \quad (5.4-12)$$

Der Abstand d vom Sehstrahl g zur Fläche Φ kann näherungsweise auf folgende Art bestimmt werden: Ausgehend von der Gleichung (3.2-2) für implizit gegebene Flächen kann für jeden Punkt \mathbf{X} ein Potential p berechnet werden:

$$\Phi: \quad \vartheta(X^1, X^2, X^3) = p \quad (5.4-13)$$

Das Potential p ist negativ für Punkte innerhalb⁵, positiv für Punkte außerhalb und verschwindet für Punkte auf der Fläche Φ . Dieses Potential ist ein Richtwert für den mit Vorzeichen behafteten (gerichteten) Abstand eines Punktes zur Fläche. Jedoch handelt es sich bei p noch um kein metrisches Maß, sondern um eine Zahl. Dividiert man p durch den Betrag des Normalenvektors \mathbf{n} (\mathbf{n} folgt aus (3.2-6)) im Punkt \mathbf{X} , so erhält man in erster Näherung seinen gerichteten und metrischen Abstand d :

$$d = \frac{p}{\sqrt{n^i n_i}} \quad (5.4-14)$$

Hinweis zur Berechnung des Normalenvektors \mathbf{n} im Punkt \mathbf{X} : Liegt \mathbf{X} nicht auf der Fläche Φ , so berechnet man genau genommen den Normalenvektor der Äquipotentialfläche Φ_p durch \mathbf{X} , die gegeben ist durch die Gleichung:

$$\Phi_p: \quad \vartheta(X^1, X^2, X^3) - p = 0 \quad (5.4-15)$$

Bei diesem Verfahren im Gegensatz zu jenem aus Kapitel 5.3 muß lediglich die Domäne des Parameters m aus der Gleichung (5.4-12) bestimmt werden. Dafür reicht eine grob geschätzte maximale Entfernung r der Fläche aus. Dann ergibt sich die Domäne für m zu:

$$m \in [0, r] \quad (5.4-16)$$

Für $m = 0$ liefert die Gleichung (5.4-12) das Projektionszentrum \mathbf{V} , für $m = r$ den Punkt \mathbf{D} am Sehstrahl mit der Entfernung r zum Projektionszentrum (siehe Abbildung 5-6).

⁵ Die Definition von innerhalb und außerhalb erfolgt über die Richtung des Normalenvektors in der Art, daß der Normalenvektor für Punkte auf der Fläche nach „außen“ zeigt.

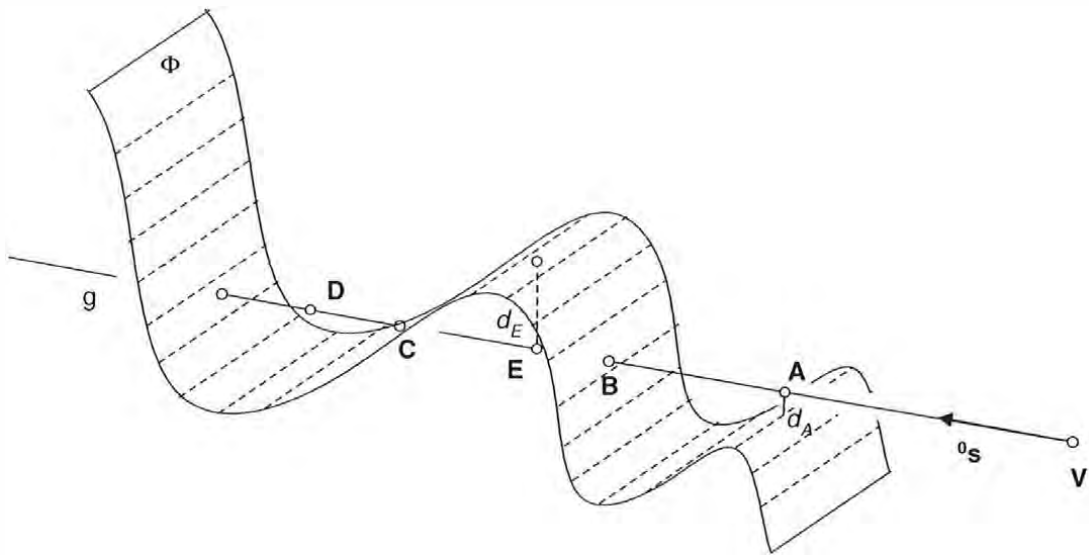


Abbildung 5-6: Übersichtsskizze bei der Bestimmung des Näherungswerts für implizit gegebene Flächen

Analog zum Kapitel 5.3 verteilt man nun regelmäßig über der Domäne von m die Punkte $A_l(m)$ und berechnet die Abstände $d_l(m)$ zur Fläche Φ :

Die Testpunkte werden innerhalb der Domäne regelmäßig verteilt durch:

$$m_l = 0 + k \delta m \quad \text{mit} \quad k = 0 (1) n \quad (5.4-17)$$

Bei einer Anzahl von $(n+1)$ Testpunkten ergeben sich die δm zu:

$$\delta m = \frac{t}{n} \quad (5.4-18)$$

Bei der Wahl der Größe n sollte man wieder folgendes beachten (vergleiche Kapitel 5.3): Eine zu geringe Anzahl an Testpunkten könnte zu einem Versagen des Verfahrens führen, jedoch eine zu große Anzahl lediglich zu längeren Rechenzeiten. Eine vernünftige Richtlinie wäre, daß die Anzahl der Testpunkte so zu wählen ist, daß diese

Testpunkte den charakteristischen Verlauf der Fläche entlang des Sehstrahls wiedergeben.

Der Indiz l läuft in den folgenden Formeln nicht von 1 bis 3 sondern von 0 bis n , dann ergeben sich die Testpunkte A_l zu:

$$A_l^i = V^i + m_l \cdot s^i \quad (5.4-19)$$

Die gerichteten Abstände d_l berechnen sich nach der Formel (5.4-14) zu:

$$d_l = \frac{p_l}{\sqrt{n_{il}^i \cdot n_{il}}} \quad (5.4-20)$$

Bei der Suche nach jenem Punkt $A_l(m)$, der einen möglichst kleinen Absolutbetrag des gerichteten Abstandes d_l hat, sollte folgende Strategie angewendet werden: Man beginnt mit $A_l(0) = V$ und sucht der Reihe nach nach lokalen Minima oder nach Stellen an denen d_l sein Vorzeichen wechselt. Betrachtet man nochmals Abbildung 5-6, so hätte man die folgenden Stellen, der Reihe nach die Punkte **A**, **B**, **C**, am Sehstrahl g gefunden. An diesen Stellen verfeinert man den Bereich von m (\underline{m} gehört zu jenem Punkt A_l mit dem kürzesten Abstand zum Sehstrahl):

$$m \in [\underline{m} - \delta m, \underline{m} + \delta m] \quad (5.4-21)$$

Mit diesem verkleinerten Bereich führt man eine weitere Abstands-minimumsuche, analog zur ersten, durch. Diesen Schritt wiederholt man solange, bis entweder der Absolutbetrag des gerichteten Minimalabstands kleiner als eine gewisse Schranke ε_1 ist (Vorzeichenwechsel), oder das Verhältnis der Minimalabstände aus der letzten und vorletzten Iteration kleiner als eine Schranke ε_2 ist. Als Richtwert für ε_1 könnte ein Prozentsatz p des Parameters m genommen werden; ε_2 könnte direkt auf diesen Prozentsatz p gesetzt werden. Als Prozentsatz p könnte sich z.B. 0.05 eignen.

Die so gefundenen Punkte prüft man der Reihe nach auf folgende Kriterien:

Ist der $d_l > \varepsilon_1$, so geht der Sehstrahl an der Fläche vorbei und der Punkt bleibt als Kandidat für den Näherungswert erhalten. Das würde beim Punkt **A** in diesem Musterbeispiel der Fall sein. Das macht man mit jedem weiteren Punkt, bis $|d_l| \leq \varepsilon_1$ ist. In diesem Fall muß man zwischen zwei Fällen unterscheiden, dazu berechnet man den Winkel zwischen s und n nach der Formel (3.3-4). Weicht dieser Winkel nicht mehr als z.B. 5 Grad vom Rechten Winkel ab, so hat man den Kandidaten gefunden und kann die Suche beenden. Weicht dieser Winkel jedoch mehr als diese angenommenen 5 Grad ab, so heißt das, daß der Sehstrahl an diesem Punkt in die Fläche eindringt (siehe Abbildung 5-6 Punkt **B**). In diesem Fall spannen dieser Punkt und der nächste Punkt (Punkt **C**) in der Liste ein Intervall auf, in dem ein weiterer möglicher Kandidat enthalten sein kann. Alle anderen Punkte der Liste können auf Grund von Sichtbarkeitsüberlegungen

ausgeschlossen werden. Dieses Intervall kann aufgespannt werden, wenn der eine Punkt den Parameter m_1 und der andere m_2 hat, mit:

$$m \in [m_1, m_2]$$

(5.4-22)

In diesem Intervall startet man eine weitere Minimumsuche, in der jener Punkt A_1 gefunden werden soll, dessen Normalenvektor \mathbf{n}_1 und Sehstrahlvektor \mathbf{s} die kleinste Winkelabweichung von einem Rechten Winkel nach Formel (3.3-4) aufweisen:

Die Berechnung der Rasterpunkte geschieht wieder mit den Formeln (5.3-4) bis (5.3-6). Die Normalenvektoren \mathbf{n}'_i an den Stellen A'_i werden nach der Formel (3.3-4) berechnet. Anschließend berechnet man die Abweichungen vom Rechten Winkel nach der Formel (3.3-4). An jener Stelle mit der kleinsten Winkelabweichung führt man solange eine Intervallverdichtung durch, bis die Winkelabweichung kleiner als die angenommene Schranke von 5 Grad ist. Letztlich würde das in unserem Beispielsfall zu Punkt **E** führen. Um jetzt aus der Liste der verbleibenden Kandidaten den richtigen, besser gesagt den wahrscheinlichsten, zu finden, berechnet man nochmals für diese Punkte die Abstände zum Sehstrahl g und nimmt jenen mit dem kleinsten Abstand als Näherungswert für den Umrißpunkt. Im Beispielsfall wäre das der Punkt **A** gewesen.

Anschließend wird der gefundene Punkt MA nach Umformung von (3.1-3) mit (5.3-11) ins Referenzsystem transformiert.

5.5 Lösungsweg spezialisiert für implizit gegebene Quadriken

Quadriken sind Flächen 2. Ordnung [Netz, 1992, p.454] und decken einen Großteil der benötigten Flächen ab. Zu ihnen zählen:

Dreiachsiges Ellipsoid	Rotationsellipsoid
Kugel	Kegel
Elliptischer Zylinder	Hyperbolischer Zylinder
Parabolischer Zylinder	Kreiszyylinder
Einschaliges Hyperboloid	Zweischaliges Hyperboloid
Elliptisches Paraboloid	Hyperbolisches Paraboloid

Bei Quadriken vereinfacht sich die in Kapitel 5.4 (1. Variante) aufbereitete Theorie, da die erste Polarfläche Γ eine Ebene ist.

Quadriken werden nach [Netz, 1992, p.454] wie folgt angeschrieben:

$$\Phi: \quad a(X_1)^2 + b(X_2)^2 + c(X_3)^2 + dX_1X_2 + eX_1X_3 + fX_2X_3 + \\ + gX_1 + hX_2 + jX_3 + k = 0 \quad (5.5-1)$$

Jedoch ist für die Berechnung der 1. Polarfläche Γ die Tensorschreibweise zu bevorzugen, da hier der mathematische Zusammenhang besser ersichtlich ist.

$${}_h\Phi: \quad {}^hX_i \quad {}^hA^{ij} \quad {}^hX_j = 0 \quad (5.5-2)$$

mit ${}^hX_0 = 1$

Die Koeffizienten der beiden Darstellungen können leicht ineinander übergeführt werden:

$${}_hA^{ij} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2k & g & h & j \\ g & 2a & d & e \\ h & d & 2b & f \\ j & e & f & 2c \end{pmatrix} \quad (5.5-3)$$

Die Schreibweise (5.5-2) wird oft als symmetrische Darstellung bezeichnet. Läßt sich ${}^h\Phi$ in dieser symmetrischen Darstellung - bei Quadriken ist dies *immer* möglich - anschreiben, liegt ${}^h\Phi$ bereits in homogenen Koordinaten vor.

Berechnung der 1. Polarebene Γ :

Wird in (5.5-2) anstelle eines der beiden Vektoren hX_i das Projektionszentrum

$${}_hV_i = \begin{pmatrix} 1 \\ {}^hV_1 \\ {}^hV_2 \\ {}^hV_3 \end{pmatrix} \text{ eingesetzt, liegt die Gleichung der Polarebene } {}_h\Gamma \text{ vor:}$$

$${}_h\Gamma: \quad {}^hV_i \quad {}^hA^{ij} \quad {}^hX_j = 0 \quad (5.5-4)$$

Da X_0 konstant 1 gesetzt ist und als laufende Koordinaten von ${}_h\Gamma$ nur X_1, X_2, X_3

übrig bleiben, wechselt die homogene Darstellung von ${}_h\Gamma$ nach Ausmultiplizieren von (5.5-4) in die inhomogene Darstellung über:

$$\Gamma: \begin{aligned} & (A^{00} + A^{10}V_1 + A^{20}V_2 + A^{30}V_3) + \\ & + (A^{01} + A^{11}V_1 + A^{21}V_2 + A^{31}V_3)X_1 + \\ & + (A^{02} + A^{12}V_1 + A^{22}V_2 + A^{32}V_3)X_2 + \\ & + (A^{03} + A^{13}V_1 + A^{23}V_2 + A^{33}V_3)X_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.5-5)$$

Für die Klammerausdrücke werden zur besseren Übersicht folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} t &= (A^{00} + A^{10}V_1 + A^{20}V_2 + A^{30}V_3) \\ u &= (A^{01} + A^{11}V_1 + A^{21}V_2 + A^{31}V_3) \\ v &= (A^{02} + A^{12}V_1 + A^{22}V_2 + A^{32}V_3) \\ w &= (A^{03} + A^{13}V_1 + A^{23}V_2 + A^{33}V_3) \end{aligned}$$

$$\Gamma: \quad t + uX_1 + vX_2 + wX_3 = 0 \quad (5.5-6)$$

Die Ebene Γ wird nun mit dem Sehstrahl g , der zuvor mit den Gleichungen aus Kapitel 5.1 ins Modellsystem transformiert wurde, geschnitten:

$$g: \quad {}_M X_i = {}_M V_i + m \cdot {}_M S_i \quad (5.5-7)$$

Nach Einsetzen von g in die Gleichung (5.5-6) bekommt man eine Gleichung vom Grad 1, in der m der unbekannte Parameter ist, m ergibt sich zu:

$$m = - \frac{t + u \cdot {}_M V_1 + v \cdot {}_M V_2 + w \cdot {}_M V_3}{u \cdot {}_M S_1 + v \cdot {}_M S_2 + w \cdot {}_M S_3} \quad (5.5-8)$$

Wird der Wert von m in (5.5-7) eingesetzt, so ergibt sich ${}_M S$ zu:

$${}_M S_i = {}_M V_i + m \cdot {}_M S_i \quad (5.5-9)$$

Anschließend wird ${}_M S$ nach Umformung von (3.1-3) mit (5.5-10) ins Referenzsystem transformiert.

$${}_R S^i = {}_M m_M R^i{}_j ({}_M S^j - {}_M Q^j) + {}_R Q^j \quad (5.5-10)$$

In der Rechtwinkelbedingung ${}_R n^i {}_R s_i = {}_M m_B m_M R^i{}_k n^k {}_B R^j{}_i s_j = 0$ läßt sich der Vektor ${}_M \mathbf{n}$ spezifizieren:

$${}_M n^i = \left(\frac{\partial {}_M \Phi}{\partial {}_M X_i} \right) = (A^{ij} {}_M X_j) + A^{i0} \quad (5.5-11)$$

Durch Einschränkung der Flächen auf Flächen zweiter Ordnung wurde die komplexe Theorie aus Kapitel 5.4 so weit vereinfacht, daß sie sehr gut geeignet ist zur automatisierten Berechnung der Näherungswerte.

