

Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

**GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN**

Heft 26

Die voraussetzungsfreie Bestimmung von Refraktionswinkeln

von
T. WUNDERLICH

Veröffentlichung des Institutes für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie
Abt. Ingenieurgeodäsie

Geowiss. Mitt.
26, 1985

Wien, im August 1985

Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

**GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN**

Heft 26

Die voraussetzungsfreie Bestimmung von Refraktionswinkeln

von

T. WUNDERLICH

Veröffentlichung des Institutes für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie
Abt. Ingenieurgeodäsie

Geowiss. Mitt.
26, 1985

Wien, im August 1985

Herausgeber und Verleger: ao. Univ. Prof. Dipl. -Ing. Dr. techn. K. Peters
Vorstand des Institutes für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie
der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29

Für den Inhalt verantwortlich: Univ. Ass. Dipl. -Ing. Dr. techn. T. Wunderlich

Die Kosten für den Druck wurden aus der ordentlichen Dotation des
Institutes für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie der TU Wien
getragen.

Einband: Fa. F. Manhardt, Wien

Druck: ÖHTUW - Vervielfältigung, Wien

Auflage: 300 Stück

VORWORT

Diese Arbeit ist in den Jahren 1980 - 1983 am Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik (Abt. Theoretische Geodäsie) der TU Wien auf Anregung von Herrn o. Univ. Prof. Dr. K. Bretterbauer entstanden und im Mai 1983 als Dissertation approbiert worden. Als Veröffentlichung des Institutes für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie (Abt. Ingenieurgeodäsie), dem der Autor seit 1976 angehört, soll sie nun im Rahmen der Reihe "Geowissenschaftliche Mitteilungen" einer breiteren Leserschaft zugänglich gemacht werden. *)

Für die wertvollen Diskussionen, die Beschaffung finanzieller Mittel und die Begutachtung schulde ich o. Univ. Prof. Dr. K. Bretterbauer und Prof. Dr. G. Brandstätter großen Dank.

Zu besonderem Dank bin ich all jenen verpflichtet, die mit kameradschaftlicher Vorbildlichkeit und geodätischer Verlässlichkeit bei den Beobachtungen im vertikalen Viereck *H o h e W a n d* mitgewirkt haben. Namentlich möchte ich die Herren Dipl. -Ing. J. Rosenthaler, cand. ing. P. Stix und W. Schrutka meines Dankes versichern, sowie auch Herrn Dipl. -Ing. E. Flicker für die Zurverfügungstellung von Matrizenoperationsprogrammen auf der Philips P 2000.

*) Genehmigung zur Veröffentlichung der Dissertation von der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der TU Wien am 29. 11. 1984 erteilt.

KURZFASSUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es, ein Verfahren zu finden, das es erlaubt, die Beträge von Refraktionswinkeln genau und ohne Zuhilfenahme von Modellvorstellungen oder Hypothesen anzugeben. Nach einer kurzen Darstellung der Problematik geodätischer Höhenbestimmungen, speziell jener der trigonometrischen Höhenbestimmungen aus Raumstrecken und Zenitdistanzen, wird auf das physikalische Phänomen "Refraktion" ausführlich eingegangen.

Die wichtigsten bestehenden Methoden zur Erfassung der Vertikalrefraktion werden gemeinsam mit den Verfahren zur Minimierung der Refraktionsfehlereinflüsse besprochen und vor allem unter den Gesichtspunkten der Anwendbarkeit und der Genauigkeit beleuchtet. Der anschließende Hauptteil der Arbeit stellt die "Methode des vertikalen Vierecks" vor, eine folgerichtige Weiterentwicklung der "vertikalen Dreiecke" von Sanchez (1962, 1967).

Durch die vollständige Ausmessung eines solchen vertikalen Diagonalvierecks (elektronische Distanzen, Zenitdistanzen) und einige zusätzliche Messungen (Lotabweichungsbestimmungen, Präzisionsnivelement) ist es möglich, aus rein geometrischen Bedingungen die Refraktionswinkel in der Meßanordnung voraussetzungsfrei zu bestimmen. Das Verfahren ist nur für große Höhenunterschiede (mehrere 100 m) anwendbar und unterliegt enorm hohen Anforderungen an die Distanzmeßgenauigkeit ($\frac{m_d}{d} \leq 1 \cdot 10^{-6}$). Zum Vorteil gereichen der Methode die Beschränkung auf gewohntes geodätisches Instrumentarium, die einfache Berechnungsweise und die angeschlossene strenge Fehlertheorie. Jedem berechneten Refraktionswinkel kann sein mittlerer Fehler zugeordnet werden, der sich aus den mittleren Fehlern der Messungsgrößen nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Beobachtungen berechnet.

Die Brauchbarkeit der Methode wird anhand ausgedehnter Meßreihen in einem eigenen Testnetz in der Nähe Wiens unter Beweis gestellt (vertikales Viereck Hohe Wand). Mit beträchtlichem zeitlichen, instrumentellen und personellen Aufwand konnten die geforderten hohen Meßgenauigkeiten erreicht werden. Im Schnitt lag die Genauigkeit der berechneten Refraktionswinkel bei $\pm 3^{\text{cc}}$. Bei den abgeleiteten großen Höhenunterschieden (bis zu 480 m) blieben die mittleren Fehler durchwegs unter 1 cm. Da die Zenitdistanzen über 24 Stunden beobachtet wurden, konnten Tagesgänge der Refraktionswinkel angegeben und bemerkenswerte Refraktionsanomalien aufgedeckt werden.

Als Anwendung für die Methode bietet sich vor allem die Verwendung der absoluten Refraktionswinkel als Vergleichswerte für Refraktionswinkel aus meteorologischen Modellen an. Gerade bei großen Höhenunterschieden ist ja die übliche Kontrolle durch Nivellements undurchführbar. Eine weitere, den hohen Aufwand der Methode rechtfertigende, Einsatzmöglichkeit, ist der hochgenaue Zusammenschluß von Talnivellements mit flächenhaften Gipfelnetzen in den Alpen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die mit derzeit gängigen Präzisionsdistanzmeßgeräten (Tellurometer MA100, Mekometer ME3000) nur mühsam einzuhaltenden Fehlergrenzen für die Distanzen in Zukunft ohne Schwierigkeit unterschritten werden können, sobald das - in Amerika bereits in Einsatz stehende - Dispersionsdistanzmeßgerät Terrameter auch bei uns zur Verfügung steht ($\frac{m_d}{d} \leq 1 \cdot 10^{-7}$). Geräte zur Erfassung der Vertikalrefraktion auf Dispersionsbasis sind weltweit leider noch immer nicht über das Laborstadium hinausgekommen, was aber umgekehrt dem hier dargelegten Verfahren seine Berechtigung gibt.

ABSTRACT

This thesis describes the "Vertical Quadrangle Method" that has been developed in consequence of the "Vertical Triangle" of Sanchez. After preliminary determination of all spatial and zenith distances in the vertical quadrilateral (completed by its diagonals) with additional measurements of vertical deflections and precise levelling, the refraction angles can be derived from geometrical parameters exclusively. The method can only be applied in major differences of elevation (several 100 meters) and it claims extreme precision in the measurement of the spatial distances ($m_d/d \cong 1 \cdot 10^{-6}$). The advantages of the method are that it requires none but the usual geodetic equipment and a simple mode of calculation including a rigorous theory of errors. The mean square error allotted to each refraction angle calculated, is derived from the mean square errors of the measured parameters according to the law of propagation of errors in correlated observations.

The efficiency of the method has been proved by means of extensive series of measurements in a special testnetwork near Vienna (vertical quadrangle "Hohe Wand"). The required high standard of accuracy could be obtained with considerable dedication of time, instruments and personal efforts. The mean accuracy of the calculated angles of refraction was $\pm 3''$. The mean square errors of the deducted large differences of elevation were less than 1 cm. As the zenith distances have been observed over 24 hours, fluctuations of the refraction angles during the day could be assessed and remarkable anomalies of refraction were detected.

In particular the method may be applied to provide absolute refraction angles as a basis of comparison with refraction angles from meteorological models as especially in major differences of altitude the usual control by means of levelling is impracticable. The highly accurate linking of levelling lines in valleys with the vertical control network of mountain peaks is a further application of the method that justifies its expenditure.

INHALTSVERZEICHNIS		Seite
1.	Problematik geodätischer Höhenbestimmungen	4
1.1	Höhenbezug	4
1.2	Atmosphärische Strahlenbrechung	13
2.	Trigonometrische Höhenbestimmung aus Raumstrecken und Zenitdistanzen	15
2.1	Theoretische Grundlagen	16
2.1.1	Die Reduktion der gemessenen Zenitdistanz auf den ellipsoidischen Zenit	16
2.1.2	Die Berechnung ellipsoidischer Höhenunterschiede	20
2.1.2.1	Grundformel für einseitige Zenitdistanz	20
2.1.2.2	Der Krümmungsradius R_{α}	24
2.1.2.3	Fehlerbetrachtungen zu 2.1.2.1	25
2.1.2.4	Die Zentrierung der Meßdaten auf die Bodenpunkte	27
2.1.2.5	Fehlerformel für den ellipsoidischen Höhenunterschied nach 2.1.2.1	34
2.1.2.6	Abschätzung für $m_{\Delta h}$	35
3.	Refraktion	36
3.1	Das physikalische Phänomen	36
3.2	Die Erfassung der Refraktion	41
3.2.1	Mittlere Refraktionskoeffizienten	41
3.2.2	Die Abhängigkeit der Refraktion vom momentanen Zustand der Atmosphäre	44
3.2.2.1	Atmosphärische Schichtung	45
3.2.2.2	Die physikalischen Bedingungen für einen kreisbogenförmigen Verlauf der Visur	49
3.2.3	Meteorologische Modelle	52
3.2.4	Refraktionskoeffizienten aus Überbestimmungen	58
3.2.5	Die direkte Bestimmung des Refraktionswinkels mit Hilfe der Dispersion	60
3.2.6	Spezielle Meßanordnungen zur Verringerung, Ausschaltung oder Bestimmung des Refraktionsinflusses	63
3.2.6.1	Gegenseitig und gleichzeitig gemessene Zenitdistanzen	63
3.2.6.2	Höhenbestimmung aus gemessenen Distanzen	65
3.2.6.3	Verfahren von Malkovskij	69

3. 2. 6. 4	Das vertikale Dreieck (Methode von Sanchez)	71
3. 2. 6. 4. 1	Die Abweichung des vertikalen Dreiecks von einer Vertikalebene	78
3. 2. 6. 4. 2	Die vorauszusetzende Genauigkeit der Schrägdistanzen	81
3. 2. 6. 4. 3	Genauigkeitsanforderungen für die Zenitdistanzen	85
3. 2. 6. 4. 4	Die Bestimmung der natürlichen Lotrichtungen	85
3. 2. 6. 4. 4. 1	Der Winkel zwischen Normalschnitts- und Gegennormalschnittsebene	87
3. 2. 6. 4. 4. 2	Die Auswirkung der Windschiefe der Lote auf die Berechnung des Zentriwinkels	90
3. 2. 6. 4. 5	Die vertikalen Dreiecke von Tolombon und Alpachiri	92
3. 2. 6. 4. 6	Das vertikale Dreieck "Hohe Wand"	94
4.	Das vertikale Viereck	99
4. 1	Das vertikale Viereck als Meßanordnung zur voraussetzungsfreien Ermittlung von Refraktionswinkeln	100
4. 1. 1	Bedingter Ausgleich des vertikalen Distanznetzes	100
4. 1. 2	Die Bestimmung der refraktionsfreien ellipsoidischen Zenitdistanz z_{14}	103
4. 1. 3	Die Bestimmungsgleichungen für die zwölf Refraktionswinkel im vertikalen Viereck	105
4. 1. 3. 1	Die mittleren Fehler der zwölf Refraktionswinkel im vertikalen Viereck	108
4. 1. 3. 2	Aufstellung der Koeffizientenmatrix A_g	109
4. 1. 4	Die Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede	114
4. 2	Das vertikale Viereck als Methode zur refraktionsunbeeinflußten Ermittlung großer Höhenunterschiede	115
4. 2. 1	Die mittleren Fehler der ellipsoidischen Höhenunterschiede	117
4. 2. 2	Die Gewinnung der Nivellementhöhenunterschiede	122
4. 3	Die vorauszusetzenden Genauigkeiten der Meßgrößen	123
4. 4	Erprobung des Verfahrens	124
4. 4. 1	Beschreibung der Meßpunkte	126
4. 4. 2	Beschreibung der Visuren	127
4. 4. 3	Die Messungen	131
4. 4. 3. 1	Distanzmessungen	131
4. 4. 3. 2	Zenitdistanzmessungen	140
4. 4. 3. 3	Die meteorologischen Beobachtungen	143
4. 4. 3. 4	Die astronomischen Messungen	155
4. 4. 3. 5	Die Präzisionsnivellements	158