5.6 Bestimmung der Näherungswerte für explizit algebraisch gegebene Flächen

Diese Flächen können wie aus Kapitel 3.2.3 hervorgeht sowohl in eine implizit algebraische als auch in eine Fläche in Parameterform umgeformt werden. Daher wird kein Lösungsweg nur für explizit algebraisch gegebenen Flächen angegeben.

6 Aufbereitung der Theorie für ORIENT

In den folgenden Unterkapiteln werden die Erweiterungen von ORIENT, die das Thema Umrißpunkt betreffen, ausführlich behandelt. Allgemeine Informationen zum Produkt ORIENT können jedoch z.B. in [Kager, 1980], [Kager, 1989], [Kager, 2000] oder [Forkert, 1994] nachgelesen werden.

6.1 Datenraumstruktur

In ORIENT sind die Daten in zwei Arten von Datenräumen organisiert [IPF, 1994, p6]:

- Parameterräume,
- Beobachtungsräume.

Bekannte Parameter können entweder als Konstante oder als Beobachtungen behandelt werden. Unbekannte Parameter werden durch strenge Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

Innerhalb der „Räume“ sind die Daten als „Punkte“ organisiert,

- die einen Namen haben,
- die von 0 bis zu 7 „Koordinaten“ (z.B. X, Y, Z, Sigmax, Sigmay, Sigmaz) aufweisen und
- die durch ein „Statuswort“ hinsichtlich ihrer Teilnahme oder Nichtteilnahme am aktuellen Prozeßgeschehen gekennzeichnet sind.

Um beobachtete Umrißpunkte in ORIENT verwalten zu können, mußte ein neuer Beobachtungsraum vom Typ SILHOUETTE⁶ geschaffen werden.

Zum Raum SILHOUETTE gehören:

- „Name“ (IDENTIFIER), zur Unterscheidung von mehreren SILHOUETTEen wird jeder eine eigene Nummer zugewiesen, die vom Benutzer gewählt werden kann.
- „Kopfzeile“ (HEADER): In der alle Verweise zu anderen Punkten oder Räumen angeführt sind, die direkt mit dem Raum oder seiner Transformation selbst im Zusammenhang stehen.
 - EXTREFPO (Exterior Reference Point): Punktnummer des Aufnahmeortes RV . RV wird üblicherweise ein Projektionszentrum eines Photos sein, aber es kann sich auch um einen Polarstandpunkt, von dem aus Umrißpunkte beobachtet wurden, handeln. Aufgrund dieser Punktnummer können die zugehörigen Koordinaten des Aufnahmeortes im Referenzsystem gefunden werden.

⁶ In ORIENT wurde die Bezeichnung SILHOUETTE der CONTOUR vorgezogen, um Verwechslungen mit ähnlichen Schlüsselwörtern zu vermeiden, obwohl CONTOUR der exaktere Name wäre.

- GESTALT: Name der Fläche, auf der die Umrißpunkte beobachtet wurden.
- SIGMA: Zur Festlegung der Genauigkeit der Umrißpunktbeobachtung. Jede Beobachtung wird vor der Ausgleichung mit einem Gewicht versehen. Das Gewicht ist indirekt proportional dem Quadrat der Genauigkeit (= SIGMA) der Beobachtung:
- „Punktliste“: In dem die Punktnummern der beobachteten Umrißpunkte stehen
- „Subtyp“: Der „Subtyp“ liefert eine wichtige Information zum Raum selbst. Im Falle SILHOUETTE wird dieser „Subtyp“ dazu verwendet, um die dazugehörige Flächenart auszuwählen. Er wählt durch seinen Wert, der 0, 1, 2 oder 3 sein kann, eine der 3 Flächen der dazugehörenden GESTALT aus, siehe Kapitel 6.2. Nimmt er den Wert 1 an, so ist die erste Fläche gemeint usw. Bei 0 existiert hoffentlich nur eine von diesen drei Flächen, die dann natürlich zu verwenden ist. Durch diese Vorgehensweise legen GESTALT und „Subtyp“ von SILHOUETTE eindeutig die dazu gehörende Fläche fest.

Punkte ${}_M\mathbf{X}$ im Modellsystem der Fläche Φ werden in ORIENT mit der Formel (6.1-1) ins Referenzsystem transformiert:

$$({}_R X^i - {}_R Q^i) = {}_M m {}_M R^i_j ({}_M X^j - {}_M Q^j) \quad (6.1-1)$$

Die fehlenden Parameter dieser Transformation bekommt man über den HEADER der GESTALT:

- ${}_M\mathbf{R}$: Die drei Drehwinkel stehen in einem Raum des Typs ROTPAR. Der „Subtyp“ des ROTPAR Raums legt die Deutung der Drehparameter fest. Der Name des ROTPAR-Raumes steht im HEADER der GESTALT.
- ${}_M m$: Der Maßstab der Ähnlichkeitstransformation wurde seinerzeit per Definition 1 gesetzt und wird aber in Zukunft auch durch die Ausgleichung bestimmt werden können.

Das gewünschte Minimumkriterium bei der Ausgleichung legt der „Subtyp“ des ADPAR-Raumes fest (siehe Tabelle 6-1):

Typ des Minimumkriteriums	„Subtyp“ des ADPAR
Typ E ₁ (4.3-2) mit Typ F ₁ (4.3-6)	„SubTyp“ 1
Typ E ₂ (4.3-3) mit Typ F ₂ (4.3-7)	„SubTyp“ 3
Typ E ₃ (4.3-4) mit Typ F ₁ (4.3-6)	„SubTyp“ 5
Typ E ₄ (4.3-5) mit Typ F ₂ (4.3-7)	„SubTyp“ 7

Tabelle 6-1: Zusammenhänge zwischen Minimumkriterium und „Subtyp“ des ADPAR-Raumes

Der Zusammenhang von ADPAR und GESTALT wird im Kapitel 6.2 erklärt.

6.2 Flächendarstellung in ORIENT:

In ORIENT werden Flächen in Räumen vom Typ GESTALT verwaltet. Zu jeder GESTALT kann es bis zu drei Flächen geben, die folgende unterschiedlichen Formen haben können:

Erste Fläche:

Φ^1 :

$${}_M Q^1 = \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u A^1_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1 \right)^i \left({}_M \tilde{X}^2 \right)^j \left({}_M \tilde{X}^3 \right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \quad (6.2-1)$$

Zweite Fläche:

Φ^2 :

$${}_M Q^2 = \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u A^2_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1 \right)^i \left({}_M \tilde{X}^2 \right)^j \left({}_M \tilde{X}^3 \right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \quad (6.2-2)$$

Dritte Fläche:

Φ^3 :

$${}_M Q^3 = \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u A^3_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1 \right)^i \left({}_M \tilde{X}^2 \right)^j \left({}_M \tilde{X}^3 \right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \quad (6.2-3)$$

mit $u = 9$.

Die Koeffizienten $A^1_{ijkplmn}$ von Φ^1 stehen in keinem Zusammenhang mit $A^2_{ijkplmn}$ von Φ^2 oder mit $A^3_{ijkplmn}$ von Φ^3 . Es wird aber trotzdem eine zusammenfassende Bezeichnung für die unterschiedlichen Koeffizienten $A^g_{ijkplmn}$ gewählt, weil dadurch eine bessere Übersichtlichkeit in der Notation erzielt wird. Die drei Formeln können zu einer zusammengefaßt werden:

Φ^g :

$${}_M Q^g = \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1 \right)^i \left({}_M \tilde{X}^2 \right)^j \left({}_M \tilde{X}^3 \right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \quad (6.2-4)$$

mit der Definition

$${}_M \tilde{X}^i = \frac{1}{m_0} {}_M R_j^i \left({}_R X^j - {}_R Q^j \right)$$

mit m_0 als konstantem Skalierungsfaktor

(6.2-5)

Dadurch ergibt sich der Zusammenhang zwischen ${}_M X^i$ und ${}_M \tilde{X}^i$ zu:

$${}_M \tilde{X}^i = \frac{{}_M m}{m_0} ({}_M X^i - {}_M Q^i) \quad (6.2-6)$$

Die Größen m_0 und $A_{ijkplmn}^g$ werden in ORIENT wie folgt verwaltet:

- m_0 : Der Skalierungsfaktor für die Transformation (6.2-5) steht im HEADER des ADPAR-Raumes und soll etwaige numerische Probleme bei der Bestimmung der $A_{ijkplmn}^g$ verhindern. Als Richtwert für m_0 kann der halbe Durchmesser des Interessensgebiet angenommen werden. Der Faktor m_0 steht in direkter Abhängigkeit zu ${}_M m$ und wird daher in ORIENT - bei der Ausgleichung - als Konstante geführt und nicht bestimmt. Daher wird auch kein Differential für m_0 berechnet.
- $A_{ijkplmn}^g$: Die Koeffizienten stehen in einem Raum des Typs ADPAR. Der Name des ADPAR Raumes steht im HEADER der GESTALT.

${}_R X$ ist der Punkt im Referenzsystem, der nach der Transformation mit (6.2-5) die Flächengleichung erfüllen muß, abgesehen von seiner Verbesserung v . Achtung! Die Gleichung (6.2-4) stellt noch nicht die fiktive Flächenbeobachtung dar! Zur Beobachtungsgleichung für Punkte auf Flächen in ORIENT gelangt man nach folgenden Umformungen der Gleichung (6.1-1):

Anstelle des Punktes ${}_M Q$ in (6.1-1) wird (6.2-4) substituiert. Diese Vorgangsweise scheint verwickelt zu sein, hängt aber damit zusammen, daß diese Substitution für andere Aufgaben entworfen wurde. Löst man diese Gleichung nach ${}_M X$ auf und schreibt sie komponentenweise an, so wird nur die g -te Komponente fiktiv zu Null beobachtet. Ersetzt man ${}_M X^i$ mit Hilfe von (6.2-6) durch ${}_M \tilde{X}^i$, gelangt man schließlich zur fiktiven Flächengleichung in ORIENT:

$$0 + v^g = \lambda \frac{m_0}{{}_M m} {}_M \tilde{X}^g + \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u A_{ijkplmn}^g ({}_M \tilde{X}^1)^i ({}_M \tilde{X}^2)^j ({}_M \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \quad (6.2-7)$$

Für $\lambda \equiv 0$ handelt es sich um eine implizite Flächengleichung, bei $\lambda \equiv 1$ um eine explizite Flächengleichung. Handelt es sich um eine explizite Flächengleichung, so „läuft“ in der Gleichung (6.2-7) einer der Indizes i (bei $g=1$), j (bei $g=2$) oder k (bei $g=3$) nicht bis u sondern bis Null. Je nach Art der Flächendarstellung (implizit oder explizit) muß der „Subtyp“ der GESTALT dementsprechend gesetzt werden (siehe Tabelle 6-2).

Die Koeffizienten $A_{ijkplmn}^g$ können entweder Parameter der Fläche repräsentieren oder auch Konstante. Jedoch ist es nicht möglich, unter den Koeffizienten Bedingungen zu formulieren, wie es z.B. bei einem Rotationsellipsoid notwendig wäre, weil hier zwei

Achsen gleich sein müßten. Geht ein Flächenparameter in mehrere Koeffizienten ein, so muß dieser über einen der Parameter q, r, s, t modelliert werden. Beispiele für Flächenmodellierungen finden sich im Kapitel 8.4.

Φ^1	explizit- implizit		„Subtyp“ der GESTALT
	Φ^2	Φ^3)	
explizit	explizit	explizit	0
implizit	explizit		1
explizit	implizit	explizit	2
explizit	explizit	implizit	3
explizit	implizit	implizit	4
			5
implizit	implizit	explizit	6
implizit	implizit	implizit	7

Tabelle 6-2: Zusammenhänge zwischen expliziter und impliziter Flächendarstellung und „Subtyp“ der GESTALT

6.3 Differentiale der fiktiven Umrißbedingung angepaßt an die Flächendarstellung von ORIENT

Die Differentiale aus dem Kapitel 4.2 werden für die Flächendarstellungen in ORIENT aufbereitet. Zu diesem Zweck werden Flächennormalenvektor ${}_M\mathbf{n}$ und Matrix ${}_M\mathbf{F}$ berechnet. Genau genommen müßten diese Größen ebenfalls mit dem Index g versehen werden. Da aber ab diesen Größen keine Fallunterscheidungen, die von g herrühren, mehr nötig sind, wird auf diesen Index zwecks Übersichtlichkeit verzichtet. Ausdrücke, bei denen der Exponent kleiner Null wird, sind per Definition gleich Null:

Der Normalenvektor berechnet sich nach (3.2-5) und unter Berücksichtigung des „Schlangenmodells“ zu:

$${}_M n^r = \frac{\partial \Phi}{\partial {}_M X_r} = \frac{\partial \Phi}{\partial {}_M \tilde{X}_q} \frac{\partial {}_M \tilde{X}_q}{\partial {}_M X_r} \quad (6.3-1)$$

mit

$$\frac{\partial {}_M \tilde{X}_q}{\partial {}_M X_r} = \frac{{}_M m}{m_0} \delta_q^r \quad (6.3-2)$$

zu:

$$\begin{aligned}
{}_M n^r = & \\
= \frac{{}_M m}{m_0} & \left[\sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u i A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^{i-1} \left({}_M \tilde{X}^2\right)^j \left({}_M \tilde{X}^3\right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \right. \\
& \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u j A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^i \left({}_M \tilde{X}^2\right)^{j-1} \left({}_M \tilde{X}^3\right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \\
& \left. \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u k A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^i \left({}_M \tilde{X}^2\right)^j \left({}_M \tilde{X}^3\right)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \right] + \lambda \delta^{rg}
\end{aligned}
\tag{6.3-3}$$

Die Matrix ${}_M \mathbf{F}$ ergibt sich nach (4.2-4) und unter Berücksichtigung des „Schlangenmodells“ zu:

$$F_j^i = \frac{\partial {}_M n_j}{\partial {}_M X_i} = \frac{\partial {}_M n_j}{\partial {}_M \tilde{n}_k} \frac{\partial {}_M \tilde{n}_k}{\partial {}_M \tilde{X}_m} \frac{\partial {}_M \tilde{X}_m}{\partial {}_M X_i}$$

mit (6.3-2) und

$$\frac{\partial {}_M n_j}{\partial {}_M \tilde{n}_k} = \frac{m_0}{{}_M m} \delta_j^k$$

(6.3-4)

(6.3-5)

ergibt sich F_k^m zu:

$$\begin{aligned}
F_1^1 &= \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u i(i-1) A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^{i-2} \left({}_M \tilde{X}^2\right)^j \left({}_M \tilde{X}^3\right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \\
F_1^2 &= \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u i j A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^{i-1} \left({}_M \tilde{X}^2\right)^{j-1} \left({}_M \tilde{X}^3\right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \\
F_1^3 &= \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u i k A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^{i-1} \left({}_M \tilde{X}^2\right)^j \left({}_M \tilde{X}^3\right)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \\
F_2^2 &= \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u j(j-1) A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^i \left({}_M \tilde{X}^2\right)^{j-2} \left({}_M \tilde{X}^3\right)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \\
F_2^3 &= \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u j k A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^i \left({}_M \tilde{X}^2\right)^{j-1} \left({}_M \tilde{X}^3\right)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \\
F_3^3 &= \sum_{i=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{k=0}^u \sum_{p=0}^u \sum_{l=0}^u \sum_{m=0}^u \sum_{n=0}^u k(k-1) A^g_{ijkplmn} \left({}_M \tilde{X}^1\right)^i \left({}_M \tilde{X}^2\right)^j \left({}_M \tilde{X}^3\right)^{k-2} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n
\end{aligned}$$

F_j^l ist symmetrisch auf Grund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Daher wird auch hier nur die obere Dreieckshälfte der Matrix angegeben, und es gilt daher $F_j^l = F_j^l$.

Die Differentiale für ORIENT ergeben sich, indem man die Differentiale (6.3-1) bis (6.3-5) in die gewünschten - je nach Typ und Unbekannte - vom Kapitel 4.2 einsetzt. Es wird hier nur das Differential für die Flächenkoeffizienten ausformuliert, weil auf die nicht speziell im Kapitel 4.2 eingegangen wurde, und weil dieses auch als Musterbeispiel der Vorgangsweise für die anderen nicht ausformulierten Differentiale dienen kann.

Differential nach den Flächenparametern **A** in ADPAR:

Typ E₁:

Das Grunddifferential von (4.2-19) lautet:

$$\frac{\partial E_1}{\partial A^g_{ijklmn}} = \frac{\partial E_1}{\partial_R n_f} \frac{\partial_R n_f}{\partial_M n_r} \frac{\partial_M n_r}{\partial A^g_{ijklmn}}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial A^g_{ijklmn}} = {}_R S^f{}_M R_f{}^r \frac{\partial_M n_r}{\partial A^g_{ijklmn}}$$

(6.3-6)

Das Differential $\frac{\partial_M n_r}{\partial A^g_{ijklmn}}$ konnte in (4.2-19) nicht näher ausgeführt werden, da

noch keine konkrete Flächendarstellung vorhanden war. Mit der Flächendarstellung aus (6.2-7) läßt sich dieses Differential konkretisieren, aus (6.3-3) folgt:

$$\frac{\partial_M n_r}{\partial A^g_{ijklmn}} = \frac{{}_M m}{m_0} \left(\begin{array}{l} i \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i-1} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r1} + \\ + j \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j-1} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r2} + \\ + k \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r3} \end{array} \right)$$

(6.3-7)

Setzt man (6.3-7) in (6.3-6) ein, so kommt man zum gesuchten Differential:

$$\frac{\partial E_1}{\partial A^g_{ijklmn}} = \frac{{}_M m}{m_0} {}_R S^f{}_M R_f{}^r \left(\begin{array}{l} i \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i-1} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r1} + \\ + j \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j-1} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r2} + \\ + k \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r3} \end{array} \right)$$

(6.3-8)

Zur Vollständigkeit werden auch die Differentiale für die anderen Typen angegeben:

Typ E₂ folgt aus (4.2-28):

$$\frac{\partial E_2}{\partial A^s_{ijkplmn}} = \frac{{}_M m}{m_0 \sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} \left(\begin{aligned} & i \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i-1} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r1} + \\ & + j \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j-1} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r2} + \\ & + k \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r3} \end{aligned} \right) \quad (6.3-9)$$

Typ E₃ folgt aus (4.2-37):

$$\frac{\partial E_3}{\partial A^s_{ijkplmn}} = \frac{{}_M m}{m_0 \sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} \left(\begin{aligned} & i \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i-1} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r1} + \\ & + j \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j-1} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r2} + \\ & + k \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r3} \end{aligned} \right) \quad (6.3-10)$$

Typ E₄ folgt aus (4.2-46):

$$\frac{\partial E_4}{\partial A^s_{ijkplmn}} = \frac{{}_M m}{m_0 \sqrt{{}_R n^k {}_R n_k} \sqrt{{}_R s^k {}_R s_k}} \left(\begin{aligned} & i \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i-1} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r1} + \\ & + j \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j-1} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r2} + \\ & + k \binom{{}_M \tilde{X}^1}{i} \binom{{}_M \tilde{X}^2}{j} \binom{{}_M \tilde{X}^3}{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r3} \end{aligned} \right) \quad (6.3-11)$$

Differential nach den Flächenparametern q, r, s, t :

Im folgenden werden nur die Differentiale für t berechnet, da sich alle anderen Differentiale aus Analogien ableiten lassen.

Typ E₁:

Das Grunddifferential lautet:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial {}_R n_f} \frac{\partial {}_R n_f}{\partial {}_M n_r} \frac{\partial {}_M n_r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = {}_R s^f {}_M R_f^r \frac{\partial {}_M n_r}{\partial t}$$

(6.3-12)

Das Differential konnte in (4.2-19) nicht näher ausgeführt werden, da noch keine

konkrete Flächendarstellung vorhanden war. Mit der Flächendarstellung aus (6.2-7) läßt sich das Differential $\frac{\partial_M n_r}{\partial t}$ konkretisieren, aus (6.3-12) folgt:

$$\frac{\partial_M n_r}{\partial t} = \frac{M m}{m_0} A^s_{ijkplmn} \left(\begin{aligned} & in \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^{i-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r1} + \\ & + jn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^{j-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r2} + \\ & + kn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r3} \end{aligned} \right) \quad (6.3-13)$$

Setzt man (6.3-13) in (6.3-12) ein, so kommt man zum gesuchten Differential:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{M m}{m_0} {}_R S^f {}_M R_f^r A^s_{ijkplmn} \left(\begin{aligned} & in \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^{i-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r1} + \\ & + jn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^{j-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r2} + \\ & + kn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r3} \end{aligned} \right) \quad (6.3-14)$$

Zur Vollständigkeit werden auch die Differentiale für die anderen Typen angegeben:

Typ E₂ ergibt sich zu:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{M m}{m_0 \sqrt{{}_R n^k {}_R n_k}} {}_R S^f G_f^q {}_M R_q^r A^s_{ijkplmn} \left(\begin{aligned} & in \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^{i-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r1} + \\ & + jn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^{j-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r2} + \\ & + kn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r3} \end{aligned} \right) \quad (6.3-15)$$

Typ E₃ ergibt sich zu:

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{M m}{m_0 \sqrt{{}_R S^k {}_R S_k}} {}_R S^f {}_M R_f^r A^s_{ijkplmn} \left(\begin{aligned} & in \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^{i-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r1} + \\ & + jn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^{j-1} \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r2} + \\ & + kn \binom{M}{M} \tilde{X}^1)^i \binom{M}{M} \tilde{X}^2)^j \binom{M}{M} \tilde{X}^3)^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^{n-1} \delta_{r3} \end{aligned} \right)$$

(6.3-16)

Typ E₄ folgt aus (4.2-46):

$$\frac{\partial E_4}{\partial t} = \frac{M m}{m_0 \sqrt{{}_R n^k} {}_R n_k \sqrt{{}_R s^k} {}_R s_k} \left({}_R s^f G_f^q {}_M R_q^r \left(\begin{aligned} & i \binom{\tilde{X}^1}{M}^{i-1} \binom{\tilde{X}^2}{M}^j \binom{\tilde{X}^3}{M}^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r1} + \\ & + j \binom{\tilde{X}^1}{M}^i \binom{\tilde{X}^2}{M}^{j-1} \binom{\tilde{X}^3}{M}^k (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r2} + \\ & + k \binom{\tilde{X}^1}{M}^i \binom{\tilde{X}^2}{M}^j \binom{\tilde{X}^3}{M}^{k-1} (q)^p (r)^l (s)^m (t)^n \delta_{r3} \end{aligned} \right) \right) \quad (6.3-17)$$

Alle weiteren Differentialkoeffizienten für die Umrißbedingung können in analoger Vorgangsweise gefunden werden ausgehend von den Differentialen im Kapitel 4.2. Hier nicht ausformulierte Differentiale, wie z.B. das Differential nach den Drehwinkeln, können in [Stadler, 1997, p24ff] nachgelesen werden.

6.4 Bestimmung des Konvergenzbereiches

Für die Bestimmung des Konvergenzbereiches von Quadriken kann das EDV Programm, mit dem auch die Abbildungen im Kapitel 4.3 erzeugt wurden, allein verwendet werden. Für die Untersuchung der Konvergenzbereiche von anderen Flächen (laut Kapitel 6.2) wurde eine Schnittstelle zwischen ORIENT und diesem Programm geschaffen. Die Vorgangsweise soll anhand eines Torus erläutert werden:

Um die gewünschten Daten der diff. geom. Örter von ORIENT zu bekommen, müssen in ORIENT Fläche, Silhouette, Koordinatensysteme und Rasterpunkte erzeugt werden. Für diese Aufgabe empfiehlt es sich, ein CMD-File zu erstellen. In diesem CMD-File stehen alle dafür nötigen ORIENT-Befehle (Direktiven) übersichtlich aufgelistet. Details und allgemeine Erklärungen zu den ORIENT-Befehlen können in [IPF, 1996] nachgelesen werden, zusätzliche Kommentare stehen direkt im CMD-File und sind durch ein \$c gekennzeichnet. Das folgend CMD-File erzeugt zuerst ein MODEL, in dem alle Rasterpunkte (die Auflistung enthält aus Platzgründen nicht alle Punkte) mit ihren Koordinaten enthalten sind. Anschließend werden REFSYS, GESTALT und SILHOUETTE erzeugt und der Beobachtungspunkt **rV** gesetzt. Kommentare sind im CMD-File durch ein vorangestelltes \$c gekennzeichnet.

```
$c tor.txt 2001.1.2 Torus-Rasterp.
$M Modell 800:
$c $M erzeugt Meldung am Bildschirm

$d EDIT MODEL FREE CMD ROTPAR=OWN=OMFIKA(0 0 0) ORIGIN 90000800 END -
99.
$c Erzeugung des Modells
```

```

800
  101      -50.000      50.000      0.000
  102      -44.737      50.000      0.000
  103      -39.474      50.000      0.000
***
***
  2018      39.474      -50.000      0.000
  2019      44.737      -50.000      0.000
  2020      50.000      -50.000      0.000
-99  0  0  0
$c Rasterpunkte und deren Koordinaten wurden in das Modell 800
$c eingelesen

$d EDIT REFSYS 9000 TAKE(M800 i1-9999 N90000800 90000001-90000010).
$c nimmt alle Punkte aus dem Raum 800 mit den Nummern 1-9999 und
$c zusätzlich noch 90000800 und 90000001-90000010

$d UPDATE REFSYS 9000 DEACTIVATE (90000002-90000010).

$m GEST 500 Torus
$d UPDATE REFSYS 9000 ALTER(90000010)n(90000500);
REACTIVATE(90000500);
ALTER 90000500 x(-10.00  0.00  0.00).

$d CREATE z=OWN(-34000000 1 -30400000 1 -30040000 1
-32200000 2 -32020000 2 -30220000 2
-32000020 -2 -32000002 -2 -30200020 -2
-30200002 -2 -30020020 2 -30020002 -2
-30200002 -2 -30020020 2 -30020002 -2
-30000004 1 -30000022 -2 -30000040 1
-39990002 1.00
-39990001 0.20)

GESTALT 500 NORME(20.00) ORIGIN(90000500) ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00  0.00
0.00)
SIGMA(1) TAKE(G3 M9000 i 1-9999).

$d CREATE SILHOUETTE 1000 TAKE(m9000 i 1-9999) EXTREFPO 90000001
SURFACE 500 SIGMA (1).
$d UPDATE REFSYS 9000 ALTER 90000001 x(40.00  0.00  0.00).

$D CMD SYMB (RaAnz) ADD(20);
  CMD SYMB (Weite) ADD( 1.000000000000000E+0002).

$d CMD READONLY(diffcmd1.cmd) NEXT.

```

Das Erzeugen von Fläche und der passenden Konstellation in ORIENT kann natürlich auch ohne CMD-File anders erfolgen. Als nächster Schritt müssen die diff. geom. Örter in ORIENT berechnet werden, dies kann wiederum mit Hilfe eines CMD-Files erfolgen oder auch wiederum ohne. Das zuvor aufgelistete CMD-File ruft automatisch das folgende auf und zeigt das Menü am Beginn:

```
$c diffcmd1.cmd 5-Mai-1999
```

```
<menu
```



```

$-pc+lm
$m torus
$m ^@Protfn
$m ^@AdpTyp1
$m ^@AdpTyp3
$m ^@AdpTyp5
$m ^@AdpTyp7
$m ^@Adj
$m ^@Ende
$ed

```

```

<protfn
$D$-lc+LM-pm-pc
$m$m Protfilename?
CMD SYMB(protf) ADD.
$d CORMAN PROT(!protf).
@menu

```

```

<AdpTyp1
$d UPDATE ADPAR(500-599) TYPE (1).
@menu

```

```

<AdpTyp3
$d UPDATE ADPAR(500-599) TYPE (3).
@menu

```

```

<AdpTyp5
$d UPDATE ADPAR(500-599) TYPE (5).
@menu

```

```

<AdpTyp7
$d UPDATE ADPAR(500-599) TYPE (7).
@menu

```

```

<adj
$D$-lc+LM+pm-pc
$m ^@RaAnz !Raanz;
$m ^@Weite !Weite;
$d ADJUST REFSYS 9000 GESTALT OBJECT SILHOUETTE 1000 OBJECT MODEL
OBJECT MERELY SIGMA(1) TEST (33858) PRINT.
$D$-lc+LM-pm-pc
@menu

```

```

<ende
$ed

```

Unter dem Menüpunkt „protfn“ kann der Dateiname für die Ausgabe der nötigen Daten der diff. geom. Örter angegeben werden. Mit den Menüpunkten „AdpTyp1-7“ kann jeweils das gewünschte Minimumkriterium nach Tabelle 6-1 gesetzt werden. Durch Aufruf von „adj“ werden die Örter berechnet und auf das Ausgabefile geschrieben. Es können natürlich auf dasselbe File die Ergebnisse aller 4 „ADPAR-TYPEn“ ausgegeben werden. Es muß nach jeder Änderung des „ADPAR-TYPE“ der Menüpunkt „adj“

aufgerufen werden. Mit dem Menüpunkt „ende“ steigt man aus dem CMD-File aus. Das durch dieses CMD-File erzeugte Ausgabefile kann mit dem EDV-Programm aus Kapitel 4.3 aufbereitet werden.