4.4.4	Berechnung	159
4.4.4.1	Distanzmittel	159
4.4.4.2	Bedingter Ausgleich des vertikalen Distanznetzes	163
4.4.4.3	Berechnung der Winkel α im Diagonalviereck	165
4.4.4.4	Die Berechnung der Zentriwinkel δ^*	165
4.4.4.5	Die Lotabweichungskomponenten $\varepsilon_i^{i,k}$ im Azimut A^* des vertikalen Vierecks	166
4.4.4.6	Die Differenzen ΔN_{ik}^i der Niveauflächenundulationen im vertikalen Viereck	166
4.4.4.7	Die Refraktionswinkel im vertikalen Viereck "Hohe Wand" während der 24-Stunden Zenitdistanzmessung 1981-11-04/05	167
4.4.4.8	Die ellipsoidischen Höhenunterschiede im vertikalen Viereck "Hohe Wand"	179
4.4.4.9	Die nivellitschen Höhenunterschiede im vertikalen Viereck "Hohe Wand"	181
4.5	Zusammenfassung und Ausblick	183
	Anhang	185
	Literaturverzeichnis	189

1. PROBLEMATIK GEODÄTISCHER HÖHENBESTIMMUNGEN

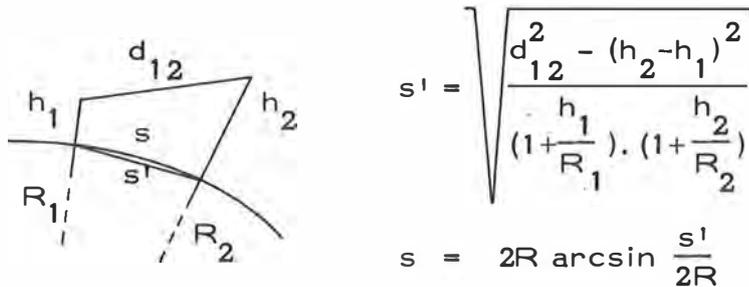
Die grundsätzliche Schwierigkeit der Höhenbestimmung liegt darin begründet, daß dabei nicht ein rein geometrisches Problem vorliegt, sondern ein geometrisch-physikalisches, und dies in zweierlei Hinsicht:

- 1^o durch den Höhenbezug
- 2^o durch die atmosphärische Strahlenbrechung

1.1. HÖHENBEZUG

Eine mathematisch geschlossen darstellbare, geometrisch bekannte Bezugsfläche für die Höhenmessung wäre ein bestimmtes Referenzellipsoid. Die in der jeweiligen Ellipsoidnormalen gezählten, geradlinigen Abstände h von diesem Ellipsoid (Abbildung 1) haben als ellipsoidische Höhen Bedeutung zur fehlerfreien Reduktion von gemessenen Distanzen bei Aufgaben der Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie.

Abb. 1



$$s' = \sqrt{\frac{d_{12}^2 - (h_2 - h_1)^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_2}{R_2}\right)}}$$
$$s = 2R \arcsin \frac{s'}{2R}$$

Unsere an der Erdoberfläche angestellten Messungen beziehen sich aber auf ein anderes System, nämlich auf das Schwerkraftfeld der Erde, weil wir unsere Meßinstrumente nach der Lotrichtung, d. h. nach der Richtung der Schwerkraft orientieren. So stellen wir z. B. die Zielachse eines Nivelliers senkrecht zur Schwerkraftrichtung oder die Stehachse eines Theodolits in die Schwerkraftrichtung.

Das Bezugssystem unserer Messungen ist demnach das System der Lotlinien der Erde. Dabei versteht man unter Lotlinie diejenige Linie, die sich ergibt, wenn man, von einem beliebigen Punkt ausgehend, stets in Richtung der Schwerkraft weiterschreitet. Dieses System der Lotlinien ergänzen wir nun durch das System der Niveaulflächen W , die überall senkrecht zu den Lotlinien stehen (Abb. 2).

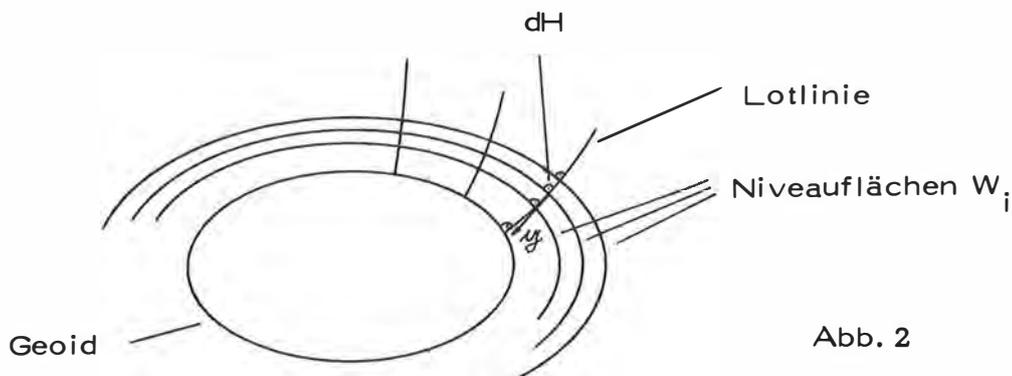


Abb. 2

Aus der unendlichen Schar der Niveaulflächen greift nun Gauß diejenige heraus, die mit der mittleren Meeresoberfläche annähernd zusammenfällt. Diese spezielle Niveaulfläche wird nach Listing als Geoid bezeichnet und dient als natürliche Bezugsfläche für die Höhenbestimmung. Vom Geoid entlang der gekrümmten Lotlinie gezählte Abstände H heißen Meereshöhen oder orthometrische Höhen.

Wird auf einer Niveaulfläche $W = \text{const.}$ eine Masse reibungslos verschoben, so muß dazu keine Arbeit geleistet werden, da die Bewegung stets senkrecht zur Richtung der Schwerkraft erfolgt. Bringt man eine Masse von einer Niveaulfläche auf eine andere so muß dazu eine bestimmte Arbeit geleistet werden bzw. wird eine bestimmte Arbeit frei, die nach dem Energiesatz unabhängig vom Weg sein muß. Die Niveaulflächen sind demnach Flächen gleichen Arbeitswertes oder Potentials und werden deshalb auch als Äquipotentialflächen bezeichnet.

Wenn wir den differentiellen Richtungsvektor der Tangente an die Lotlinie in einem Punkt P in Richtung zunehmender Meereshöhe H $d\varphi$ nennen, so wird seine Länge

$$|d\varphi| = dH$$

und seine Richtung entgegengesetzt der des Schwerkraftvektors y sein, der abwärts weist. Weil das Skalarprodukt

$$y \cdot d\varphi = g \cdot dH \cdot \cos(y, d\varphi) = g \cdot dH \cdot \cos 180^\circ = -g \cdot dH$$

ist, und y der Gradient des Potentials $W(x, y, z)$ ist, wird die differentielle Änderung des Potentials

$$dW = \text{grad}W \cdot d\varphi = y \cdot d\varphi$$

und es ergibt sich endgültig:

$$\boxed{dW = -g \cdot dH} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{W_2 - W_1 = - \int_1^2 g dH}$$

Diese fundamentale Beziehung stellt den Zusammenhang zwischen der geometrischen Größe "Höhe" und dem physikalischen Begriff "Potential" her und zeigt damit deutlich die am Beginn dieses Abschnitts angesprochene Problematik der Höhenbestimmung. Bedenkt man nämlich, daß die Schwerebeschleunigung g auf einer Niveaufläche nicht konstant ist, so wird klar, daß die Niveauflächen keine Parallelf lächen sind:

$$\left. \begin{array}{l} dW = \text{const.} \\ g \neq \text{const.} \end{array} \right\} \Rightarrow dH \neq \text{const.}$$

Durch die systematische Zunahme von g mit der geographischen Breite konvergieren die Niveauflächen zu den Polen, durch Massenunregelmäßigkeiten und Dichtesprünge erleiden sie zusätzliche lokale Verformungen.

Das bedeutet, daß die Äquipotentialflächen und speziell das Geoid als Äquipotentialfläche in der Höhe 0 keine analytischen – also mathematisch geschlossen darstellbaren – Flächen sind. Das Geoid, die Bezugsfläche für die Meereshöhen, ist demnach nicht nur unzugänglich, sondern auch in seiner Form zur Zeit nur sehr grob bekannt, da es sich nur in kleinen Stücken näherungsweise analytisch darstellen läßt.

Ein weiteres Problem für die Höhenfestlegung ergibt sich aus der bereits angesprochenen Nichtparallelität der Niveauflächen. Am stärksten betroffen wird davon die im allgemeinen genaueste Methode der Höhenbestimmung, das Nivellement. Es läßt sich nämlich aus der Nichtparallelität folgern, daß das unmittelbare Ergebnis eines geometrischen Nivellements vom gewählten Weg abhängig ist. Das kann man sich an Abb. 3 sehr leicht plausibel machen (Helmert 1880).

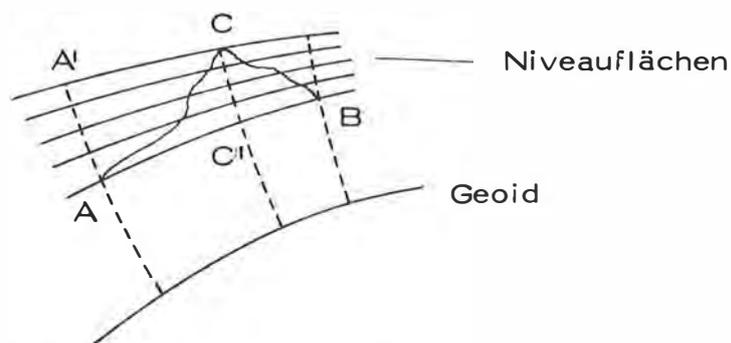


Abb. 3

Die Erhebung von C über der Niveaufläche von A wird ungleich der Senkung von A unter der Niveaufläche von C sein: $AA' \neq CC'$.

Ein Nivellement zwischen A und C gibt in der Regel weder den einen noch den anderen Betrag. Indem das Nivellement die Bergeshöhe allmählich ersteigt, wird mittels eingeschalteter Niveauflächen der Abstand der Niveauflächen von A und C weder in der einen noch in der anderen Lotlinie gemessen. Es entsteht ein treppenförmiges Profil, mit dessen Gestalt sich auch das Resultat des Nivellements ändert.

(z. B. : $\text{Niv AC} \neq \text{Niv AB (durch Tunnel)} + \text{Niv BC}$)

Der tragische Umstand der Wegabhängigkeit von Nivellements hat zu einer Unzahl von Höhendefinitionen geführt (Viñal, Helmert, Niethammer, Ramsayer, Ledersteger), von denen hier aber nur auf zwei besonders wichtige eingegangen werden soll.

Grundsätzlich lassen sich vom Profil bzw. Weg unabhängige Resultate nur erzielen, wenn man die Nivellements unter Zuhilfenahme von Schweremessungen dazu benutzt, Potentialdifferenzen abzuleiten:

$$W_C - W_A = - \int_A^C g \cdot dH$$

Wählen wir nun den einen Punkt auf dem Geoid (W_0), so erhalten wir sogenannte geopotentielle Koten C:

$$C = - (W_C - W_0) = \int_0^C g \cdot dH$$

Die geopotentiellen Koten haben die Dimension von Potentialen und sind für alle Punkte einer Niveaufläche gleich. Die (Nicht SI-) Maßeinheit ist die geopotentielle Einheit (1g.p.u. = 1000gal m). Seit 1954 werden die geopotentiellen Koten für das europäische Nivellementnetz verwendet. Zur Verwandlung von Potentialdifferenzen in Höhen bzw. Höhendifferenzen hat Helmert (1880) zwei Methoden vorgeschlagen.