Abbildung 6-1 und Abbildung 6-2 zeigen den Konvergenzbereich eines Torus bei unterschiedlichen Minimumkriterien. Der Torus liegt wie in Abbildung 5-5 und dargestellt wird der Schnitt mit der $[X_1, X_2]$ Ebene. Der Verlauf des Schnittes von Torus und Grundebene wird durch die kleinen grauen Kreise angedeutet, die durch Interpolation gewonnen werden. Auch beim Torus zeigen sich ähnliche Charakteristiken wie bei den sehr ausführlich untersuchten Quadriken (siehe Kapitel 4.3). Es empfiehlt sich auch hier die Iteration mit E_1 und F_1 zu starten und dann auf das gewünschte Minimumkriterium umzuschalten.

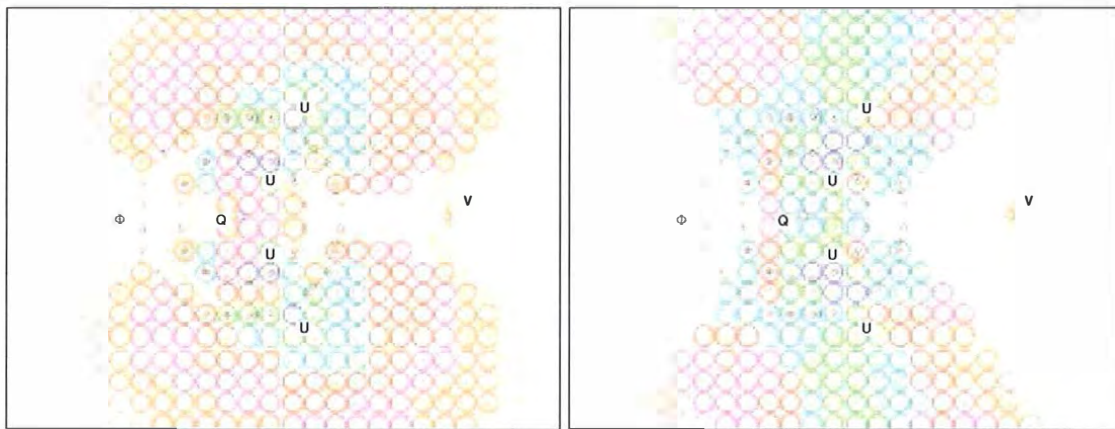


Abbildung 6-1: Konvergenzbereiche eines Torus, geschnitten mit der Grundebene, für E_1 mit F_1 links und E_2 mit F_2 rechts

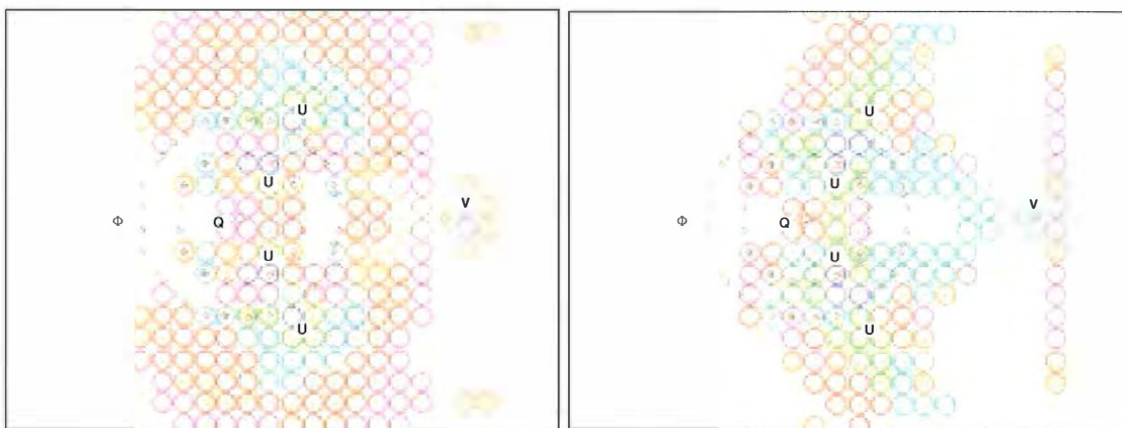


Abbildung 6-2: Konvergenzbereiche eines Torus, geschnitten mit der Grundebene, für E_3 mit F_1 links und E_4 mit F_2 rechts

7 Anwendungsmöglichkeiten

Bevor direkt auf Anwendungsmöglichkeiten der Objektrekonstruktion mittels Umrißpunkten eingegangen wird, soll hier ein kurzer und allgemeiner Überblick über die Methoden der Objektrekonstruktion gegeben werden.

Die Methoden können grob in folgende Bereiche eingeteilt werden:

- Punkt- und linienweise Objektrekonstruktion:
Unter der punkt- und linienweisen Objektrekonstruktion versteht man die Modellierung einer Oberfläche eines Objektes nur mit Hilfe von Punkten und Linien.
- Flächenweise Objektrekonstruktion:
Hier wird die Oberfläche eines Objektes durch eine oder mehrere Teilflächen modelliert.

Bei der punkt- und linienweisen Objektrekonstruktion scheidet die Einbeziehung von Umrißpunkten aus, da für diese Methode eine Fläche unbedingt notwendig ist. Hingegen bietet sich bei der flächenweisen Objektrekonstruktion die Einbeziehung von Umrißpunkten an, da ohne erheblichen Mehraufwand (kein Anbringen von Markierungen) die Umrißpunkte gemessen werden können.

In der Praxis werden alle oben genannten Objektrekonstruktionsmethoden gleichzeitig eingesetzt, um eine optimale Modellierung der Fläche zu erreichen. Im Kapitel 8 wird anhand eines Beispiels auch gezeigt, daß in Sonderfällen eine Objektrekonstruktion ausschließlich über Umrißpunkte möglich ist.

Aus jetziger Sicht wird die Objektrekonstruktion mittels Umrissen vor allem in zwei Bereichen der Vermessung eingesetzt werden:

- Rohrleitungssysteme



Abbildung 7-1: OMV Rohrleitungssystem

- Freiformflächen



Abbildung 7-2: Zwiebel des Wiener Fernwärmeturms

Bei Rohrleitungssystemen sind die geometrischen Formen der Flächen von Teilstücken bekannt. Hier handelt es sich primär um Zylinder, Kegel und Toren. Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe liegt in der Zuordnung der Umrißpunkte zu den Leitungsteilstücken - vor allem wenn die Umrisse automatisch detektiert werden sollen - und in der Verwaltung dieser Teilstücke.

Bei gekrümmten Freiformflächen liegen die Schwierigkeiten bei der Modellierung der Flächen und den von Fläche zu Fläche verschiedenen Konvergenzbereichen. Als besonders vorteilhaft erweist sich diese Theorie, wenn die zu vermessenden Flächen nicht zugänglich (Türme, gesperrte Bereiche) sind oder zu geringe Textur aufweisen.

Als Musterbeispiel für diese Arbeit (siehe Kapitel 8) wurde die Vermessung der zwiebelförmigen Fläche des Wiener Fernwärmeturms (siehe Abbildung 7-2, entworfen von F. Hundertwasser) gewählt. Grund für diese Wahl war die ausgefallene geometrische Form, die Nähe zur Universität und auch der internationale Bekanntheitsgrad dieses Bauwerkes.

8 Musterbeispiel anhand der Vermessung der Zwiebel und des Schaftes des Wiener Fernwärmeturms

Das Hauptaugenmerk bei der Vermessung der Zwiebel und des Schaftes des Wiener Fernwärmeturms (siehe Abbildung 8-1) lag darin, zu zeigen, daß eine Vermessung nur mit Umrißpunkten möglich ist. So wurde auch auf das aufwendige Einmessen von Paßpunkten verzichtet und die Auswertungen in einem lokalen System durchgeführt. Derartig verschiedene „Vereinfachungen“ können zu ungünstiger Fehlerfortpflanzung und zu anderen aus photogrammetrischer Sicht unerwünschten Seiteneffekten führen, die aber keinerlei Auswirkungen auf die Gültigkeit und Exaktheit dieser Arbeit haben.



Abbildung 8-1: Wiener Fernwärmeturm

8.1 Lagerung und Bestimmung des lokalen Systems

Bei der Planung der verschiedenen Aufnahmeorte wurde darauf geachtet, daß eine Sichtverbindung zwischen den Aufnahmeorten vorhanden war. In der näheren Umgebung haben sich zwei Gebäude angeboten: Sowohl am Gebäude der Polizeidirektion Wien als auch am Hochhaus der Fernwärme Wien wurden je zwei Standpunkte (P744/P757; P775/P767) festgelegt (siehe Abbildung 8-2).

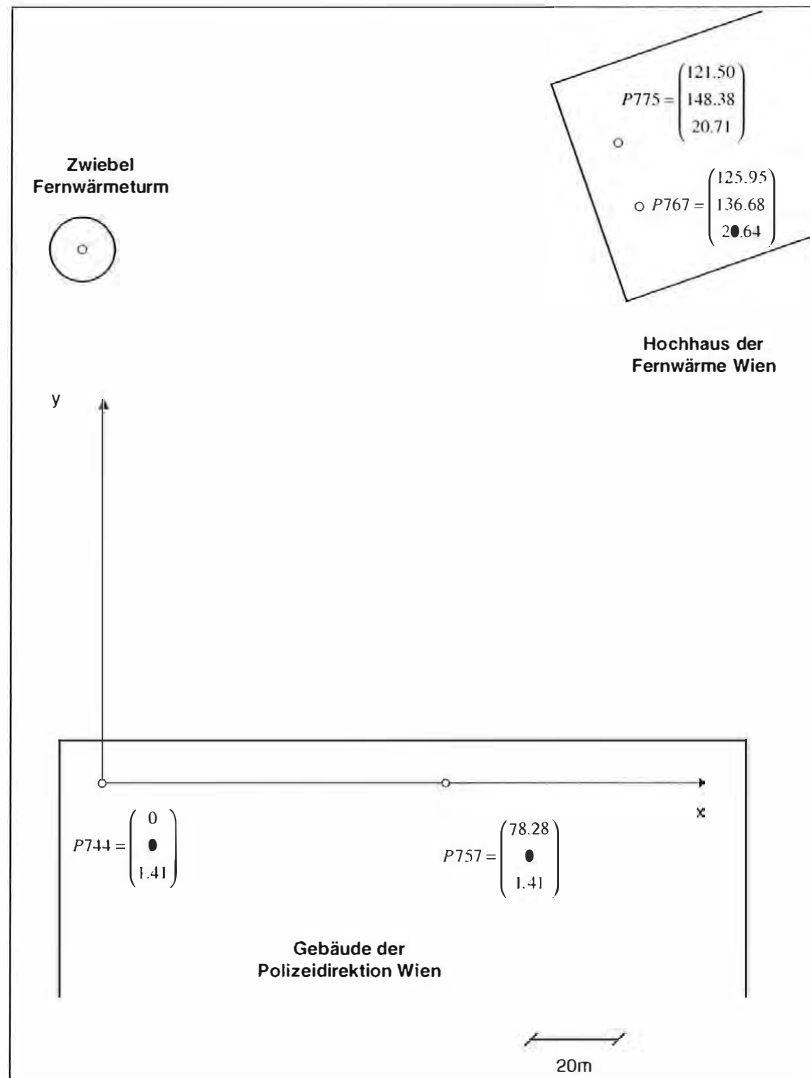


Abbildung 8-2: Lageplan der Aufnahmesituation

Von diesen Standpunkten aus wurden mit der digitalen Meßkamera Kodak DCS 460c die Aufnahmen durchgeführt. Es wurde ein 15mm Objektiv mit einer Kamerakonstanten von 1665.12pix und ein 28mm Objektiv mit einer Kamerakonstanten von 3118.86pix verwendet. Von jedem Standpunkt aus wurden, gleichmäßig über den ganzen Vollkreis

verteilt, Aufnahmen zur Versteifung des Systems durchgeführt. Anzahl und Photonummern der Aufnahmen können in Tabelle 8-1 nachgelesen werden.

Standpunkt	Photonummern bei 15mm	Photonummern bei 28mm	Anzahl
Polizei P744	50-53	44-49, 54, 56	12
Polizei P757	62-64	57-61, 66	9
Hochhaus P767	71-72	67, 69-70, 73	6
Hochhaus P775	85-89	90	6

Tabelle 8-1: Aufnahmeverteilung über die Standpunkte

Über die 7 Parameter der Lagerung des lokalen Systems wurde wie folgt verfügt, siehe [Kraus, 1996, p98ff]:

- 3 Translationen durch Festsetzen der Koordinaten von P744
- 1 Rotation durch Nullsetzen der y Koordinate von P757
- 2 Rotationen durch Beobachten von senkrechten Linien
- 1 Maßstab durch Messen der x Koordinate von P757

Die Messungen von Bildkoordinaten wurden mit dem Programm ORPHEUS [IPF, 2000], der anschließende photogrammetrische Ausgleich mit dem Programm ORIENT durchgeführt.

Auf die Berechnung des Ausgleiches des lokalen Netzes soll hier nicht näher eingegangen werden, da das eine übliche und nicht neue Vorgangsweise ist. Die bis dahin in ORIENT erzeugten Räume können in Tabelle 8-2 und die wichtigsten Werte der Ausgleichsstatistik in Tabelle 8-3 nachgelesen werden:

Raumart	Nummer	Anmerkung
REFSYS	9001	Übergeordnetes System (lokales Netz)
PHOTO	44-90	Details, siehe Tabelle 8-1
GESTALT	3200, 3210, 3220, 3230	Senkrechte Häuserkanten zur Horizontierung des Systems
GESTALT	744, 757, 767, 775	Modellierung der exzentrischen Kameraaufstellungen je Standpunkt
CONPOI	80003000	Paßpunktraum für Systemlagerung

Tabelle 8-2: Auflistung der in ORIENT erzeugten Räume zur Bestimmung der Orientierungen vor der SILHOUETTEn-Berechnung

Kenngröße	Wert
[pvv] (Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen)	70.02
Anzahl der Beobachtungen	2874
Anzahl der Unbekannten	613
Redundanz	2261
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1727 pix

Tabelle 8-3: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT vor der SILHOUETTE-Berechnung

8.2 Messung der Umrißpunkte auf Schaft und Zwiebel

Die Umrißpunkte wurden ebenfalls mit dem Programm ORPHEUS gemessen. Umrißpunkte sowohl von Zwiebel und Schaft wurden von jedem Standpunkt aus in den Bildern gemessen (siehe Abbildung 8-3).

Für die Verwaltung der Umrißpunkte wurde folgendes 5-stelliges Punktnummernschema verwendet (siehe Tabelle 8-4).