Wenn man die geopotentiellen Koten C durch einen Mittelwert der Schwerkraft (z. B. durch die Normalschwere in der Meereshöhe 0 und 45° Breite) dividiert, so ergeben sich die sogenannten "dynamischen Höhen":

$$H_{\text{dyn}} = \frac{C}{\gamma_{45}}$$

Diese dynamischen Höhen sind zwar potentialtheoretisch einwandfrei, denn sie ordnen allen Punkten einer Niveaufläche die gleiche Höhenkote zu, die Korrekturen an die rohen Nivellementergebnisse nehmen aber so große Beträge an (im Maximum 2,5 m auf 1000 m Höhenunterschied^{*)}), daß diese Höhen zum praktischen Gebrauch ungeeignet sind. Bedeutung erlangen sie immer dann, wenn "Arbeit" gemessen werden soll, also etwa bei der Planung von Druck- bzw. Verbindungsstollen für Wasserkraftwerke.

Der zweite von Helmert vorgeschlagene Weg ist die Ermittlung der schon eingangs beschriebenen orthometrischen Höhen oder Meereshöhen H , die unserer Höhenvorstellung am ehesten entsprechen. Auch diese Höhen lassen sich aus den geopotentiellen Koten ableiten:

$$C = \int g \cdot dH = H \cdot \frac{1}{H} \int g \cdot dH = H \cdot \bar{g}$$

\bar{g} = Mittelwert der Schwere entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Punkt.

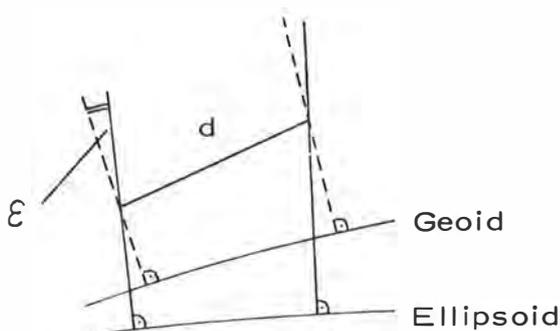
$$H_{\text{orthom}} = H = \frac{C}{\bar{g}}$$

Da \bar{g} im Erdinneren auftritt, kann es nicht gemessen, sondern nur durch Reduktion des Meßwertes g an der Erdoberfläche berechnet werden. Je nachdem, ob bei der Rechnung nur die Bouguer-Reduktion oder auch die topographische Reduktion angebracht wird, erhält man orthometrische Höhen nach Helmert oder Niehammer. Eine weitere, wie Ledersberger (1955) nachweisen konnte, auch im Gebirge genügend genaue Methode ist die von Mader (1954) vorgeschlagene Ermittlung von \bar{g} aus dem Mittel von g und der nach Poincaré - Prey berechneten Schwere g_0 im zugehörigen Geoidpunkt.

*) Anm.: g ändert sich vom Äquator zum Pol um 5 gal; DynKorr = $\int \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \Delta H$

Entscheidend ist aber, daß \bar{g} immer mit der Unsicherheit der Dichteannahme im Untergrund behaftet ist, also nicht hypothesenfrei ermittelt werden kann. Moritz (1967) gibt an, daß für einen maximal zu erwartenden Dichtefehler von $0,6 \text{ g/cm}^3$ der Fehler auf 1000 m Höhenunterschied 25 mm ausmacht. Trotz dieses relativ geringen Betrages werden nur in seltenen Ausnahmefällen Nivellements orthometrisch korrigiert, offenbar wegen des großen zusätzlichen Meß- und Rechenaufwandes. Die Höhen der staatlichen Nivellementfestpunkte (Gebrauchshöhen) geben daher nicht den Abstand zum Geoid an, sondern enthalten nur eine behelfsmäßige "sphäroidische Korrektur", bei der anstatt der tatsächlich gemessenen Schwerewerte g die nach der internationalen Schwereformel und dem theoretischen Freiluftgradienten errechneten Normalschwerewerte γ verwendet werden. Aber auch exakt ermittelte orthometrische Höhen oder Höhenunterschiede weisen einen Mangel auf. Die orthometrische Theorie ordnet nämlich Punkten auf einer Niveaufläche, zwischen denen potentialtheoretisch kein Wasser fließen kann, verschiedene Höhenkoten zu!

Ebenso wie das geometrische Nivellement ist auch die trigonometrische Höhenbestimmung von der Wirkung des indischen Schwerfeldes betroffen, beziehen sich doch die mit einem Theodolit gemessenen Zenitdistanzen auf die Richtung der natürlichen Lotlinie. Diese weicht im allgemeinen von der Richtung der Ellipsoidnormalen um einen kleinen Winkel ε ab.



$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

Abb. 4

Dieser Winkel ξ kann aber aus den astronomisch bestimmbaren Lotabweichungskomponenten ξ, η einfach berechnet und an die gemessene Zenitdistanz angebracht werden. Ein aus einer solchermaßen verbesserten Zenitdistanz und der gemessenen Schrägentfernung ermittelter Höhenunterschied ist dann ein ellipsoidischer.

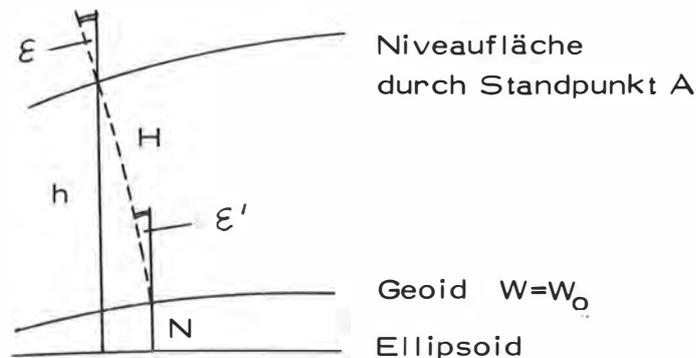
Nivellement und trigonometrische Höhenbestimmung beziehen sich also auf verschiedene Bezugsflächen, ersteres auf das Geoid, letztere auf das Ellipsoid.

Der Zusammenhang zwischen Meereshöhe H und ellipsoidischer Höhe h ist über den jeweiligen Abstand der beiden Bezugsflächen, die Geoidundulation N , gegeben ^{*)}.

$$h = H + N \quad (1, 1)$$

Nach Pizzetti:

Abb. 5



Die Änderung der Geoidundulation dN entlang des Wegelementes ds im Azimut der Visur wird mit der Lotabweichung ξ' am Geoid ausgedrückt zu:

$$dN = -\xi' ds$$

ξ' unterscheidet sich von der an der Erdoberfläche aus Messungen bestimmbaren Lotabweichung ξ um den Betrag der Lotkrümmung $(\xi - \xi')$.

$$dN = -\xi ds + (\xi - \xi') ds$$

*) Anm.: Die Geoidundulationen sind abhängig vom gewählten Referenzellipsoid (geod. Datum) und erreichen in bezug auf das mittlere Erdellipsoid Beträge von ± 70 m.

Durch Integration der Lotabweichungen entlang des Weges s :

$$\Delta N = - \int_0^s \xi \, ds + \int_0^s (\xi - \xi') \, ds = - \int_0^s \xi \, ds - E_0^s$$

Das Korrekturglied E wegen Lotkrümmung ist mit unbedeutenden Vernachlässigungen identisch mit dem orthometrischen Korrekturglied O beim Nivellement (Helmert, 1880)

$$\Delta H = \Delta H_{\text{Niv}} + O \qquad O = E$$

Damit läßt sich jetzt das Theorem von Villarceau anschreiben:

$$\Delta h = \Delta H + \Delta N = \Delta H_{\text{Niv}} - \int \xi \, ds \qquad (1, 2)$$

Der ellipsoidische Höhenunterschied Δh ist also gleich der Summe aus nivelliertem Höhenunterschied ΔH_{Niv} und dem unmittelbaren Ergebnis $-\int \xi \, ds$ des astronomischen Nivellements.

Das Integral wird näherungsweise durch numerische (graphische) Integration der in diskreten Punkten des Visurprofils gemessenen Lotabweichungen ξ gelöst. Sein Wert entspricht der Abstandsänderung $\Delta N'$ der lokalen Niveauläche $W = W_A$ gegenüber einer Parallelfäche zum Ellipsoid durch A .

Sind zwei Lotabweichungsbestimmungen in so geringem räumlichen Abstand voneinander erfolgt, daß das Niveaulächenprofil zwischen den Stationen als Kreisbogen angenommen werden darf, so ergibt sich $\Delta N'$ als:

$$\Delta N'_{i, i+1} = - \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} \cdot s_{i, i+1} \qquad (1, 3a)$$

und in der Summe über alle Stationen eines Profils:

$$\Delta N'_{A, B} = - \sum_{i=A}^{n=B} \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} \cdot s_{i, i+1} \qquad (1, 3b)$$

Die Abstände $s_{i, i+1}$ sollen im Gebirge nicht größer als 1 km sein (Niethammer, 1939).

1.2 ATMOSPHERISCHE STRAHLENBRECHUNG

Zu den in 1.1 beschriebenen Schwierigkeiten der Höhenbestimmung wegen der Wirkung des irdischen Schwerfeldes tritt noch eine zweite physikalische Problematik auf, nämlich die schwache Krümmung des Zielstrahles in der Erdatmosphäre. Jeder Lichtstrahl wird auf Grund der verschiedenen Brechkraft der durchlaufenen Luftschichten mehrfach gebrochen und täuscht daher das Ziel an einer falschen Stelle vor. Da die Schichtung der Luft in der Hauptsache vertikal verläuft, kommt die Abweichung des Zielstrahls vom geradlinig gedachten Verlauf, die sogenannte Refraktion, fast ausschließlich in einer vertikalen Verschiebung der Zielabbildung zum Tragen. Die Refraktion beeinflusst wegen der langen Zielstrahlen im besonderen die trigonometrische Höhenbestimmung, aber sie kann auch durch systematische Fehleranhäufung Nivellementergebnisse deutlich verfälschen.

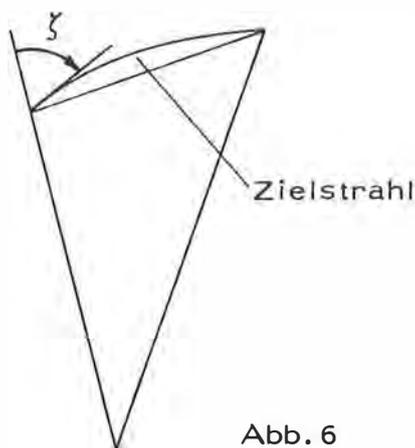


Abb. 6

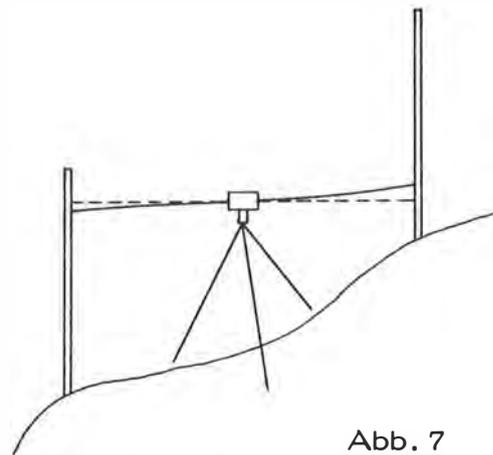


Abb. 7

Dies ist vor allem bei Nivellements in steilem Gelände zu erwarten, wo der Visurstrahl zur höheren Latte bodennah verläuft und die Brechung eine andere sein wird als zur tieferen Latte. Im Extremfall kann es zu Anomalien wie in Abb. 7 kommen und der Fehlereinfluß - durch die hohe Anzahl von Aufstellungen bei großen Steigungen - zu weit über der Meßgenauigkeit liegenden Beträgen anwachsen.

Da auch andere Fehlereinflüsse (fehlerhafter Lattenmeter, Lattenneigung wegen Libellendejustierung) bei solchen Nivellements einer systematischen Anhäufung unterliegen und das Aufstellen des Gerätes oft zeitraubend ist, ist das Nivellement für Höhenbestimmungen im Gebirge ungeeignet. Es gilt also, daß Verfahren der trigonometrischen Höhenbestimmung vor allem in Hinsicht auf Minderung des Refraktionseinflusses weiter zu verbessern, um auch in schwierigem Gelände genaue Höhen ermitteln zu können.

2. TRIGONOMETRISCHE HÖHENBESTIMMUNG AUS RAUMSTRECKEN UND ZENITDISTANZEN

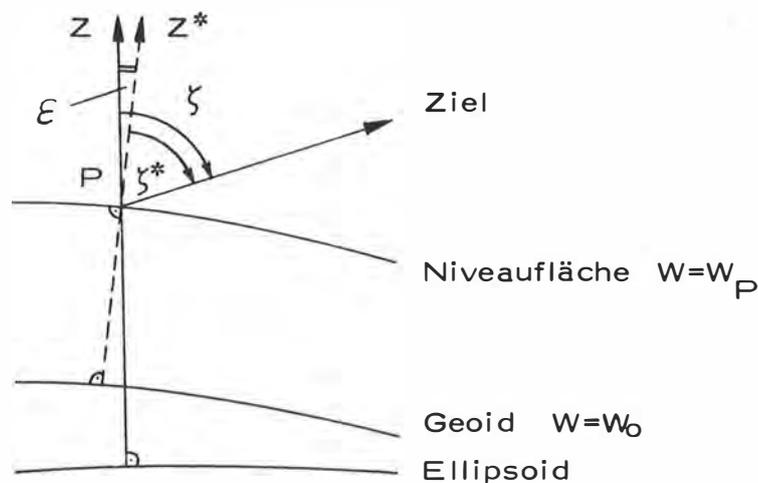
Seit bestimmte elektromagnetische Wellen zur direkten Ausmessung des räumlichen Abstandes zwischen zwei Punkten nutzbar gemacht worden sind, steht dem Geodäten eine ungeheure Fülle neuer Meßpraktiken offen. Große Entfernungen, die bis dahin nur aus den – mühsam durch Triangulation und Basismessung ermittelten – Koordinaten von Triangulierungspunkten abgeleitet werden konnten, sind seither direkt und rasch meßbar. Vom ersten AGA-Geodimeter NASM1 im Jahre 1952 bis zum modernen Wild-Distomat 20 hat sich ein stetiger Reichweiten- und Genauigkeitsgewinn, begleitet von einer enormen Verkürzung der Meßzeit und völliger Automation des Meßablaufs vollzogen. Eine der unzähligen Anwendungen der neuen Technologie ist die Bestimmung trigonometrischer Höhenunterschiede aus Zenitdistanzen und den direkt gemessenen Schrägstrecken gewesen und hat in der Literatur reichhaltigen Niederschlag gefunden. Die in den letzten Jahren entwickelten Präzisionsentfernungsmeßgeräte, wie das Plessey Tellurometer MA100, das Kern Mekometer ME3000, der Wild Distomat DI20, vor allem aber das Terrameter, lassen mit ihrer inneren Meßgenauigkeit den Griff nach dem Millimeter in der Distanzmessung immer realistischer erscheinen. Damit ergeben sich auch neue Möglichkeiten der Höhenbestimmung – teilweise sogar unter Vermeidung der refraktionsbehafteten Zenitdistanzbeobachtungen – die hier im weiteren untersucht werden sollen. Die Distanzen werden dabei aus später noch genauer zu erläuternden Gründen (Fehler der atmosphärischen Entfernungskorrektur wächst proportional der Distanz, Reichweite von ME3000, MA100 < 3 km, Distanzbeschränkung durch Forderung nach möglichst steilen Visuren) auf 3 km beschränkt. Alle in dieser Arbeit abgeleiteten Formeln und Erkenntnisse haben also in Strenge nur für diesen Entfernungsbereich Gültigkeit!

2.1. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

2.1.1 DIE REDUKTION DER GEMESSENEN ZENITDISTANZ AUF DEN ELLIPSOIDISCHEN ZENIT

Jede beobachtete Zenitdistanz ζ^* bezieht sich auf die Richtung der natürlichen Lotlinie im Standpunkt. Durch das Horizontieren des Meßgerätes wird ja die Blase einer Libelle in die Tangentialebene an die Niveaufläche im Standpunkt gebracht und die natürliche Lotlinie, die normal auf diese steht, enthält somit die Stehachse des Theodolits. Zur Ableitung ellipsoidischer Höhenunterschiede ist aber eine Reduktion der gemessenen Zenitdistanz auf die Ellipsoidnormale notwendig, also vom astronomischen auf den ellipsoidischen Zenit.

Abb. 8



Der kleine Winkel (im allgemeinen $< 1^c$ *) zwischen der Ellipsoidnormalen und der Richtung der Tangente an die natürliche Lotlinie im Standpunkt wird die Lotabweichung (genauer: Oberflächenlotabweichung) ϵ genannt.

*) Anm.: Abhängig von Topographie und von der Lage des benutzten Referenzellipsoids zum Geoid; also immer relative LA, nur wenn auf mittleres Erd ellipsoid bezogen; absolute LA

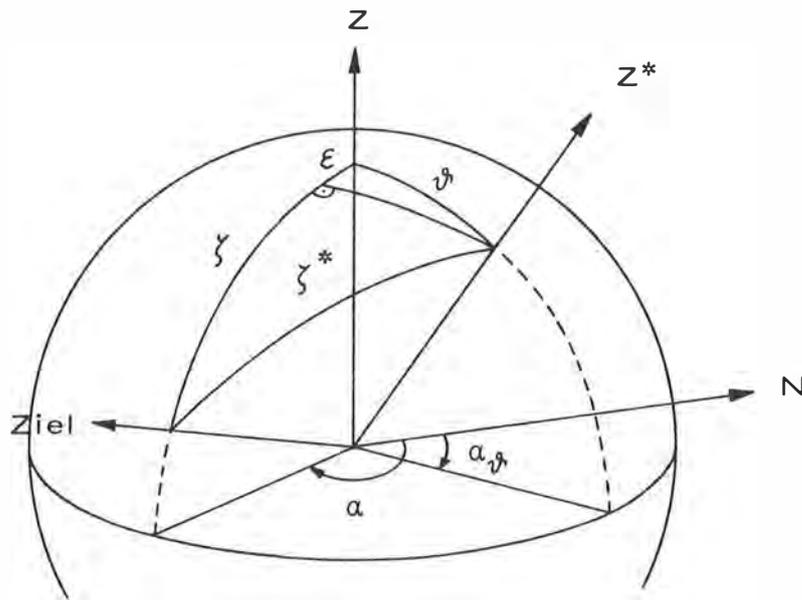


Abb. 9

Abb. 9 zeigt die Verhältnisse anhand der um den Standpunkt geschlagenen Einheitskugel. Mit dem sphärischen sin-cos Satz und unter Beachtung, daß ψ und der von ζ und ζ^* eingeschlossene Winkel sehr klein sind, ergibt sich für die Korrektur der beobachteten Zenitdistanz ζ^* :

$$\mathcal{E} = \zeta - \zeta^* = \psi \cdot \cos(\alpha - \alpha_\psi) \quad (2.1)$$

Die Formel (2, 1) zeigt die aus der Anschauung erwartete Abhängigkeit der Korrektur von der Differenz der Azimute des Ziels und der Lotabweichung. Fallen die beiden Richtungen zusammen, so geht die Lotabweichung mit ihrem vollen Betrag in die Korrektur ein. Das ist besonders bei Visuren zu erwarten, die vom gegenüberliegenden Hang zu einem Gipfel zielen (Abb. 10).

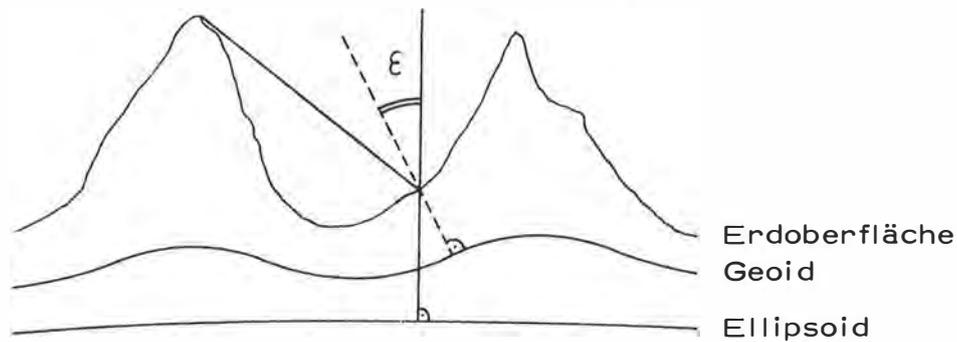


Abb. 10

Da im unteren Drittel des Hanges nach Helmer t (1880) auch das Maximum der Lotabweichung auftritt, wird klar, daß bei Vernachlässigung der Lotabweichungskorrektur Fehler von mehreren Zehnersekunden durchaus möglich sind. Dies soll nur unterstreichen, daß eine Zenitdistanzbeobachtung zum Zwecke genauer Höhenfestlegung ohne anschließende Bestimmung der Lotabweichung streng genommen wertlos ist. Alle Überlegungen, welche Höhenunterschiede sich bei diesem oder jenem Niveauflächenverlauf im Azimut der Visur ergeben (Helmer t, 1880, Finsterwalder 1937, Hofmann 1955, Gleinsvik 1960, Brunner 1972), scheinen in einer Zeit, da eine Lotabweichungsbestimmung mit dem Zeiss-Astrolab und einer Stoppuhr rasch ($< 1^h$) und einfach durchgeführt werden kann, nicht mehr zeitgemäß! Mit Hilfe der erwähnten Geräte wird die Richtung der Tangente an die natürliche Lotlinie im Standpunkt (φ^* , λ^*) nach der "Methode der gleichen Höhen" astronomisch festgelegt. Aus den Differenzen zu den Ellipsoidkoordinaten (φ , λ), die die Richtung der Ellipsoidnormalen angeben, ergeben sich die Lotabweichungskomponenten ξ und η (Heiskanen/Moritz, 1967):

$$\xi = \varphi^* - \varphi \quad (2, 2a)$$

$$\eta = (\lambda^* - \lambda) \cos \varphi \quad (2, 2b)$$

ξ und η hängen mit der Lotabweichung ϑ in folgender Weise zusammen:

$$\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

$$\xi = \vartheta \cos \alpha_{\vartheta} \quad (2, 3a)$$

$$\eta = \vartheta \sin \alpha_{\vartheta} \quad (2, 3b)$$

Die letzten beiden Gleichungen (2, 3) in (2, 1) eingesetzt geben endgültig:

$$\boxed{\mathcal{E} = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha} \quad (2, 4)$$

$$\boxed{\zeta = \zeta^* + \mathcal{E}} \quad (2, 5)$$

\mathcal{E} ist die im Azimut α der Visur wirksame Komponente der Lotabweichung ϑ . Einem positiven \mathcal{E} entspricht ein Niveauflächengefälle in Visurrichtung (siehe Abb. 8).

Zur Bestimmung des mittleren Fehlers $m_{\mathcal{E}}$ differenzieren wir die Gleichungen (2, 2) und (2, 4) und dürfen dabei die geodätischen Größen φ, λ und α im Vergleich zu den astronomischen Parametern φ^* und λ^* als fehlerfrei betrachten.

$$d\mathcal{E} = d\xi \cos \alpha + d\eta \sin \alpha \quad d\xi = d\varphi^* \quad d\eta = d\lambda^* \cos \varphi$$

Nach Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes finden wir:

$$\boxed{m_{\mathcal{E}} = \pm \sqrt{m_{\varphi^*}^2 \cdot \cos^2 \alpha + m_{\lambda^*}^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha}} \quad (2, 4a)$$

2.1.2 DIE BERECHNUNG ELLIPSOIDISCHER HÖHENUNTERSCHIEDE

2.1.2.1 GRUNDFORMEL FÜR EINSEITIGE ZENITDISTANZ

Die Ableitung des ellipsoidischen Höhenunterschieds Δh_{12} zweier Punkte P_1 und P_2 folgt im wesentlichen der Vorgangsweise von Hubeny (1975).