Punktnummer	Interpretation		
tppxx	$t = \begin{cases} 1 & \text{Zwiebel} \\ 2 & \text{Schaft} \end{cases}$	pp Photonummer	xx Punktnummer

Tabelle 8-4: Punktnummernschema von Umrißpunkten

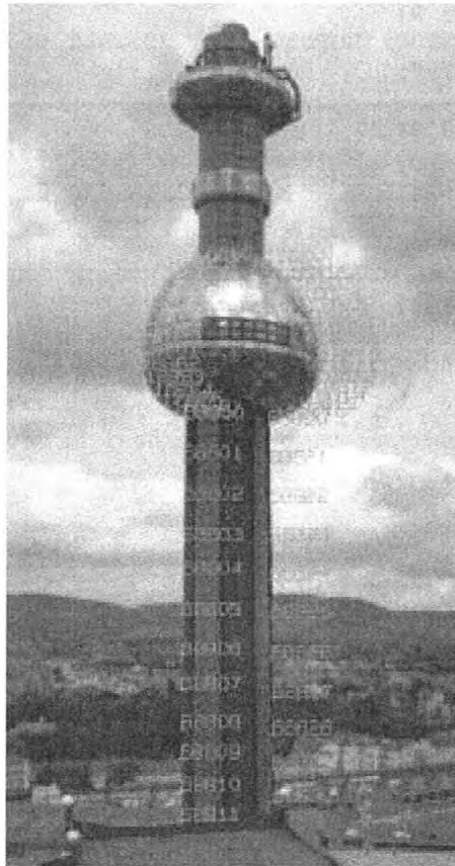


Abbildung 8-3: Turm mit gemessenen Umrißpunkten

8.3 Bestimmung der Näherungswerte für die Umrißpunkte

Nach Berechnung der Orientierungen wurden die Koordinaten des Mittelpunktes des Turmes grob geschätzt. In diesem Punkt wurden Ebenen erzeugt, die senkrecht zum Hauptstrahl der Bilder standen, in denen der Turm beobachtet wurde. Anschließend schnitt man diese Ebenen mit den Sehstrahlen. So gelangte man zu sehr guten Näherungen für die Umrißpunkte.

Das Erzeugen der Ebenen geschah in ORIENT mit folgenden Direktiven, zusammengefaßt in einem CMD-File:

```
$c Schaft
<Ebn6xx
UPDATE REFSYS 9001 ALTER(90000080)n(90000600)
x(-3 94 40);
DEACTIVATE(90000600).
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000600) ROTPAR (51) GESTALT 651
TAKE(m9001 i 65100-65199).
```

```
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000600) ROTPAR (63) GESTALT 663
TAKE(m9001 i 66300-66399).
```

```
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000600) ROTPAR (71) GESTALT 671
TAKE(m9001 i 67100-67199).
```

```
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000600) ROTPAR (88) GESTALT 688
TAKE(m9001 i 68800-68899).
$ed @
```

```
$c Zwiebel
<Ebnlxx
UPDATE REFSYS 9001 ALTER(90000082)n(90000100)
x(-3 94 40);
DEACTIVATE(90000100).
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000100) ROTPAR (51) GESTALT 151
TAKE(m9001 i 15100-15199).
```

```
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000100) ROTPAR (63) GESTALT 163
TAKE(m9001 i 16300-16399).
```

```
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000100) ROTPAR (71) GESTALT 171
TAKE(m9001 i 17100-17199).
```

```
CREATE z=OWN(-30000000 0)
NORME(1) ORIGIN (90000100) ROTPAR (88) GESTALT 188
TAKE(m9001 i 18800-18899).
$ed
```

Dieser Code soll vor allem ORIENT Benützern beim Erzeugen solcher Ebenen helfen. Auf ein paar Details soll noch hingewiesen werden: Erzeugt man die Ebenen in Form von z-GESTALTen und verwendet die Rotationen der entsprechenden Bilder, so hat man bereits bewerkstelligt, daß die Ebenen normal auf den Hauptstrahl stehen. Der Turmmittelpunkt wurde mit (-3/94/40) angenommen. Die Numerierung der Ebenen ist 3-stellig und die Interpretation erfolgt analog zu den ersten drei Stellen des Punktnummernschemas (tpp) von Tabelle 8-4.

Die Näherungswerte wurden mit folgendem Befehl in ORIENT berechnet:

```
$d ADJUST PHOTO=OBJECT (51 63 71 88) GESTALT=OBJECT (151 163 171 188
651 663 671 688) SHOW;
```

Da sowohl bei den PHOTOS als auch bei den GESTALTen nur die Objektpunkte frei waren, entsprach das dem Schneiden der Sehstrahlen mit den entsprechenden Ebenen.

8.4 Erzeugen von Schaft- und ZwiebelGESTALTen

Das Erzeugen von GESTALTen in Orient soll hier vorab an zwei einfachen Flächen gezeigt werden. Im Kapitel 8.8 werden geeignete Flächen für die Turmzwiebel gesucht. Der Schaft des Turmes soll durch einen geraden Kreiskegel modelliert werden. Die implizite Gleichung eines geraden Kreiskegels lautet [Netz, p 456], siehe auch Abbildung 8-4:

$$\frac{(x_1)^2}{(a)^2} + \frac{(x_2)^2}{(a)^2} - \frac{(x_3)^2}{(c)^2} = 0 \quad (8.4-1)$$

Nach Multiplikation von (8.4-1) mit a^2c^2 gelangt man zu:

$$(x_1)^2(c)^2 + (x_2)^2(c)^2 - (x_3)^2(a)^2 = 0 \quad (8.4-2)$$

Die Koeffizienten $A_{ijkplmn}^g$ der Flächengleichung lauten, siehe auch Kapitel 6.2:
Zuweisung der Parameter:

$$\begin{aligned} s &:= c \\ t &:= a \end{aligned}$$

Koeffizienten:

$A_{2000020}^g = 1$	fest	
$A_{0200020}^g = 1$	fest	
$A_{0020002}^g = -1$	fest	
$A_{39990001}^g = 4$	frei	t
$A_{39990002}^g = 500$	fest	s

Um die Form eines Kegels beschreiben zu können, reicht das Verhältnis $\frac{t}{s}$ aus, daher wird auch nur der Parameter t freigelassen. Würde man beide Parameter s und t freilassen, würde das zu einer Singularität führen.

Das Erstellen des Kegels in ORIENT geschieht wiederum über ein dokumentiertes CMD-File, das hier abgebildet ist (Erklärungen sind durch \$c gekennzeichnet):

```

<Kglgst6000
UPDATE REFSYS 9001 ALTER(900000081)n(90006000)
$c aendern des Namens eines unbenutzten Punktes in den Namen der
$c gewünschten Kegelspitze
x(-16 90 440);
$c setzen der Näherungswerte für die Kegelspitze
REACTIVATE(90006000).
$c wird für den Ausgleich freigegeben, kann sich verändern
CREATE z=OWN obs(
$c Koeff.nummer Wert Genauigkeit der Beobachtung (bei 0 unbeobachtet)
$c „-“ vor dem Koeffizienten bedeutet, daß er inaktiv ist beim
$c Ausgleich
-32000020 1 0          $c x1^2          s^2
-30200020 1 0          $c          x2^2          s^2
-30020002 -1 0         $c          x3^2          t^2
-39990002 500 0        $c s... c: Hoehe d Spitze über Basiskreis
39990001 4 0 0        $c t... a: Basiskreisradius=4
GESTALT 6000 NORME(1) ORIGIN(90006000)
ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00 0.00 0.00)
$c GESTALT wird erzeugt mit NORME=1 Bezugspunkt (Q) 90006000 und den
$c Drehungen (0 0 0)
SIGMA (0.25) TAKE(M9001 i 60000-69999).
$c Genauigkeit wird auf 0.25m gesetzt Punkte 6000-6999 liegen auf
$c GESTALT
UPDATE GESTALT 6000 TYPE=3.
$c implizite z-GESTALT

UPDATE ROTPAR 6000 DEACTIVATE all.
$c Rotation wird nicht freigegeben
UPDATE ADPAR 6000 TYPE=1.
$c Minimumkriterium wird auf Typ E1 gesetzt
$ed

```

Die Zwiebel des Turmes soll für Übungszwecke durch eine Kugel modelliert werden.
Die implizite Gleichung einer Kugel lautet [Netz, p 456]:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (r)^2 = 0$$

(8.4-3)

Die Koeffizienten $A_{ijkplmn}^g$ der Flächengleichung lauten, siehe auch Kapitel 6.2:
Zuweisung der Parameter:

$$t := r$$

Koeffizienten:

$A_{0000002}^g$	= -1	fest	
$A_{2000000}^g$	= 1	fest	
$A_{0200000}^g$	= 1	fest	
$A_{0020000}^g$	= 1	fest	
$A_{39990001}^g$	= 8	frei	t

Das Erstellen der Kugel in ORIENT geschieht wiederum über ein CMD-File, das hier abgebildet ist :

```
<KugGst1000 $c KUGEL
$d UPDATE REFSYS 9001 ALTER(900000083)n(90001000);
UPDATE REFSYS ALTER (90001000)x(-3 90 200);
REACTIVATE(90001000) .
$d CREATE z=OWN=obs(
-300000002 -1 0 $c
-320000000 1 0 $c x12
-302000000 1 0 $c x22
-300200000 1 0 $c x32
399900001 8 0) $c r=8 t=r
GESTALT 1000 NORME(1.00) ORIGIN(90001000)
ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00 0.00 0.00)
SIGMA (0.10)
TAKE(M9001 i 15100-15199 16300-16399 17100-17199 18800-18899) .
UPDATE GESTALT 1000 TYPE=3. $c implizite z GESTALT
UPDATE ROTPAR 1000 DEACTIVATE ALL.
UPDATE ADPAR 1000 TYPE=1.
$ed
```

8.5 Erzeugen von Schaft- und Zwiebel- SILHOUETTEN

Das Erzeugen von SILHOUETTEN in Orient soll hier ganz ausführlich erklärt werden, da dieser Raum im Zuge dieser Arbeit in ORIENT entstanden ist. Die Raumstruktur und die notwendigen Parameter für das Erzeugen einer SILHOUETTE wurden im Kapitel 6.1 behandelt, die Syntax für das Erzeugen wird hier ausführlich erklärt:

CREATE	\$c Kommentar
SILHOUETTE (silhouette_id)	\$c Erzeugt Raum
TAKE (selection)	\$c Name der SILHOUETTE
	\$c Alle Punkte, die auf der
	\$c SILHOUETTE sind
EXTREFPO (viewpoint_id)	\$c Name des Standpunktes der
	\$c der Beobachtung
SURFACE (gestalt_id)	\$c Name der GESTALT
SIGMA (0.10)	\$c Genauigkeit der SILHOUETTE-
	\$c Beobachtung
*	\$c Abschluß der Direktive

Der „Subtyp“ von SILHOUETTE wird, wenn er nicht in der Direktive gesetzt wird, automatisch auf null gesetzt

Für Schaft und Zwiebel lauten die Direktiven:

```
<Silh6000 $c Schaft
CREATE SILHOUETTE 6051 TAKE(m9001 i 65100-65199) EXTREFPO 90000044
SURFACE 6000 SIGMA (0.10) .
CREATE SILHOUETTE 6063 TAKE(m9001 i 66300-66399) EXTREFPO 90000057
```

```

SURFACE 6000 SIGMA (0.10).
CREATE SILHOUETTE 6071 TAKE(m9001 i 67100-67199) EXTREFPO 90000067
SURFACE 6000 SIGMA (0.10).
CREATE SILHOUETTE 6088 TAKE(m9001 i 68800-68899) EXTREFPO 90000075
SURFACE 6000 SIGMA (0.10).
$ed @

<Silh1000 $c Zwiebel
CREATE SILHOUETTE 1051 TAKE(m9001 i 15100-15199) EXTREFPO 90000044
SURFACE 1000 SIGMA (1.10).
CREATE SILHOUETTE 1063 TAKE(m9001 i 16300-16399) EXTREFPO 90000057
SURFACE 1000 SIGMA (1.10).
CREATE SILHOUETTE 1071 TAKE(m9001 i 17100-17199) EXTREFPO 90000067
SURFACE 1000 SIGMA (1.10).
CREATE SILHOUETTE 1088 TAKE(m9001 i 18800-18899) EXTREFPO 90000075
SURFACE 1000 SIGMA (1.10).
$ed

```

8.6 Syntax und Strategie beim Ausgleich von SILHOUETTEn

Syntax für den SILHOUETTEn Parameter beim Ausgleich:

```

ADJUST
SILHOUETTE = OBJECT = EXTREFPO = ROTPAR = ADPAR = PRJCTR

```

bei

SILHOUETTE = OBJECT	freilassen der Objektpunkte
SILHOUETTE = EXTREFPO	freilassen des GESTALT Bezugspunktes
SILHOUETTE = ROTPAR	freilassen der ROTPAR der GESTALT
SILHOUETTE = ADPAR	freilassen der Koeffizienten des ADPAR-Raumes
SILHOUETTE = PRJCTR	freilassen des Standpunktes der SILHOUETTE- Beobachtung

Strategie:

Für eine Konvergenz des Ausgleichssystems ist, wie bereits im Kapitel 4.3 ausführlich untersucht wurde, das Minimumkriterium entscheidend. In sehr vielen Fällen hat sich bewährt, zu Beginn des Ausgleiches den „Subtyp“ des ADPAR-Raumes auf 1 zu setzen und, sobald die Konvergenz sichergestellt ist, auf des gewünschte Minimummaß umzusetzen. Weiters hat sich gezeigt, daß gemeinsame Freiheitsgrade (ADPAR EXTREFPO ROTPAR), die sowohl von der GESTALT als auch von der SILHOUETTE gesteuert werden können, parallel geführt werden sollen. Das heißt, sind diese Parameter bei der GESTALT frei, so sollen sie auch bei der SILHOUETTE frei sein, ansonsten kann das zu einem nicht ausiterierbaren Gleichungssystem führen. Es sollen ADPAR, EXTREFPO und ROTPAR nicht alle am Anfang der Iteration freigegeben werden, sondern in der Reihenfolge EXTREFPO, dann ADPAR und dann erst ROTPAR und dazwischen sollte ausiteriert werden. Führt diese Vorgangsweise nicht zur gewünschten

Konvergenz, so kann möglicherweise durch Änderung der Reihenfolge der Freigabe Konvergenz erzielt werden.