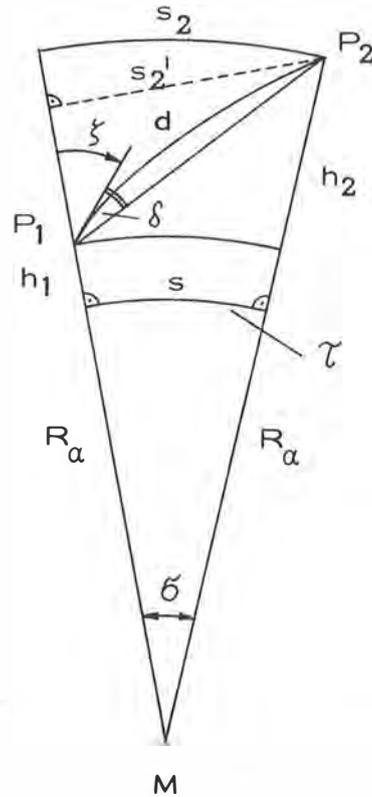


Abb. 11 *)

- σ Zentriwinkel der Ellipsoidnormalen
- $\zeta = \zeta^* + \epsilon$ ellipsoidische Zenitdistanz
- d atmosphärisch reduzierte Schrägdistanz
- R_α Krümmungsradius des Ellipsoids im Azimut α der Visur
- γ durch Kugel $R = R_\alpha$ ersetztes Ellipsoidstück
- h_1, h_2 ellipsoidische Höhen der Punkte P_1, P_2
- $\Delta h_{12} = h_2 - h_1$ ellipsoidischer Höhenunterschied
- δ unbekannter Refraktionswinkel
= Winkel zwischen Tangente an Lichtkurve in P_1 und geradliniger Verbindung $P_1 P_2$
- s_2 horizontale Seite in Höhe von P_2

*) Anm.: Abbildungsebene parallel zu den beiden windschiefen Ellipsoidnormalen

Der Unterschied der Länge des gekrümmten Lichtstrahls d aus der Entfernungsmessung und der geradlinigen Verbindung $\overline{P_1 P_2}$ ist vollständig zu vernachlässigen. Eine Abschätzung für einen kreisbahnförmigen Verlauf der Lichtkurve zeigt, daß die Differenz der beiden Längen erst bei $d = 36 \text{ km}$ 1 Millimeter erreicht.

$$d - \overline{P_1 P_2} = \frac{d^3}{24r^2} = \frac{d^3}{1176R^2} \cong 1 \text{ mm} \Rightarrow d \cong 36 \text{ km}$$

r für Lichtwellen $\sim 7R$

Die analoge Abschätzung für $s_2 - s_2' = 1 \text{ mm}$ ergibt $d \cong 10 \text{ km}$.

In der Abb. 11 gilt nun:

$$d \cdot \sin(\zeta + \delta) = s_2' = (R_\alpha + h_2) \cdot \sin \delta = (R_\alpha + h_2) \cdot \sin \frac{s_2}{(R_\alpha + h_2)}$$

Mit $\sin \delta = \delta = \frac{s_2}{(R_\alpha + h_2)}$ (δ sehr kleiner Winkel) ergibt sich:

$$d \cdot \sin(\zeta + \delta) = s_2$$

Nach Taylor entwickelt:

$$d \cdot \sin \zeta + d \cdot \cos \zeta \cdot \delta = s_2 \quad (2, 6)$$

Für den ellipsoidischen Höhenunterschied finden wir aus dem Dreieck $P_1 M P_2$:

$$R_\alpha + h_1 + d \cdot \cos(\zeta + \delta) = (R_\alpha + h_2) \cdot \cos \delta = (R_\alpha + h_2) \cdot \cos \frac{s_2}{R_\alpha + h_2} \quad (2, 7)$$

Der Cosinus des kleinen Winkels δ wird in seine Reihe entwickelt und alle Glieder ab der 4. Ordnung fortgelassen; für s_2 wird das Hauptglied der Formel (2,6) gesetzt:

$$\cos \frac{s_2}{(R_\alpha + h_2)} = 1 - \frac{s_2^2}{2 \cdot (R_\alpha + h_2)^2} = 1 - \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2 \cdot (R_\alpha + h_2)^2} \quad (2, 8)$$

Nach Taylor: $\cos(\zeta + \delta) = \cos \zeta - \sin \zeta \cdot \delta$ (2, 9)

(2, 8) und (2, 9) in (2, 7) eingesetzt führen zur Formel:

$$\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = d \cdot \cos \zeta - d \cdot \sin \zeta \cdot \delta + \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2 \cdot (R_\alpha + h_2)}$$

und mit $R_\alpha + h_2 \doteq R_\alpha$ ergibt sich schließlich:

$\Delta h = d \cdot \cos \zeta - d \cdot \sin \zeta \cdot \delta + \frac{d^2 \cdot \sin^2 \zeta}{2R_\alpha}$	(2, 10)
--	---------

Dies ist die Formel für den ellipsoidischen Höhenunterschied bei gemessener Schrägdistanz und einseitig beobachteter Zenitdistanz, wenn der Refraktionswinkel δ bekannt ist. Die Formel enthält die angegebenen Vernachlässigungen, ist aber – vor allem für den untersuchten Distanzbereich – hinreichend genau.

Bei Annahme eines kreisbogenförmigen Visurstrahlverlaufs ($\delta_1 = \delta_2 = \frac{d}{2r_L}$) und unter Einführung des Ausdrucks

Refraktionskoeffizient $k = \frac{R_\alpha}{r_L}$ (2, 11)

als Maß für das Verhältnis des Erdradius R_α zum Lichtbahnradius r_L wird aus Formel (2, 10):

$$\Delta h = d \cdot \cos \zeta - \frac{d^2 \cdot \sin \zeta}{2R_\alpha} \cdot k + \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2R_\alpha} \quad (2, 12)$$

Für diesen, im weiteren als Kreisbahnformel bezeichneten, Ausdruck hat Brandsätter (1981) eine ebenso einfache wie elegante Ableitung gefunden, die die geometrischen Zusammenhänge der drei Summanden sehr anschaulich zeigt. Er bedient sich dabei einer geschickten

Vereinfachung, indem er den Höhenunterschied Δh nicht in der Ellipsoidnormalen des Zielpunktes P_2 , sondern in jener durch den Standpunkt P_1 zählt. Da der Winkel δ , den die beiden Normalen miteinander einschließen, ein sehr kleiner ist ($s \text{ [km]} \doteq \delta \text{ [}^\circ\text{]}$, also $\delta \cong 3^\circ$ (s. S. 15)), ist die Differenz $\Delta h \cdot \cos \delta - \Delta h$ für den untersuchten Distanzbereich stets vernachlässigbar;

$$\Delta h \cdot \cos \delta - \Delta h \cong 0,1 \text{ mm} \quad \text{für} \quad \Delta h \cong 1000\text{m} \text{ und } s \cong 3000\text{m}$$

Wir führen ein lokales Koordinatensystem ein:

Zentrum..... P_1

h-Achse..... Ellipsoidnormale durch P_1 , positiv nach oben

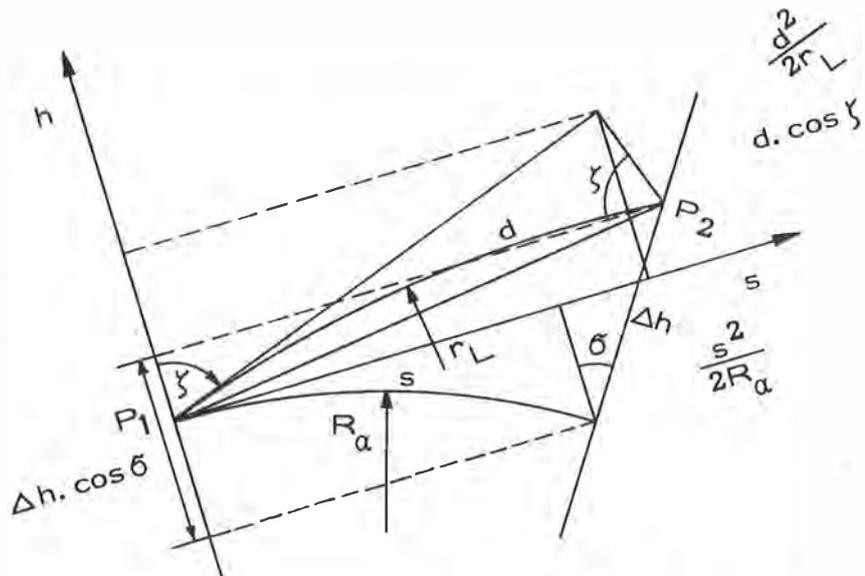
s-Achse..... normal auf h, positiv in Visurrichtung

Der Refraktionseinfluß und die Wirkung der Erdkrümmung lassen sich nun als Kreisbogenabrückung von der Tangente darstellen:

$$R_a + h_1 \doteq R_a$$

$$s \doteq d \cdot \sin \zeta$$

Abb. 12



Aus der Figur ist direkt abzulesen: $\Delta h = d \cdot \cos \zeta - \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2r_L} + \frac{s^2}{2R_a}$

also wie vorhin:

$$\Delta h = d \cdot \cos \zeta - \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2R_a} \cdot k + \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2R_a} \quad (2, 12)$$

2.1.2.2 DER KRÜMMUNGSRADIUS R_α

Die Krümmung $\frac{1}{R_\alpha}$ des Ellipsoides im Azimut α der Visur wird durch den Satz von Euler angegeben:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad (2,13)$$

Darin bedeutet $M = \frac{c}{\sqrt{3}}$ den Meridiankrümmungsradius

und $N = \frac{c}{V}$ den Querkrümmungsradius im Standpunkt.

$c = \frac{a^2}{b}$ Polkrümmungsradius

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Je nach dem Azimut α liegt R_α zwischen den Extremwerten M und N . In unseren Breiten beträgt der Unterschied zwischen M und N rund 20 km.

φ	M [km]	N [km]	$R = \sqrt{M \cdot N}$ [km]
46°	6367,8	6388,4	6378,1
47°	6368,9	6388,8	6378,8
48°	6370,0	6389,2	6379,6

Der nach der Formel $R = \frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{M \cdot N}$ berechnete Radius der Gauß'schen Schmiegunskugel für ein bestimmtes Vermessungsgebiet kann also bis zu 10 km vom tatsächlichen Ellipsoidkrümmungshalbmesser R_α abweichen. Eine Fehlerabschätzung für das letzte Glied der Formel (2, 12) zeigt, daß der begangene Fehler bei $dR = 10$ km und $s = 3$ km bereits 1 mm erreicht.

$$d\Delta h(R_\alpha) = - \frac{s^2}{2R_\alpha^2} \cdot dR$$

Es ist daher nötig, bei unseren Betrachtungen R_α zu verwenden, wenn die volle Genauigkeit erhalten werden soll.