8.7 Ergebnisse der Schaftvermessung

Bei der Form des Schaftes war es offensichtlich, daß es sich hier um einen Kegel handelt. Die GESTALT wurde durch das in Kapitel 8.4 aufgelistete CMD-File erzeugt, Parameter siehe Abbildung 8-4. Die implizite Gleichung des Kegels lautet:

$$(x_1)^2(c)^2 + (x_2)^2(c)^2 - (x_3)^2(a)^2 = 0$$

(8.7-1)

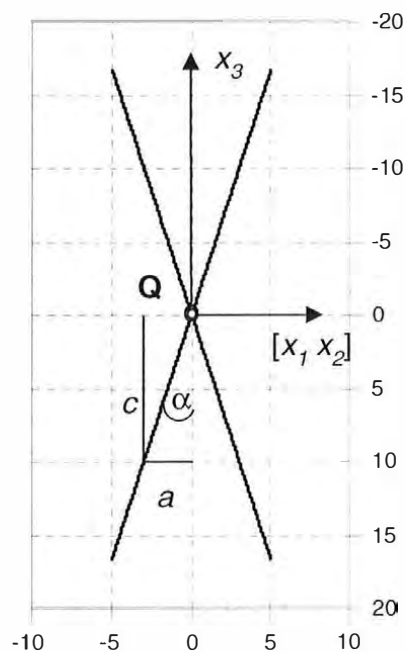


Abbildung 8-4: Meridianschnitt eines Kegels

Der Ausgleich lieferte folgendes Ergebnis:

Kenngroße	Wert
[pvv] (Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen)	70.02
Anzahl der Beobachtungen	3238
Anzahl der Unbekannten	886
Redundanz	2351
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1728 pix

Tabelle 8-5: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Kegelberechnung

Die Werte der Parameter ergaben sich zu:

Parameter	Wert [m]	Mittlerer Fehler [m]
a Radius des Basiskreises	5.11	± 2.17
c Höhe der Kegelspitze über dem Basiskreis	500	fest
Q Koordinaten der Kegelspitze	-4.21 123.33 506.62	± 0.041 ± 0.037 ± 93

Tabelle 8-6: Parameter des Schaftes approximiert durch einen Kegel

Aus den Parametern a und c ergibt sich ein Öffnungswinkel α von 0.6 Gon. Dieser geringe Öffnungswinkel ist auch der Grund für die schlechte Genauigkeit der Kegelspitze in der x_3 Koordinate (schleifender Schnitt der Erzeugenden).

Drei weitere Größen sind bei Flächenbestimmungen von Interesse:

Mittlerer Fehler a priori	angenommene Genauigkeit der Fläche
Mittlerer Fehler a posteriori	tatsächliche Genauigkeit der Fläche
Maximale Fehler	maximale Fehler eines Punktes auf der Fläche

Mit. Fehler a priori [m]	Mit. Fehler a posteriori [m]	Max. Fehler [m]
± 0.10	± 0.11	+ 0.19

Tabelle 8-7: Fehler des durch einen Kegel approximierten Schaftes

Betrachtet man die Genauigkeiten des Basiskreisradius a und der x_3 - Koordinaten von \mathbf{Q} , so stellt sich die Frage, ob es möglich ist durch eine „geschicktere“ Formulierung des Kegels bessere Genauigkeiten zu erzielen. Durch geometrische Überlegungen wurde folgende alternative Formulierung gefunden: Der Bezugspunkt \mathbf{Q} des Kegels wurde nicht in die Spitze gelegt sondern in den Basiskreis. Die Höhe des Basiskreises wurde auf Null gesetzt (daraus folgt: ${}_R Q_3 = 0$)⁷, das entspricht in etwa der Aufnahmehöhen der Standpunkte am Polizeigebäude. Die Gleichung des Kegels für \mathbf{Q} am Basiskreis lautet und kann aus (8.7-1) abgeleitet werden, Parameter siehe Abbildung 8-5:

$$\frac{(x_1)^2}{(a)^2} + \frac{(x_2)^2}{(a)^2} - \frac{(x_3)^2}{(c)^2} + 2 \frac{x_3}{c} - 1 = 0$$

(8.7-2)

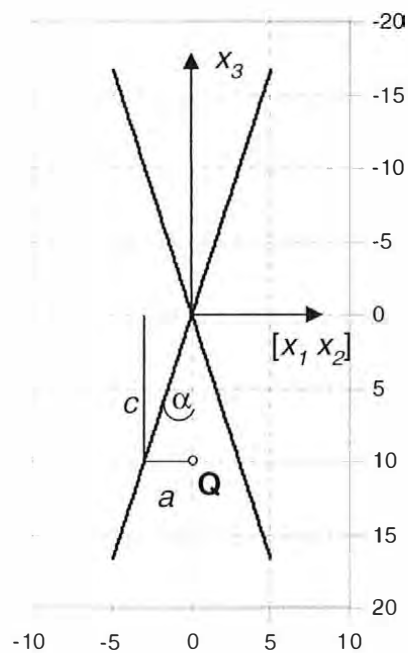


Abbildung 8-5: Meridianschnitt eines Kegels

Multipliziert man Gleichung (8.7-2) mit a^2 und setzt man für $\frac{a}{c} = \tan(\alpha)$ den neuen Parameter k , so gelangt man zu folgender Kegelgleichung:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - k^2 (x_3)^2 + 2kx_3 - a^2 = 0$$

(8.7-3)

⁷ Genau genommen wurde die x_3 -Koordinate von ${}_R \mathbf{Q}$ nicht festgehalten, sondern mit einer Genauigkeit von $\pm 0.01 \text{ m}$ beobachtet, daher wird auch in Tabelle 8-9 für diese Koordinate eine Genauigkeit ausgegeben.

Die Koeffizienten A^g_{ijklmn} der Flächengleichung lauten, siehe auch Kapitel 6.2:
Zuweisung der Parameter:

$$s := a$$

$$t := a/c$$

Koeffizienten:

$A^g_{0000020} = -1$	fest	
$A^g_{2000020} = 1$	fest	
$A^g_{0200020} = 1$	fest	
$A^g_{0020002} = -1$	fest	
$A^g_{0010011} = 2$	fest	
$A^g_{39990001} = 0.01$	frei	t
$A^g_{39990002} = 5$	frei	s

Die GESTALT wurde durch das hier aufgelistete CMD-File erzeugt:

```
<Kegel    KEGEL
$d UPDATE REFSYS 9001 ALTER(900000084)n(90006010);
UPDATE REFSYS ALTER (90006010)x(-16 90 0); $c
REACTIVATE(90006010).
$d CREATE z=OWN=obs(
-300000020 -1 0 $c          s^2
-320000000 1 0 $c x^2
-302000000 1 0 $c      y^2
-300200002 -1 0 $c      z^2          t^2
-30010011 +2 0 $c      z^1      s^1      t^1
399900002 5 0 $c      s=a Radius des Basiskreises
399900001 0.01)$c      k=a/c
GESTALT 1000 NORME(1.00) ORIGIN(90006010)
ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00 0.00 0.00)
SIGMA (0.10) TAKE(M9001 i 60000-69999).
UPDATE GESTALT 6010 TYPE=3. $c implizite z GESTALT

UPDATE ROTPAR 6010 DEACTIVATE all.
$c Rotation wird nicht freigegeben
UPDATE ADPAR 6010 TYPE=1.

$d EDIT CONPOI DATA(kegel.con) FORMAT=FREE ENDCODE(-99).
$c Einlesen eines Passpunktraums, der
$c die z Koordinate von Q beobachtet (entspricht "festgehalten")
```

Der Ausgleich lieferte folgendes Ergebnis:

Kenngröße	Wert
[pvv] (Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen)	70.03
Anzahl der Beobachtungen	3238
Anzahl der Unbekannten	886
Redundanz	2351
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1728 pix

Tabelle 8-8: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Kegelberechnung

Die Werte der Parameter ergaben sich zu:

Parameter	Wert [m]	Mittlerer Fehler [m]
a Radius des Basiskreises	5.18	± 0.057
$k=c/a$ Verhältnis aus Höhe und Basiskreisradius	0.0102	± 0.002
Q Koordinaten der Kegelspitze	-4.21 123.33 0	± 0.041 ± 0.037 ± 0.017

Tabelle 8-9: Parameter des Schaftes approximiert durch einen Kegel

Aus dem Parameter k ergibt sich wieder ein Öffnungswinkel α von 0.6 Gon. Vergleicht man Tabelle 8-6 mit Tabelle 8-9, so erkennt man, daß durch diese Kegeldarstellung ein besseres Ergebnis, was die mittleren Fehler betrifft, erzielt wurde.

Mittlerer Fehler a priori, mittlerer Fehler a posteriori und maximale Fehler ergaben sich zu:

Mit. Fehler a priori [m]	Mit. Fehler a posteriori [m]	Max. Fehler [m]
± 0.10	± 0.11	+ 0.19

Tabelle 8-10: Fehler des durch einen Kegel approximierten Schaftes

8.8 Ergebnisse der Zwiebelvermessung

Bei der Form der Zwiebel wurden verschiedene Flächen für eine Approximation verwendet. Das Spektrum reichte von einer einfachen Kugel bis hin zu Rotationsflächen vierter Ordnung. Zur Auswahl passender Flächen können „Flächenlexika“ wie [Loria, 1910] verwendet werden, oder auch ausführlichere Formelsammlungen wie [Netz, 1992]. Für die Bestimmung dieser Zwiebel wurde zusätzlich noch [Wunderlich, 1979] herangezogen. Diese Publikation beschäftigt sich mit der Bestimmung der Geometrie der Vogeleyer. Drei Flächen wurden ausgewählt und auf die Eignung zur Approximation der Zwiebel untersucht:

8.8.1 Approximation mittels Kugel

Die GESTALT wurde durch das in Kapitel 8.4 aufgelistete CMD- File erzeugt, Die implizite Gleichung einer Kugel lautet:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (r)^2 = 0$$

(8.8-1)

Parameter, siehe Abbildung 8-6:

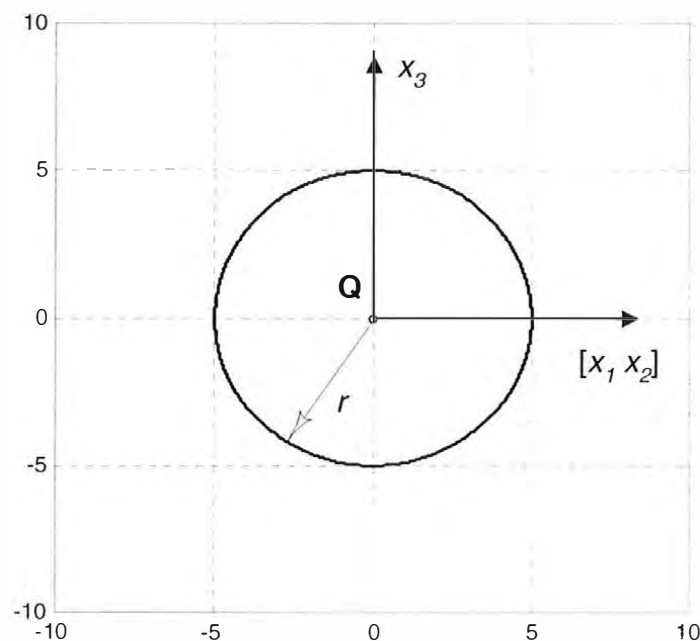


Abbildung 8-6: Meridianschnitt eines um die x_3 -Achse rotierenden Kreises

Der Ausgleich lieferte folgendes Ergebnis:

Kenngröße	Wert
[pvv] (Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen)	77.84
Anzahl der Beobachtungen	3842
Anzahl der Unbekannten	1343
Redundanz	2499
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1765 pix

Tabelle 8-11: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Kugelberechnung

Die Werte der Parameter ergaben sich zu:

Parameter	Wert [m]	Mittlerer Fehler [m]
r Radius der Kugel	10.05	± 0.026
Q Koordinaten des Kugelmittelpunktes	-4.62 123.64 55.82	± 0.047 ± 0.041 ± 0.048

Tabelle 8-12: Parameter der durch eine Kugel approximierten Zwiebel

Mit. Fehler a priori [m]	Mit. Fehler a posteriori [m]	Max. Fehler [m]
± 0.10	± 0.13	- 0.37

Tabelle 8-13: Fehler der durch eine Kugel approximierten Zwiebel

Gemessenen Verknüpfungspunkte, die nicht zur Bestimmung der Flächengestalt verwendet wurden, wiesen einen maximalen und mittleren Abstand (in erster Näherung) zur Fläche von 1.05 m bzw. ± 0.35 m auf.

8.8.2 Approximation mittels Rotationskardioide

Die implizite Gleichung der Rotationskardioide lautet:

$$\left((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (r)^2\right)^2 - 4(r)^2\left((x_3 + r)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2\right) = 0$$

(8.8-2)

Parameter, siehe Abbildung 8-7:

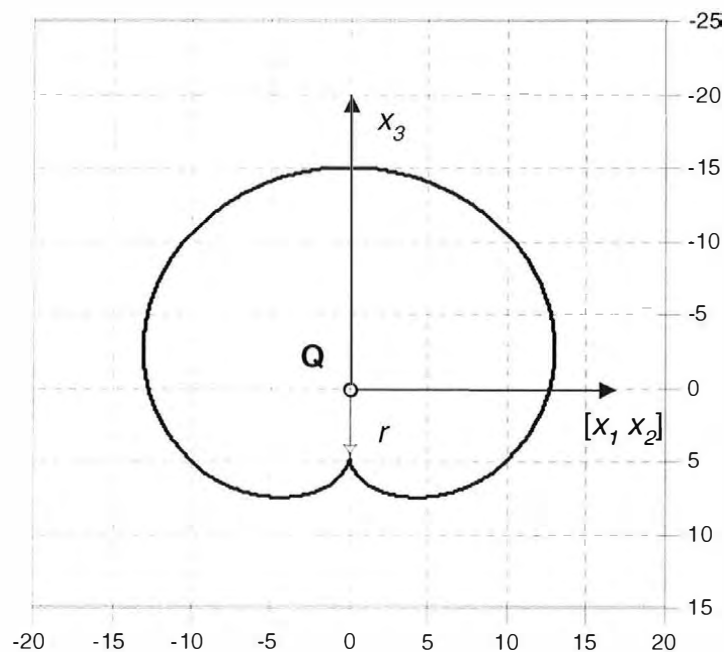


Abbildung 8-7: Meridianschnitt einer um die x_3 -Achse rotierenden Kardioide

Die GESTALT wurde durch das hier aufgelistete CMD-File erzeugt:

```
<Kdgst1000  KARDIOIDE
$d UPDATE REFSYS 9001 ALTER(90000083)n(90001000);
UPDATE REFSYS ALTER (90001000)x(-3 94 41); $c
REACTIVATE(90001000).
$d CREATE z=OWN=obs(
-30000000 0 0 $c
-34000000 1 0 $c x1^4
-30400000 1 0 $c x2^4
-30040000 1 0 $c x3^4
-32200000 2 0 $c x1^2 x2^2
-32020000 2 0 $c x1^2 x3^2
-30220000 2 0 $c x2^2 x3^2
-32000002 -6 0 $c x1^2 t^2
-30200002 -6 0 $c x2^2 t^2
-30020002 -6 0 $c x3^2 t^2
-30010003 -8 0 $c x3^2 t^3
-30000004 -3 0 $c t^4
```

```

39990001  3 0  $c      r=~3      t=r
99990001  3 0) $c

```

```

GESTALT 1000 NORME(1.00) ORIGIN(90001000) ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00  0.00
0.00)
SIGMA (0.10) TAKE(M9001 i  15100-15199 16300-16399
17100-17199 18800-18899).
UPDATE GESTALT 1000 TYPE=3. $c implizite z GESTALT

```

Der Ausgleich lieferte folgendes Ergebnis:

Kenngröße	Wert
[pvv] (Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen)	77.26
Anzahl der Beobachtungen	3842
Anzahl der Unbekannten	1343
Redundanz	2499
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1758 pix

Tabelle 8-14: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Rotationskardioideberechnung

Die Werte der Parameter ergaben sich zu:

Parameter	Wert [m]	Mittlerer Fehler [m]
r Kardioidenparameter	3.95	± 0.010
Q Koordinaten des Kardioidenmittelpunktes	-4.64 123.65 53.64	± 0.048 ± 0.044 ± 0.045

Tabelle 8-15: Parameter der durch eine Rotationskardioide approximierten Zwiebel

Mit. Fehler a priori [m]	Mit. Fehler a posteriori [m]	Max. Fehler [m]
± 0.10	± 0.13	+ 0.38

Tabelle 8-16: Fehler der durch eine Rotationskardioide approximierten Zwiebel

Gemessenen Verknüpfungspunkte, die nicht zur Bestimmung der Flächengestalt verwendet wurden, wiesen einen maximalen und mittleren Abstand (in erster Näherung) zur Fläche von 0.50 m bzw. ± 0.23 m auf.

Da die Approximation der Zwiebel durch eine Rotationskardioide keine Verbesserung zur Kugel darstellte (vergleiche Fehler a posteriori), wurde ein Maßstabsfaktor h in der x_3 -Richtung zusätzlich modelliert.

Die implizite Gleichung der Rotationskardioide mit x_3 Faktor (h) lautet:

$$\left((x_1)^2 + (x_2)^2 + (hx_3)^2 - (r)^2\right)^2 - 4(r)^2\left((hx_3 + r)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2\right) = 0$$

(8.8-3)

Das modifizierte CMD-File lautet:

```
<Kdgst1000 KARDIOIDE mit x3 Faktor
$d UPDATE REFSYS 9001 ALTER(90000083)n(90001000);
UPDATE REFSYS ALTER (90001000)x(-3 94 41); $c
REACTIVATE(90001000) .

$d CREATE z=OWN=obs(
-30000000 0 0 $c
-34000000 1 0 $c x1^4
-30400000 1 0 $c x2^4
-30040040 1 0 $c x3^4 s^4
-32200000 2 0 $c x1^2 x2^2
-32020020 2 0 $c x1^2 x3^2 s^2
-30220020 2 0 $c x2^2 x3^2 s^2
-32000002 -6 0 $c x1^2 t^2
-30200002 -6 0 $c x2^2 t^2
-30020022 -6 0 $c x3^2 s^2 t^2
-30010013 -8 0 $c x3^1 s^1 t^3
-30000004 -3 0 $c t^4
39990001 3 0 $c r=~3 t=r
39990002 1 0 $c s=~1 s=h
GESTALT 1000 NORME(1.00) ORIGIN(90001000)
ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00 0.00 0.00)
SIGMA (0.10)
TAKE(M9001 i 15100-15199 16300-16399 17100-17199 18800-18899) .
UPDATE GESTALT 1000 TYPE=3.
$c implizit z GESTALT
```


Der Ausgleich lieferte folgendes Ergebnis:

Kenngroße	Wert
pll (Summe der Zuschläge)	77.58
pvv (Summe der Verbesserungen)	77.58
Beobachtungen	3842
Unbekannte	1343
Redundanz	2499
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1742 pix

Tabelle 8-17: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Rotationskardioideberechnung (mit x_3 Faktor)

Die Werte der Parameter ergaben sich zu:

Parameter	Wert [m]	Mittlerer Fehler [m]
r Kardiodidenparameter	3.95	± 0.010
h x_3 Faktor	0.92	± 0.008
Q Koordinaten des Kardiodidenmittelpunktes	-4.63 123.65 53.49	± 0.047 ± 0.044 ± 0.054

Tabelle 8-18: Parameter der durch eine Rotationskardioide mit x_3 Faktor approximierten Zwiebel

Mit. Fehler a priori [m]	Mit. Fehler a posteriori [m]	Max. Fehler [m]
± 0.10	± 0.11	+ 0.28

Tabelle 8-19: Fehler der durch eine Rotationskardioide mit x_3 Faktor approximierten Zwiebel

Gemessenen Verknüpfungspunkte, die nicht zur Bestimmung der Flächengestalt verwendet wurden, wiesen einen maximalen und mittleren Abstand (in erster Näherung) zur Fläche von 0.40 m bzw. ± 0.19 m auf.

Der mittlere Fehler a posteriori war von ± 0.13 auf ± 0.11 gefallen und der maximale Fehler von + 0.37 auf + 0.28. Daß die Fehler kleiner werden, war zu erwarten, da ein weiterer freier Parameter eingeführt wurde. Ein Signifikanztest wurde durchgeführt, der geprüft hat, ob sich der zusätzliche Parameter signifikant von 1 unterscheidet [Kreyszig, 1979, p 203ff]. Dabei wurde die maximale Abweichung vom Referenzwert unter der

Annahme von einer 99%igen Wahrscheinlichkeit berechnet. Dieser Test lieferte als maximale Abweichung 0.0186, der berechnete x_3 Faktor weist eine Abweichung von 0.08 auf und liegt daher außerhalb des Intervalls. Was wiederum heißt, daß der Faktor zurecht eingeführt wurde.

8.8.3 Approximation mittels parabolischer Rotationskubik

Die implizite Gleichung der Rotationskubik lautet:

$$-x_3(l+x_3)(m-x_3)-c((x_1)^2+(x_2)^2)=0$$

(8.8-4)

Parameter, siehe Abbildung 8-8:

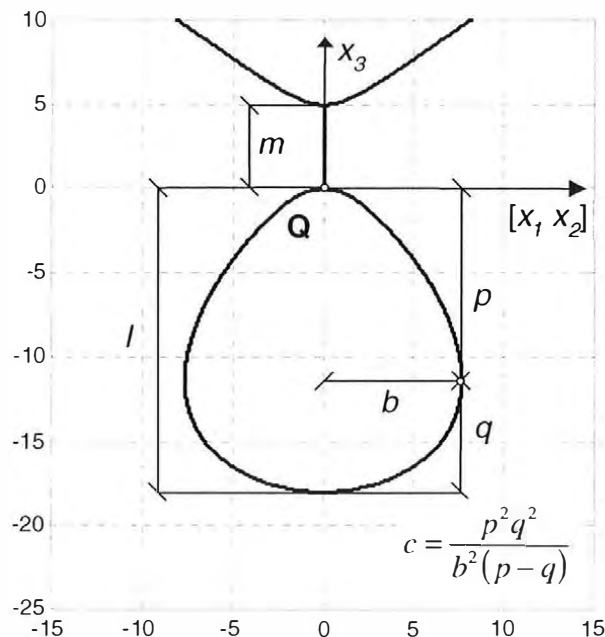


Abbildung 8-8: Meridianschnitt einer um die x_3 -Achse rotierenden parabolischen Kubik

Die GESTALT wurde durch das hier aufgelistete CMD-File erzeugt:

```
< Kdgst1000    Parabolische Kubik
UPDATE REFSYS 9001 ALTER(90000083)n(90001000)
x(-4 123 65);
REACTIVATE(90001000) .
CREATE z=OWN=obs(
-300000000 0 0 $c
-320000100 -1 0 $c x1^2 t^1
-302000100 -1 0 $c x2^2 t^1
-300300000 1 0 $c x3^3
```

```

-30020010  1 0  $c          x32          s1
-30020001 -1 0  $c          x32          r1
-30010011 -1 0  $c          x32          s1    r1
 39990001  6 0  $c          t=6              r=m
 39990002 20 0  $c          s=20             s=1
 39990003 19 0) $c          t=19             t=c
GESTALT 1000 NORME(1.00) ORIGIN(90001000)
ROTPAR=OWN=OMFIKA(0.00  0.00  0.00)
SIGMA (0.10)
TAKE(M9001 i  15100-15199 16300-16399 17100-17199 18800-18899) .
UPDATE GESTALT 1000 TYPE=3. $c implizit z GESTALT

```

Der Ausgleich lieferte folgendes Ergebnis:

Kenngröße	Wert
[pvv] (Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen)	77.78
Anzahl der Beobachtungen	3842
Anzahl der Unbekannten	1343
Redundanz	2499
Standardabweichung a priori PHOTO	1.5 pix
Standardabweichung a priori GESTALT	
700 bis 799	0.05 m
3000 bis 3999	0.01 m
Sigma0 a priori	0.1 pix
Sigma0 a posteriori	0.1719 pix

Tabelle 8-20: Auflistung der wichtigsten statistischen Größen der Ausgleichung in ORIENT bei der Rotationskubikberechnung

Die Werte der Parameter ergaben sich zu:

Parameter	Wert [m]	Mittlerer Fehler [m]
<i>l</i>	21.18	± 0.491
<i>c</i>	18.70	± 1.330
<i>m</i>	5.44	± 2.340
Q	-4.68	± 0.040
Koordinaten des	123.62	± 0.034
Kubikbezugpunktes	68.12	± 0.531

Tabelle 8-21: Parameter der Zwiebel approximiert durch eine parabolische Rotationskubik

Fehler a priori [m]	Fehler a posteriori [m]	Maximaler Fehler [m]
± 0.10	± 0.08	- 0.27

Tabelle 8-22: Fehler der Zwiebel approximiert durch eine parabolische Rotationskubik

Gemessenen Verknüpfungspunkte, die nicht zur Bestimmung der Flächengestalt verwendet wurden, wiesen einen maximalen und mittleren Abstand (in erster Näherung) zur Fläche von 0.24 m bzw. ± 0.12 m auf.

Die Approximation der Zwiebel durch eine parabolische Rotationskubik brachte eine weitere Verbesserung zur Rotationskardioide mit Maßstabsfaktor in der x_3 Richtung (vergleiche Fehler a posteriori). Hingegen verschlechterten sich die Genauigkeiten der Formparameter (vergleiche Tabelle 8-21 mit Tabelle 8-18). Das ist darauf zurückzuführen, daß bei der Kubik drei Parameter zu bestimmen waren. Die Überbestimmungen teilten sich daher auf diese drei Parameter auf, was zu diesem Genauigkeitsverlust führte.

8.8.4 Zusammenfassung

Sowohl die Rotationskardioide mit Maßstabsfaktor als auch die parabolische Rotationskubik approximieren die Zwiebel sehr gut. Bei beiden Kurven bewegen sich die mittleren Fehler im 10 cm Bereich. Welche der beiden Kurven für den Benutzer die bessere ist, muß von ihm selbst entschieden werden. Eine mögliche Entscheidungshilfe würden Punkte am unteren Ende der Zwiebel liefern, da sich hier die beiden Flächen am stärksten unterscheiden. Leider werden diese Punkte vom Schaft verdeckt.

Anmerkung: Die angegebenen mittleren Fehler für die Zwiebelvermessung beziehen sich auf das fest gelagerte lokale Koordinatensystem. Mit Hilfe einer freien Netzlagerung könnte man ein Loslösen vom festen System bewirken.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der Objektrekonstruktion unter Mithilfe von Umrißpunkten wurde erreicht. Die dafür entwickelte Theorie wurde allgemein für unterschiedliche Flächendarstellungen abgeleitet, durch Erklärungen, Abbildungen und Tabellen dem Leser verständlicher gemacht, sodaß die Grundidee besser zu erkennen ist.

Speziell wurde die Theorie der Objektrekonstruktion durch beobachtete Umrißpunkte für das Programmpaket ORIENT aufbereitet und implementiert. Die Schritt für Schritt aufbereiteten Teilkapitel des Theorieteils finden in der Vermessung des Wiener Fernwärmeturms Anwendung. Dieses Beispiel veranschaulicht nochmals ausführlich die Vorgangsweise bei der Objektrekonstruktion mit Hilfe von Umrißpunkten und kann daher als Musterbeispiel für Folgeprojekte dienen. Die Vermessung des Turmes erfolgte ausschließlich unter der Verwendung von Umrißpunkten.

Ziel ist es, die Umrisse automatisch zu detektieren und sie den entsprechenden Flächen zuzuordnen. Erste vielversprechende Vorstudien wurden vom Verfasser bereits in dieser Richtung unternommen [Legenstein, 2000].

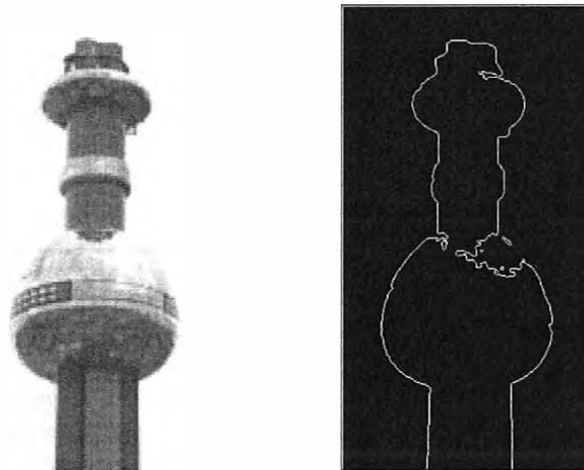


Abbildung 9-1: Fernwärmeturm und automatisch detektierter Umriß des Turmes

Abbildung 9-1 zeigt den Fernwärmeturm und das Ergebnis einer automatischen Objekt- und Umrißdetektion. Für die Objektdetektion wurden Farbe und Textur verwendet, für die anschließende Bestimmung des Umrisses ein „einfacher“ Kantenextraktor. Eine Zuordnung der einzelnen Umrißteilstücke zu ihren Flächenteilen könnte über die unterschiedlichen Farben von Schaft und Zwiebel erfolgen.

Eine teilweise oder vollständige Automation würde (grob geschätzt) in jedem zweiten photogrammetrischen Projekt zu Zeitersparnissen und Erleichterungen führen.

Ein weiterer Bereich, bei dem Umrißpunkte zum Einsatz kommen könnten, wäre die Bildorientierung. Es soll hier eine Auflistung der unterschiedlichen Bildorientierungsverfahren und eine grobe Abschätzung über den Einsatzbereich von Umrißpunkten dabei erfolgen:

- Einzelbildorientierung
Die Einzelbildorientierung erfolgt über Paßpunkte oder Paßlinien [Kraus, 1994] [Forkert, 1994]. Ein beobachteter Paßpunkt liefert zwei Beobachtungsgleichungen - je Bildkoordinate eine Beobachtungsgleichung. Ein beobachteter Punkt auf einer Paßlinie liefert hingegen nur eine Überbestimmung - den beiden Bedingungsgleichungen für die Bildkoordinaten steht der unbekannte Parameter des Punktes auf der Linie gegenüber. Ein Umrißpunkt würde ebenfalls bei gegebener Fläche eine Überbestimmung liefern. Eine Bildorientierung ausschließlich mit Umrißpunkten wird sicher versagen, wenn die Fläche eine oder mehrere Rotationsachsen besitzen würde. In allen anderen Fällen wäre eine Bildorientierung mit Umrißpunkten theoretisch möglich.
- Relative Orientierung
Die relative Orientierung von Photos erfolgt über Verknüpfungspunkte und Verknüpfungslinien. Eine „direkte“ relative Orientierung ausschließlich mit Umrißpunkten ist nicht möglich, da es sich bei beobachteten Umrißpunkten - in verschiedenen Bildern - um keine homologen Punkte handelt. Denn der wahre Umriß setzt sich aus unterschiedlichen Punkten - von jeder Blickrichtung aus betrachtet - zusammen. Jedoch wäre es möglich, die gegebene Fläche zu einem Photo relativ zu orientieren und anschließend die weiteren Photos relativ zur Fläche zu orientieren. Es ist zu beachten, daß ein beobachteter Umrißpunkt drei Beobachtungsgleichungen liefert und daß neben diesen Objektpunkten auch die Orientierung der Fläche bestimmt werden muß.
- Absolute Orientierung relativ orientierter Stereomodelle
Die absolute Orientierung relativ orientierter Modelle erfolgt über Paßpunkte und Paßlinien. Dabei ist der Einsatz von Umrißpunkten nicht möglich, da Umrißpunkte nur in Kombination mit Flächen möglich sind. Werden aber auch Paßflächen dazu verwendet, so liefern auch hier Umrißpunkte zusätzliche Informationen.
- Hybride Bündelblockausgleichung
Die hybride Bündelblockausgleichung bestimmt die Relative Orientierung und die Absolute Orientierung simultan. Hierbei gelten die gleichen Überlegungen wie bei den ersten drei Methoden.