2.1.2.3 FEHLERBETRACHTUNGEN zu 2.1.2.1

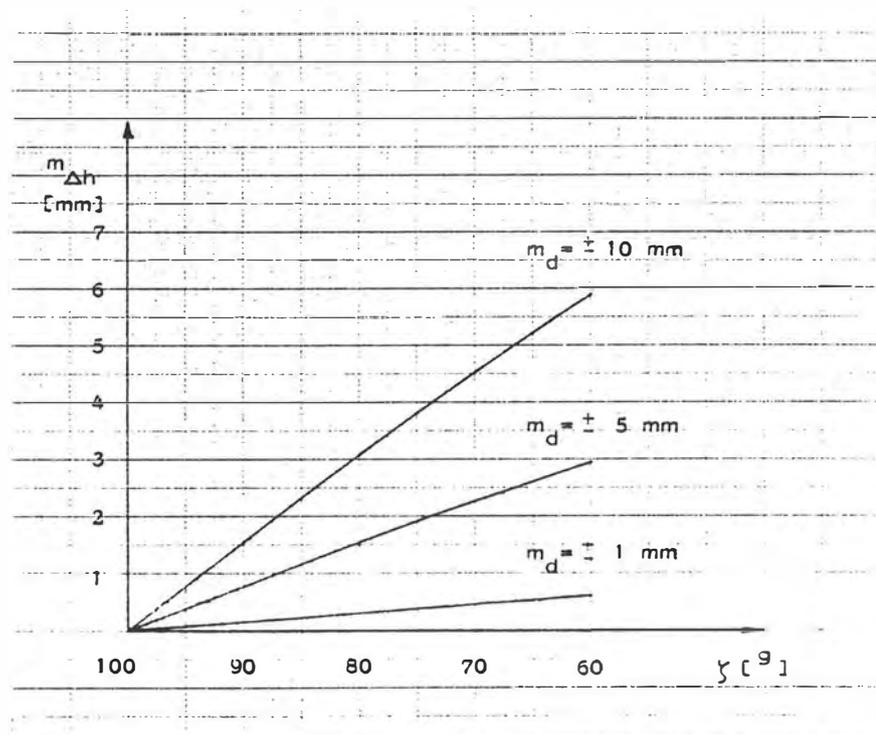
Zur Erfassung der Auswirkung von Ungenauigkeiten der verschiedenen Meß- und Rechengrößen auf die Genauigkeit des Höhenunterschiedes wird die Formel (2, 12) partiell differenziert und danach auf mittlere Fehler übergegangen. Glieder höherer Ordnung, die keinen Einfluß haben, werden unterdrückt.

Einfluß der Ungenauigkeit der gemessenen Schrägdistanz:

$$m_{\Delta h}(d) = \pm \cos \zeta \cdot m_d$$

Der Einfluß wächst also mit der Steilheit der Visur (Diagr. 1)

Diagr. 1



Einfluß der Ungenauigkeit der beobachteten Zenitdistanz

$$m_{\Delta h}(\zeta) = \pm d \cdot \sin \zeta \cdot \frac{m_{\zeta}^{cc}}{\rho^{cc}}$$

Der Fehler des Höhenunterschiedes wächst demnach mit der Schrägdistanz zum Zielpunkt und nimmt mit zunehmender Steilheit der Visur ab – er ist also proportional der horizontalen Entfernung und es gilt die Faustformel ($\zeta = 80^g$) :

$$m_{\Delta h}(\zeta) \doteq \pm 1,5 \text{ mm/km} \cdot m_{\zeta}^{cc} \quad \text{analog wirkt sich der}$$

Einfluß der Unsicherheit des Refraktionswinkels

aus: $m_{\Delta h}(\delta) = \pm d \cdot \sin \zeta \cdot \frac{m_{\delta}^{cc}}{\rho^{cc}} \doteq \pm 1,5 \text{ mm/km} \cdot m_{\delta}^{cc}$

Einfluß eines fehlerhaften Krümmungsradius R_{α}

$$m_{\Delta h}(R_{\alpha}) = \pm \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2R_{\alpha}^2} \cdot m_{R_{\alpha}} = 0$$

Da R_{α} streng berechenbar ist, darf $m_{R_{\alpha}} = 0$ gesetzt werden und der Einfluß verschwindet.

Die einzelnen Fehlereinflüsse nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zusammengefaßt führen zur Fehlerformel für den ellipsoidischen Höhenunterschied nach 2. 1. 2. 1.

$$m_{\Delta h} = \pm \sqrt{\cos^2 \zeta \cdot m_d^2 + d^2 \sin^2 \zeta \cdot \frac{(m_{\zeta}^2 + m_{\delta}^2)}{\rho^2}} \quad (2, 13)$$

Diese Fehlerformel setzt voraus, daß die Zenitdistanz und die Schrägstrecke auf die Bodenpunkte bezogen sind. Zu klären ist demnach noch die Wirkung von Fehlern in den diversen Ziel- und Instrumentenhöhen oder sonstigen Exzentrizitäten.

2.1.2.4 DIE ZENTRIERUNG DER MESSDATEN AUF DIE BODENPUNKTE

Die Bezugspunkte der Zenitdistanzmessung und der Streckenmessung werden im allgemeinen nicht identisch sein. Es hat daher eine Höhenzentrierung der Meßwerte auf die Bodenpunkte zu erfolgen. Die Zentrier-elemente sind dabei:

T... Instrumentenhöhe des Theodolits

Z... Zielhöhe der Zieltafel

G... Instrumentenhöhe des Entfernungsmessgerätes

R... Zielhöhe des Reflektors

Für die Zentrierung wirksam sind die folgenden zwei Differenzen dieser Elemente:

$$e = G - R + Z - T$$

$$f = R - G$$

Abb. 13 zeigt die Verhältnisse für Theodolit und Entfernungsmessgerät auf dem gleichen Punkt:

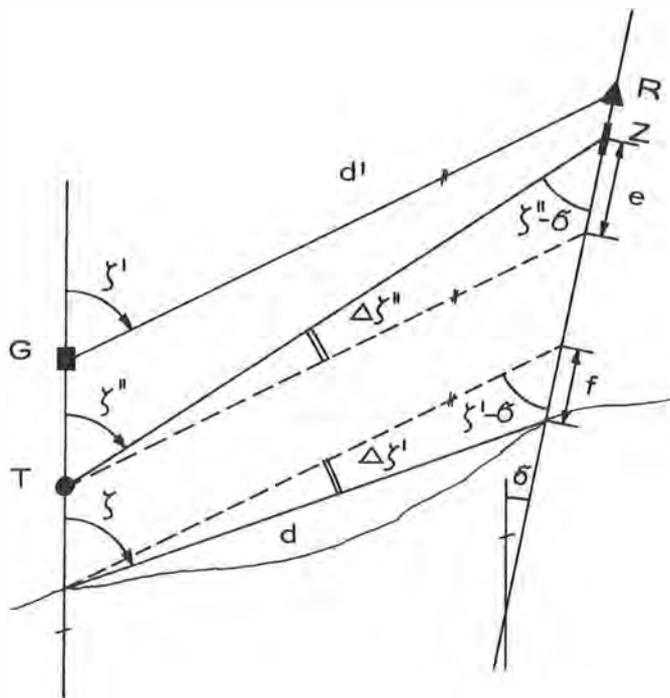


Abb. 13

Gemessen sind ζ'' und d'

Für Theodolit am Standpunkt und Entfernungsmeßgerät am Zielpunkt behalten alle Formeln ihre Gültigkeit, wenn man das Vorzeichen von G und R ändert.

Aus Abb. 13. entnehmen wir die folgenden Beziehungen, in denen der Einfluß des kleinen Refraktionswinkels δ unbeachtet bleiben darf:

$\Delta\zeta'', \Delta\zeta'$ kleine Winkel: $\sin \rightarrow \text{arc}$

$$\delta^g \doteq \frac{d' \sin \zeta'}{R_\alpha} \cdot \rho^g$$

$$\zeta' = \zeta'' + \Delta\zeta'' \quad \Delta\zeta'' = \frac{e}{d'} \cdot \sin(\zeta'' - \sigma) \cdot \rho^g \quad (2, 14a)$$

$$\zeta = \zeta' + \Delta\zeta' = \zeta'' + \Delta\zeta'' + \Delta\zeta' \quad \Delta\zeta' = \frac{f}{d} \cdot \sin(\zeta' - \sigma) \cdot \rho^g \quad (2, 14b)$$

$$d = \sqrt{d'^2 + f^2 - 2d'f \cos(\zeta' - \sigma)} \quad (2, 14c)$$

Die Konvergenz δ der Ellipsoidnormalen braucht nur bei höchsten Genauigkeitsansprüchen (Kap. 4.) beachtet zu werden. Eine einfache Abschätzung zeigt, daß die Vernachlässigung von δ bei Distanzen ≤ 3 km und e bzw. $f \leq 2$ m (realistisch!) durchaus gerechtfertigt ist.

$$d\Delta\zeta'' = d\Delta\zeta' < 0,1^{cc}$$

$$dd < 1 \text{ mm}$$

Wir dürfen also ohne Genauigkeitsverlust schreiben:

$$\Delta\zeta'' = \frac{e}{d'} \cdot \sin \zeta'' \cdot \rho^g \quad (2, 15a)$$

$$\Delta\zeta' = \frac{f}{d} \cdot \sin \zeta' \cdot \rho^g \quad (2, 15b)$$

$$d = \sqrt{d'^2 + f^2 - 2d'f \cos \zeta'} \quad (2, 15c)$$

Daß die Zenitdistanzreduktion auf die Bodenpunkte in zwei Stufen ausgeführt wird, hat den einfachen Grund, die zur Distanz d' zugehörige Zenitdistanz ζ' zu gewinnen.

Die direkte Reduktion auf die Bodenpunkte lautet

$$\zeta = \zeta'' + \Delta\zeta \quad \Delta\zeta = \frac{e+f}{d} \cdot \sin\zeta'' \cdot \rho^g = \frac{Z-T}{d} \cdot \sin\zeta'' \cdot \rho^g \quad (2,16)$$

Mit Hilfe von Taylorentwicklung und kleinen Vereinfachungen ließe sich auch zeigen:

$$\Delta\zeta'' + \Delta\zeta' = \frac{Z-T}{d} \cdot \sin\zeta'' = \Delta\zeta \quad (2,16)$$

Zur Ableitung der Genauigkeit der auf die Bodenpunkte zentrierten Zenitdistanz setzen wir in (2,16) mit genügender Schärfe: $d \doteq d'$.

$$\zeta = \zeta'' + \frac{Z-T}{d'} \sin\zeta''$$

Nach Bildung der einzelnen Differentiale und Vernachlässigung kleiner Größen erhalten wir durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

$$m_\zeta = \pm \sqrt{m_{\zeta''}^2 + \left(\frac{Z-T}{d'^2} \cdot \sin\zeta''\right)^2 \cdot m_{d'}^2 \cdot \rho^2 + \frac{\sin^2\zeta''}{d'^2} \cdot (m_T^2 + m_Z^2) \cdot \rho^2}$$

Das mittlere Glied kann wegen der Kleinheit von $m_{d'}$ (< 10 mm) keinen Einfluß ausüben. Somit lautet die endgültige Fehlerformel für die auf die Bodenpunkte zentrierte Zenitdistanz:

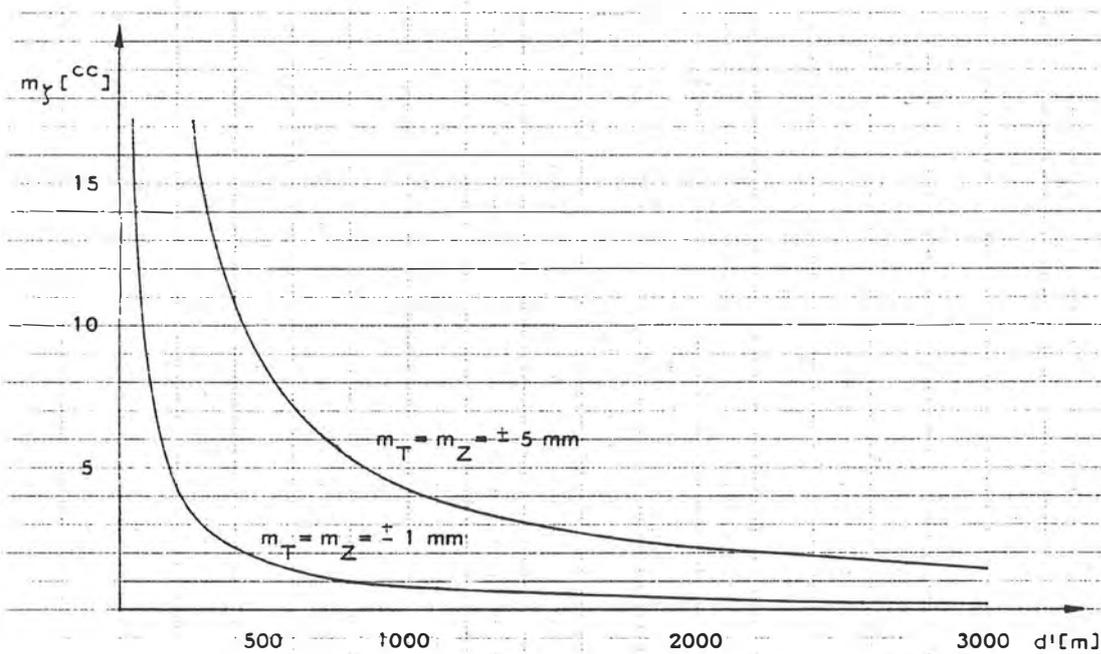
$$m_\zeta = \pm \sqrt{m_{\zeta''}^2 + \frac{\sin^2\zeta''}{d'^2} \cdot (m_T^2 + m_Z^2) \cdot \rho^2} \quad (2,17)$$

Diese wichtige Formel lehrt, daß die Bestimmung von Instrumenten- und Zielhöhe mit großer Sorgfalt zu geschehen hat, will man - vor allem bei kurzen Distanzen - die Meßgenauigkeit $m_{\zeta''}$ nicht empfindlich verschlechtern.

Diagramm 2 zeigt den Verlauf des 2. Gliedes der Formel (2, 17) in Abhängigkeit der Distanz d' und der mittleren Fehler m_T und m_Z . Die Zenitdistanz ist dabei mit $\zeta'' = 80^g$ angenommen worden.

Es zeigt sich, daß, wenn man eine Reduktionsgenauigkeit von $\pm 1^{cc}$ anstrebt, die Instrumentenhöhenbestimmung bei Distanzen < 1 km auf besser als ± 1 mm Genauigkeit ausgeführt werden muß. Wie das zu geschehen hat, wird in Kap. 4. 4. 3. 1/2 abgehandelt.

Die aus Rollmeter- oder Lotstabablesungen zu erwartende Genauigkeit von ± 5 mm ist jedenfalls, wie das Diagr. 2 zeigt, für eine saubere Reduktion völlig unzureichend. Ein in Formel (2, 13) verwendetes m_γ muß nach (2, 17) berechnet werden.



Diagr. 2

Im folgenden soll die Genauigkeit einer auf die Bodenpunkte reduzierten Distanz in Abhängigkeit von Instrumenten- und Reflektorhöhe abgeleitet werden:

Die Formel (2, 15c) für die reduzierte Distanz lautet nach Einsetzen von (2, 15a):

$$d = \sqrt{d'^2 + f^2 - 2d'f \cos(\zeta'' + \frac{e}{d'} \sin \zeta'')}$$

Nach Taylor entwickelt und auf das Glied 1. Ordnung beschränkt ist:

$$\cos(\zeta'' + \frac{e}{d'} \sin \zeta'') = \cos \zeta'' - \frac{e}{d'} \sin^2 \zeta''$$

Damit ergibt sich

$$d = \sqrt{d'^2 + f^2 - 2d'f \cos \zeta'' + 2ef \sin^2 \zeta''} \quad (2, 18)$$

Die Differentiale lauten:

$$dd(d') = \frac{d'}{d} dd' - \frac{f \cos \zeta''}{d} dd'$$

$$dd(\zeta'') = \frac{d'}{d} f \sin \zeta'' \frac{d\zeta''}{\rho} + \frac{ef}{d} \sin 2\zeta'' \frac{d\zeta''}{\rho}$$

$$dd(f) = \frac{f}{d} df - \frac{d'}{d} \cos \zeta'' df + \frac{e}{d} \sin^2 \zeta'' df$$

$$dd(e) = \frac{f}{d} \sin^2 \zeta'' de$$

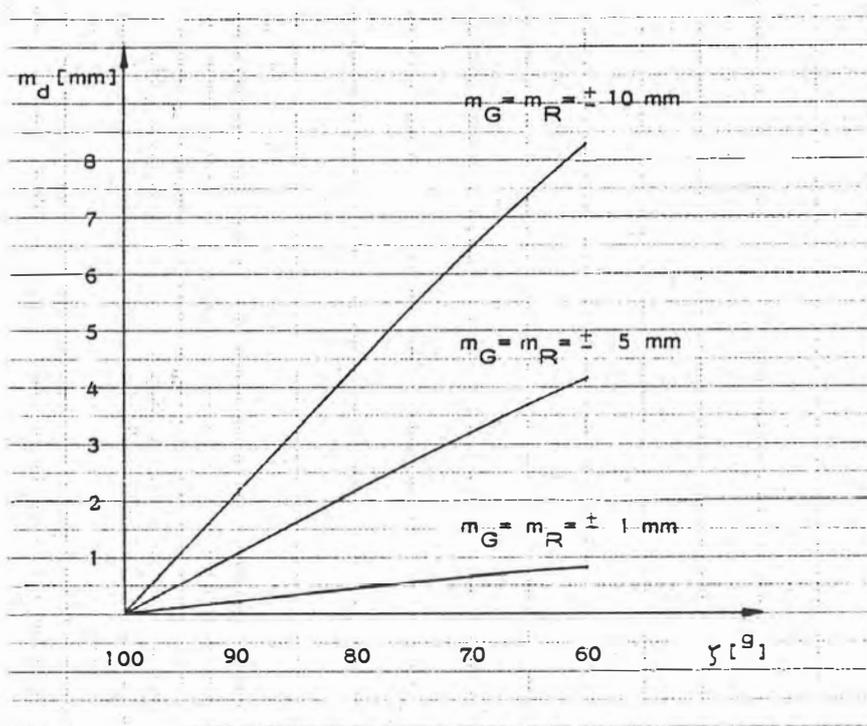
Mit $\frac{d'}{d} \doteq 1$ und unter Vernachlässigung aller Glieder mit $\frac{e}{d}$ bzw. $\frac{f}{d}$ wegen ihrer Kleinheit folgt nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$m_d = \pm \sqrt{m_{d'}^2 + f^2 \sin^2 \zeta'' \frac{m_{\zeta''}^2}{\rho^2} + \cos^2 \zeta'' m_f^2}$$

Das 2. Glied unter der Wurzel erreicht erst bei $m_{\zeta''} = \pm 3^c$ 1 mm und darf daher fortgelassen werden. Für m_f^2 wird $m_G^2 + m_R^2$ gesetzt.

$$m_d = \pm \sqrt{m_{d'}^2 + \cos^2 \zeta'' \cdot (m_G^2 + m_R^2)} \quad (2, 19)$$

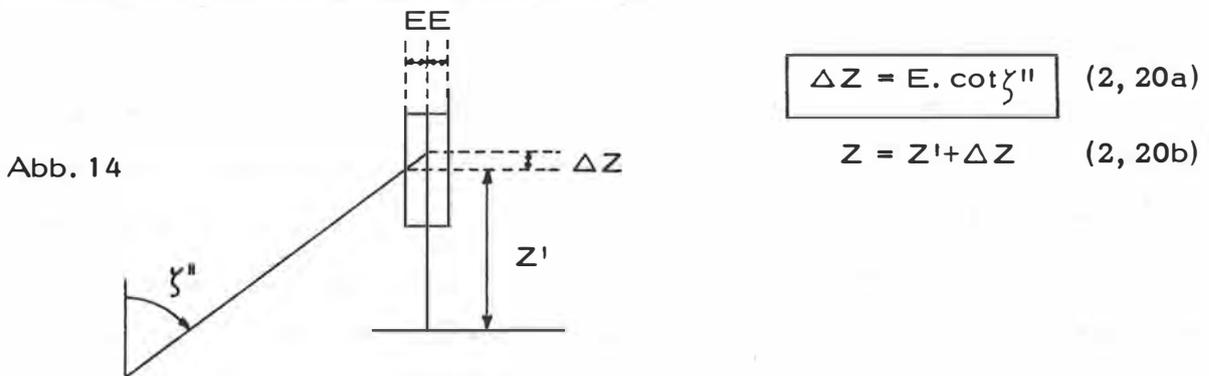
Diese Formel für die Genauigkeit einer auf die Bodenpunkte reduzierten Distanz zeigt gemeinsam mit dem nachfolgenden Diagramm 3, daß die gewohnte Erfassung von Instrumenten- und Reflektorhöhe auf ± 1 cm Genauigkeit schon bei wenig geneigten Visuren Fehler im mm-Bereich bewirkt. G und R müssen daher - vor allem bei steilen Visuren - mit mm-Genauigkeit erfaßt werden!



Diagr. 3

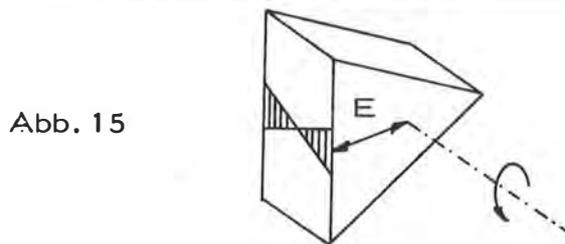
Jetzt bleibt noch die Wirkung einer horizontalen Exzentrizität, wie sie z. B. bei von innen beleuchteten Zieltafeln (siehe 4.4.3.2) oder bei der Anzielung bestimmter Reflektoren auftritt, zu untersuchen.

Horizontale Exzentrizität der Zieltafel:

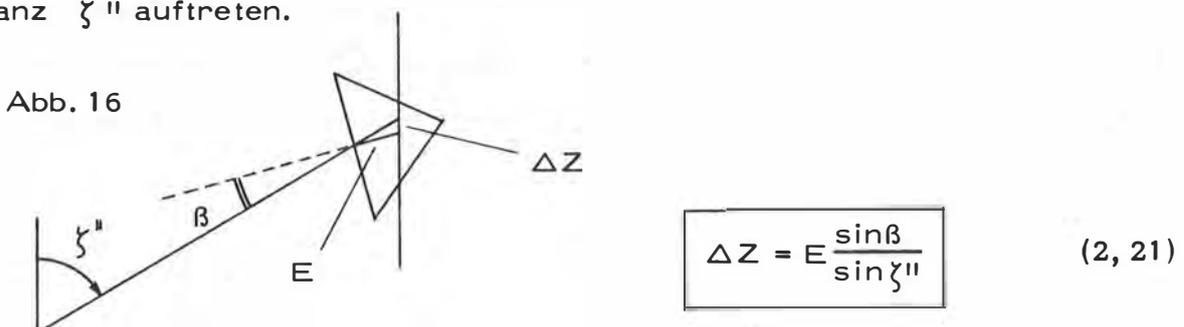


Der Einfluß wächst mit der Cotangente der Zenitdistanz und kann als Zuschlag ΔZ zur Zieltafelhöhe Z verstanden werden. Da E eine Instrumentenkonstante ist, ist ΔZ für jede Zenitdistanz ζ'' fehlerfrei berechenbar. Das Vorzeichen ergibt sich durch die Cotangensfunktion immer richtig.

Horizontale Exzentrizität der Zielmarken auf Reflektoren:



Wird bei der Zenitdistanzmessung ein Reflektor angezielt, dessen Zielmarke eine horizontale Exzentrizität E aufweist, so kann ein Höhenfehler in Abhängigkeit der Ausrichtungsungenauigkeit β und der Zenitdistanz ζ'' auftreten.



Nehmen wir als Beispiel die gebräuchlichen Reflektoren der Firma Kern mit $E = 40 \text{ mm}$, und setzen wir $\zeta'' = 80 \text{ g}$, so erreicht ΔZ bereits bei einem Ausrichtungsfehler von $\beta = 1,5 \text{ g} \rightarrow 1 \text{ mm}$! Ein Fehler von $\beta = 10 \text{ g}$, wie er bei der Anzielung mit Kimme und Korn durchaus vorkommen kann, bewirkt bei fehlerfrei gemessener Zenitdistanz ζ'' ein ΔZ von $6,6 \text{ mm}$!

Dieser Fehlereinfluß, der sich besonders bei der Aneinanderreihung trigonometrischer Höhenunterschiede in der Art eines trigonometrischen Nivellements systematisch zu einem beachtlichen Gesamtfehler anhäufen kann, ist bis jetzt in der Literatur noch nicht bedacht worden und mindert die oft sehr optimistisch angegebene Genauigkeit des trigonometrischen Nivellements.

Da der Fehler nur durch Anbringung einer besseren Zieleinrichtung (Winkelskala, Diopter) auszuschalten ist, wird bei den vorliegenden Untersuchungen immer eine Zieltafel in der Art von Seite 33 vorausgesetzt.