Eine potentielle Anwendung wäre die Orientierung von Landschaftsphotos, bei denen von einem Standpunkt aus Konturen der Berge photographiert wurden. So könnte man die Orientierung von Photos mit Hilfe eines DHM der Landschaft berechnen [Finsterwalder, 1994].

10 Literaturverzeichnis

[Boehm, 1994] W. Böhm / Hartmut Prautzsch, „Geometric Concepts for Geometric Design“, A K Peters, Wellesley 1994.

[Brauner, 1989] H. Brauner / W. Kicking, „Baugeometrie, Band 1“, Geometrische Grundlagen, Parallelrisse, für das Bauwesen wichtige Kurven und Flächen, Bauverlag GmbH Wiesbaden und Berlin 1989.

[Bretterbauer, 1994] K. Bretterbauer, „Potentialtheorie“, Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Höhere Geodäsie der Technischen Universität Wien.

[Bretterbauer, 1995] K. Bretterbauer, „Tensorrechnung für Geodäten“, Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Höhere Geodäsie der Technischen Universität Wien 1995.

[Finsterwalder, 1994] R. Finsterwalder, „Der räumliche Rückwärtsschnitt nach Konturlinien des Geländes“, Schriftenreihe / Studiengang Vermessungswesen Univ. Bundeswehr, Heft 46. pp 79-83, Neubiberg 1994.

[Forkert, 1994] G. Forkert, „Die Lösung photogrammetrischer Orientierungs- und Rekonstruktionsaufgaben mittels allgemeiner kurvenförmiger Elemente“, Geowissenschaftliche Mitteilungen Heft 41, Hg. K. Kraus IPF Wien, Juli 1994.

[IPF, 1994] Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, „ORIENT, ein universelles photogrammetrisches Ausgleichungssystem“, Produktinformation 1994.

[IPF, 1996] Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Handbuch zum Ausgleichssystem ORIENT, 1997.

[IPF, 1997] Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, „Programmsystem SCOP zur Erstellung, Wartung und Anwendung digitaler Geländemodelle“, Produktinformation 1997.

[IPF, 1996] Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Handbuch zum Programm ORPHEUS, 2000.

[Kager, 1980] H. Kager, „Das interaktive Programmsystem ORIENT im Einsatz“, International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing XXIII/B5, Hamburg 1980.

[Kager, 1989] H. Kager, „Orient: A Universal Photogrammetric Adjustment System.“ in Optical 3-D Measurement Techniques Wichmannverlag, Karlsruhe 1989.

[Kager, 2000] H. Kager, „Adjustment of Algebraic Surfaces by Least Squared Distances“ XIX ISPRS, TP III-03-018, 2000

[Kraft, 1974] A. Kraft, „Mathematische Formelsammlung“, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1974.

[Kraus, 1994] K. Kraus, „Photogrammetrie, Band 1, Grundlagen und Standardverfahren“, Verlag Dümmler, 1994.

[Kraus, 1996] K. Kraus, „Photogrammetrie, Band 2, Verfeinerte Methoden und Anwendungen“, Verlag Dümmler, 1994.

[Kraus, 2000] K. Kraus, „Photogrammetrie, Band 3, Topographische Informationssysteme“, Verlag Dümmler, 2000.

[Kreyszig, 1979] E. Kreyszig, „Statistische Methoden und ihre Anwendungen“, 7. Auflage, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, 1979.

[Legenstein, 200] D. Legenstein, „Finding Colored Objects under Different Illumination Conditions for Robotic Applications“, SPIE, 2000, Boston

[Loria, 1910] G. Loria, „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven Theorie und Geschichte“, Verlag B. G. Teubner, 1910.

[Netz, 1992] H. Netz, „Formeln der Mathematik“, 7. Auflage, Verlag Hanser, 1992.

[Schouten, 1924] J. Schouten, „Der Ricci-Kalkül“, Springer, Berlin, 1924.

[Stadler, 1997] P. Stadler, „Klassenorientierte Formulierung des Mathematischen Modells von ORIENT“, Diplomarbeit 1997, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung.

[Wolf, 1996] H. Wolf, „Ausgleichsrechnung I“, Verlag Dümmler, 1996.

[Wunderlich, 1979] W. Wunderlich, „Zur Geometrie der Vogeleier“, Sitzungsbericht der Österreichischen Akademie der Wissenschaften Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 187. Bd., 1. bis 3. Heft, 1979, Springer-Verlag.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: DI Dietmar Legenstein
Anschrift: A-2551 Enzesfeld-Lindabrunn, Lindengasse 11, Österreich
Geburt: 12. Juni 1972 in Mödling
Familienstand: Geschieden, 2 Kinder
Staatsangeh.: Österreich

Bildungsweg

1978 – 1982 Volksschule in Enzesfeld
1982 – 1990 BRG Berndorf, realistischer Zweig
Juni 1990 Matura
1990 – 1991 Präsenzdienst beim Österreichischen Bundesheer
Oktober 1991 Inskription des Studiums „*Vermessungswesen*“ an der Technischen Universität Wien, Schwerpunkt „*Höhere Geodäsie*“ und „*Photogrammetrie*“
Juni 1993 Ablegung der ersten Diplomprüfung mit Auszeichnung
1996/1997 Diplomarbeit zum Thema: „*Bildorientierung und Objektrekonstruktion mit Hilfe von Punkten auf Umrißlinien*“
Juni 1997 Ablegung der zweiten Diplomprüfung mit Auszeichnung
Seit Okt. 1997 Doktoratstudium der Technischen Wissenschaften, Vermessungswesen

Bisherige berufliche Praxis

Frühjahr 1991 ARGE Vermessungsbüro Baden, NÖ
Sommer 1992 ARGE Vermessungsbüro Baden, NÖ
1994-1997 Tutor sowie Projektmitarbeit am Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung (IPF), TU Wien
Seit Juli 1998 Forschungsassistent für das Projekt Portime II (FWF-Projekt) am Institut für Flexible Automation (INFA), TU Wien
Oktober 2000 Einmonatiger Forschungsaufenthalt an der Abteilung „Faculty of Computer and Information Science“, Universität Ljubljana, Slowenien

Bisherige Publikationen und Vorträge

- Juni 2000 „*Unterschiedliche Methoden zur Kalibrierung von Kamerasystemen*“, Vortrag am Institut für Biomedizinische Technik und Physik, AKH Wien
- Juli 2000 “*Image Orientation and Object Reconstruction via Points on Contours*”, presented paper, ISPRS ‘00 XIX, Amsterdam
- November 2000 „*Finding Colored Objects under Different Illumination Conditions for Robotic Applications*“, SPIE ,00, Boston

Als Koautor mit M. Zillich:

- Juli 2000 „*Robust Object Tracking for Robot Manipulation and Navigation*“, ISPRS ‘00 XIX, Amsterdam

GEOWISSENSCHAFTLICHE MITTEILUNGEN

Bisher erschienen:

- Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen. 1970-1973, Dezember 1976.
- Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendungen im Vermessungswesen. 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.
- Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen. 1973-1974, September 1974.
- Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Tektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.
- Heft 5 K. LEDERSTEGE, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.
- Heft 6 F. REINHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von +30 bis +60, Oktober 1975.
- Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.
- Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.
- Heft 9 W. PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.
- Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik Wien, Mai 1976.
- Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen. 1974-1976, November 1976.
- Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1976.
- Heft 13 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.
- Heft 14 L. MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.
- Heft 15 Veröffentlichungen des Instituts für Landesvermessung anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Bavir, Wien, Januar 1979.
- Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen. 1976-1978, November 1979.
- Heft 17 E. VOZIKIS, Die photographische Differentialumbildung gekrümmter Flächen mit Beispielen aus der Architekturbildmessung, Wien, Dezember 1979.
- Heft 18 Veröffentlichungen des Instituts für allgemeine Geodäsie anlässlich des 75. Geburtstages von Prof. Dipl.-Ing. Dr. F. Hauer, Die Höhe des Großglockners, Wien, 1981.

- Heft 19 H. KAGER, Bündeltriangulation mit indirekt beobachteten Kreiszentren, Wien, April 1981.
- Heft 20 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1980, Wien, Mai 1982.
- Heft 21 Veröffentlichungen des Instituts für Kartographie anlässlich des 70. Geburtstages von Prof. Dr. Wolfgang Pillewizer: Glaziologie und Kartographie, Wien, Dezember 1982.
- Heft 22 K. TEMPFLI, Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle mittels Spektralanalyse, Wien, Mai 1982.
- Heft 23 E. CSAPLOVICS, Interpretation von Farbinfrarotbildern, Wien, November 1982.
- Heft 24 J. JANSKA, Rektifizierung von Multispektral-Scanneraufnahmen - Entwicklung und Erprobung eines EDV-Programms, Wien, Mai 1983.
- Heft 25 Zusammenfassung der Diplomarbeiten, Dissertationen und Habilitationen an den geodätischen Instituten der TU Wien, Wien, November 1984.
- Heft 26 T. WUNDERLICH, Die voraussetzungsfreie Bestimmung von Refraktionswinkeln, Wien, August 1985.
- Heft 27 G. GERSTBACH (Hrsg.), Geowissenschaftliche/geotechnische Daten in Landinformationssystemen - Bedarf und Möglichkeiten in Österreich, Juni 1986.
- Heft 28 K. NOVAK, Orientierung von Amateuraufnahmen ohne Paßpunkte, Wien, August 1986.
- Heft 29 Veröffentlichungen des Instituts für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abt. Ingenieurgeodäsie, anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dipl.-Ing. Dr. F. Hauer, Wien, Oktober 1986.
- Heft 30 K.-H. ROCH, Über die Bedeutung dynamisch ermittelter Parameter für die Bestimmung von Gesteins- und Gebirgseigenschaften, Wien, Februar 1987.
- Heft 31 G. HE, Bildverbesserung mittels digitaler Filterung, Wien, April 1989.
- Heft 32 F. SCHLÖGELHOFER, Qualitäts- und Wirtschaftlichkeitsmodelle für die Ingenieurphotogrammetrie, Wien, April 1989.
- Heft 33 G. GERSTBACH (Hrsg.), Geowissenschaftliche/geotechnische Daten in Landinformationssystemen - Datenbestände und Datenaustausch in Österreich, Wien, Juni 1989.
- Heft 34 F. HOCHSTÖGER, Ein Beitrag zur Anwendung und Visualisierung digitaler Geländemodelle, Wien, Dezember 1989.
- Heft 35 R. WEBER, Lokale Schwerfeldmodellierung unter Berücksichtigung spektraler Methoden zur Geländereduktion, Wien, April 1990.
- Heft 36 o. Prof. Dr. Hans Schmid zum 70. Geburtstag. Veröffentlichung der Abteilung für Landesvermessung, Wien, Oktober 1990.
- Heft 37 G. GERSTBACH, H. P. HÖLLRIEGL und R. WEBER, Geowissenschaftliche Informationsbörse - Eine Nachlese zur GeoLIS II, Wien, Oktober 1990.
- Heft 38 R. ECKER, Rastergraphische Visualisierungen mittels digitaler Geländemodelle, Wien, August 1991.

- Heft 39 Kartographische Forschungen und anwendungsorientierte Entwicklungen, herausgegeben von W. Stams und F. Kelnhofer zum 80. Geburtstag von Prof. Dr. W. Pillewizer, Wien, Juli 1991.
- Heft 39a W. RIEGER, Hydrologische Anwendungen des digitalen Geländemodelles, Wien, Juli 1992.
- Heft 40 K. STEINNOCHER, Methodische Erweiterungen der Landnutzungsklassifikation und Implementierung auf einem Transputernetzwerk, Wien, Juli 1994.
- Heft 41 G. FORKERT, Die Lösung photogrammetrischer Orientierungs- und Rekonstruktionsaufgaben mittels allgemeiner kurvenförmiger Elemente, Wien, Juli 1994.
- Heft 42 M. SCHÖNER, W. SCHÖNER, Photogrammetrische und glaziologische Untersuchungen am Gsbre (Ergebnisse der Spitzbergenexpedition 1991), Wien, Mai 1996.
- Heft 43 M. ROIC, Erfassung von nicht signalisierten 3D-Strukturen mit Videotheodoliten, Wien, April 1996.
- Heft 44 G. RETSCHER, 3D-Gleiserfassung mit einem Multisensorsystem und linearen Filterverfahren, Wien, April 1996.
- Heft 45 W. DAXINGER, Astrogravimetrische Geoidbestimmung für Ingenieurprojekte, Wien, Juli 1996.
- Heft 46 M. PLONER, CCD-Astrometrie von Objekten des geostationären Ringes, Wien, November 1996.
- Heft 47 Zum Gedenken an Karl Killian „Ingenieur“ und „Geodät“ 1903-1991, Veröffentlichung der Fachgruppe Geowissenschaften, Wien, Februar 1997.
- Heft 48 A. SINDHUBER, Ergänzung und Fortführung eines digitalen Landschaftsmodelles mit multispektralen und hochauflösenden Fernerkundungsaufnahmen, Wien, Mai 1998.
- Heft 49 W. WAGNER, Soil Moisture Retrieval from ERS Scatterometer Data, Wien, Dezember 1998.
- Heft 50 R. WEBER, E. FRAGNER (Editoren), Prof. Bretterbauer, Festschrift zum 70. Geburtstag, Wien, Juli 1999.
- Heft 51 Ch. ÖHRENER, A Similarity Measure for Global Image Matching Based on the Forward Modeling Principle, Wien, April 1999.
- Heft 52 M. LECHTHALER, G. GARTNER (Hrsg.), Per Aspera ad Astra, Festschrift für Fritz Kelnhofer zum 60. Geburtstag, Wien, Jänner 2000.
- Heft 53 F. KELNHOFER, M. LECHTHALER (Hrsg.), Interaktive Karten (Atlanten) und Multimedia-Applikationen, Wien, März 2000.
- Heft 54 A. MISCHKE, Entwicklung eines Videotheodolit-Meßsystems zur automatischen Richtungsmessung von nicht signalisierten Objektpunkten, Wien, Dezember 2000.
- Heft 55 Veröffentlichung des I.P.F. anlässlich der Emeritierung von Prof. Dr. Peter Waldhäusl, Wien, in Vorbereitung.
- Heft 56 F. ROTTENSTEINER, Semi-automatic Extraction of Buildings Based on Hybrid Adjustment Using 3D Surface Models and Management of Building Data in a TIS, Wien, Juni 2001.