2.1.2.5 FEHLERFORMEL FÜR DEN ELLIPSOIDISCHEN HÖHENUNTERSCHIED NACH 2.1.2.1

Unter Beachtung der Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts läßt sich (2,13) jetzt schreiben:

$$m_{\Delta h} = \pm \sqrt{\cos^2 \zeta \cdot m_{d'}^2 + d^2 \sin^2 \zeta \cdot \frac{(m_{\zeta''}^2 + m_{\delta}^2)}{\varrho^2} + \cos^4 \zeta (m_G^2 + m_R^2) + \sin^4 \zeta (m_T^2 + m_Z^2)}$$

Das Glied mit m_{R_α} taucht nicht auf, weil R_α fehlerfrei berechenbar ist ($m_{R_\alpha} = 0$). Der letzte noch zu beachtende Fehlereinfluß ist die Ungenauigkeit in der Komponente ε der Lotabweichung. m_ε wirkt wie m_ζ und m_δ und somit erhalten wir endgültig nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$m_{\Delta h} = \pm \sqrt{\cos^2 \zeta \cdot m_{d'}^2 + d^2 \sin^2 \zeta \cdot \frac{(m_{\zeta''}^2 + m_{\delta}^2 + m_{\varepsilon}^2)}{\varrho^2} + \cos^4 \zeta (m_G^2 + m_R^2) + \sin^4 \zeta (m_T^2 + m_Z^2)} \quad (2, 22)$$

2.1.2.6 ABSCHÄTZUNG FÜR $m_{\Delta h}$

Für $d' = 3000$ m und $\zeta'' = 80^g$, was einem ellipsoidischen Höhenunterschied von $\Delta h \sim 1000$ m entspricht, wird nun $m_{\Delta h}$ nach Formel (2, 22) berechnet. Dabei werden für die einzelnen Meßfehler m_i die folgenden Erfahrungswerte eingesetzt:

$$\begin{aligned} m_{d'} &= \pm 5 \text{ mm} && \text{(Präzisionsdistanzmeßgerät)} \\ m_{\zeta''} &= \pm 2^{\text{cc}} && \text{(Sekundentheodolit, mehrere Sätze)} \\ m_{\varepsilon} &= \pm 1^{\text{cc}} && \text{(Astrolab, zwei Sätze zu je acht Sternen)} \end{aligned}$$

$$m_G = m_R = m_Z = m_T = \pm 1 \text{ mm} \quad \text{(Nivellier)}$$

Bezeichnet man jetzt die einzelnen Fehlereinflüsse in (2, 22) mit M_i , so steht:

$$m_{\Delta h} \text{ (ohne Refraktionseinfluß)} = \pm \sqrt{M_{d'}^2 + M_{\zeta''}^2 + M_{\varepsilon}^2 + M_{G,R}^2 + M_{T,Z}^2}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{d'} &= \pm 1,6 \text{ mm} \\ M_{\zeta''} &= \pm 9,0 \text{ mm} \\ M_{\varepsilon} &= \pm 4,5 \text{ mm} \\ M_{G,R} &= \pm 0,1 \text{ mm} \\ M_{T,Z} &= \pm 1,3 \text{ mm} \end{aligned} \right\} m_{\Delta h} = \pm 10,3 \text{ mm}$$

Der Gesamteinfluß aller Meßfehler bleibt also für 1000 m Höhenunterschied bei 1 cm! Das entspricht einem relativen Fehler $\frac{m_{\Delta h}}{\Delta h} = 1 \cdot 10^{-5}$. Daß die Ergebnisse in der Praxis fast durchwegs um eine halbe bis ganze Zehnerpotenz schlechter ausfallen, deutet mit Nachdruck auf die Unsicherheit der Refraktionswinkel hin. Das von Gauß angegebene Genauigkeitsmaß von 25 ‰ des Refraktionskoeffizienten $k_G = 0,13$ ist nur für sehr ausgedehnte Meßreihen glaubhaft; Einzelbeobachtungen unterliegen einer wesentlich höheren Unsicherheit. Verbesserungen der Ergebnisse von trigonometrischen Höhenbestimmungen können also nur durch die sichere Bestimmung von δ erreicht werden!

3. REFRAKTION

3.1 DAS PHYSIKALISCHE PHÄNOMEN

(Gerthsen, 1971; Perntner-Exner 1922; Past 1965; Levallois, 1969; Bahnert, 1970)

Im homogenen Medium breitet sich jede Lichtwelle geradlinig aus. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Phase ist abhängig vom Medium, und der optische Weg ist durch das Fermat'sche Prinzip

$$\int_A^B n ds = \min \quad (3, 1)$$

festgelegt. Der Parameter n wird Brechungsindex genannt und gibt das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum zu jener im Medium an.

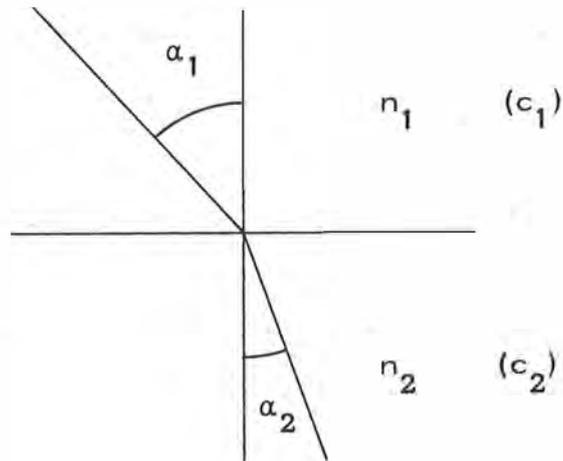
$$n = \frac{c_0}{c} \quad (3, 2)$$

Beim Übertritt in ein Medium anderer Lichtgeschwindigkeit (also mit anderem Brechungsindex) ändert ein Lichtstrahl mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im allgemeinen auch seine Richtung. Diese als Brechung oder Refraktion bezeichnete Erscheinung wird für optisch-isotrope^{*)} Stoffe durch das Brechungsgesetz von Snellius^{**)} beschrieben, das eine direkte Konsequenz des schon vorher angesprochenen Fermat'schen Prinzips ist.

*) Anm.: Das Licht hat im brechenden Medium nach allen Richtungen die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit; Gegensatz: Stoffe mit Doppelbrechungs-, Polarisations-eigenschaften.

***) Anm.: Von Snellius selbst nie veröffentlicht, sondern nur experimentell festgestellt, daher besonders in der französischen Literatur häufig Descartes zugeschrieben.

Abb. 17



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2 = \dots \text{const.} \quad (3, 3)$$

Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen dabei in einer Ebene. In einem Medium mit räumlich veränderlichem Brechungsindex tritt durch fortgesetzte Brechung eine Krümmung des Lichtstrahles auf. Ein solches Medium ist die Erdatmosphäre und man kann die Trennflächen von Schichten mit differentiell verschiedenen Brechungsindices in erster Näherung als konzentrische Kugelflächen auffassen, die die Erde umschließen.

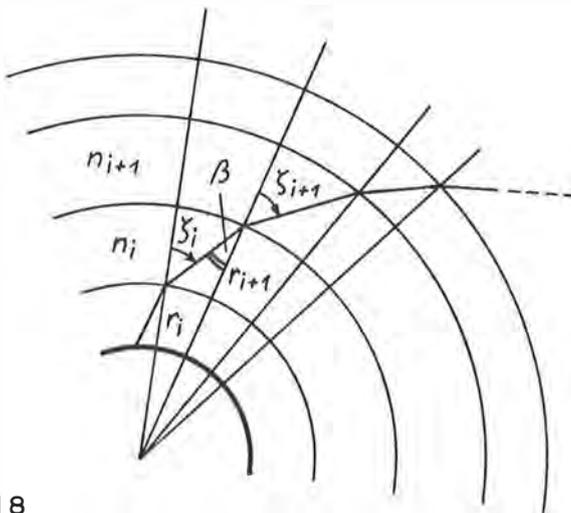


Abb. 18

$$\frac{\sin \alpha_{i+1}}{\sin \beta} = \frac{n_i}{n_{i+1}}$$

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta} = \frac{r_{i+1}}{r_i}$$

Aus Abb. 18 und mit den angeschriebenen Proportionen erhalten wir das Sphärische Brechungsgesetz von Snellius:

$$\boxed{n_i \cdot r_i \cdot \sin \zeta_i = n_{i+1} \cdot r_{i+1} \cdot \sin \zeta_{i+1} = \dots = \text{const.}} \quad (3, 4)$$

Diese auch als "Strahlgleichung" bekannte Beziehung besagt, daß für jeden Punkt der Lichtkurve im angenommenen kugelsymmetrischen Feld das Produkt aus Brechungsindex n , Mittelpunktsabstand r der zugehörigen Schicht und dem Sinus der Zenitdistanz ζ des Strahls konstant ist!

Wenn man nun ein differentielles Stück der Lichtbahn durch einen Kreisbogen annähert, so ist die zugehörige Krümmung im Polarkoordinatensystem (r, δ) gegeben durch:

$$r_L = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'r'' - r \cdot r''} \quad (3, 5)$$

$$r' = \frac{dr}{d\delta} = r \cdot \cot \zeta \quad (3, 6)$$

$$r'' = \frac{d^2r}{d\delta^2} = \frac{dr}{d\delta} \cot \zeta - \frac{r}{\sin^2 \zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\delta} \quad (3, 7)$$

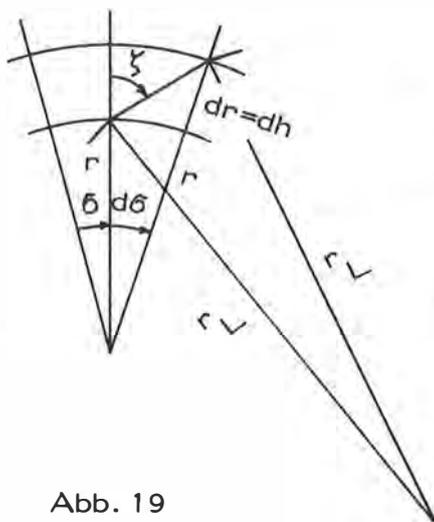


Abb. 19

Partielle Differentiation der Strahlgleichung (3, 4):

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{d\delta} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\delta} + \cot \zeta \frac{d\zeta}{d\delta} = 0$$

$\frac{dr}{d\delta}$ (3, 6) eingesetzt gibt:

$$\frac{d\zeta}{d\delta} = -1 - \frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \quad (3, 8)$$

Mit den Ausdrücken (3, 6), (3, 7), (3, 8) und $dr = dh$ ergibt sich nach einfachen trigonometrischen Umformungen aus (3, 5) die Krümmung der Lichtkurve im betrachteten differentiellen Bereich zu:

$$\boxed{\frac{1}{r_L} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \sin \zeta} \quad *) \quad (3, 9)$$

Da $n \neq 1$, können aus der Formel (3, 9) folgende wichtige Erkenntnisse gewonnen werden:

Die vertikale Krümmung des Zielstrahls wird einerseits physikalisch bestimmt durch die Änderung des Brechungsindex der Luft mit der Höhe $\frac{dn}{dh}$ und andererseits geometrisch festgelegt durch die Neigung ζ der Visur zu den Flächen mit gleichem Brechungsindex.

*) Anm.: In einer verallgemeinerten Ableitung, etwa nach Moritz (1962), tritt anstelle des Faktors $\frac{dn}{dh}$ der Gradient von n auf. Da aber gewöhnlich die Horizontalkomponente der Refraktion gegenüber der Größenordnung der Vertikalrefraktion vollständig zu vernachlässigen ist, darf man sich auf eine rein vertikale Luftschichtung und damit auf die Vertikalkomponente $\frac{dn}{dh}$ beschränken.

Der Brechungsindex n jedes Gases, also auch des Gasgemenges Luft, ist nach dem Gesetz von Gladstone - Dale von der Dichte abhängig:

$$\frac{n-1}{\rho} = \text{const.} = c \quad (c \dots \text{Refraktionskonstante}) \quad (3, 10)$$

Da die Luftdichte, mit Ausnahme der bodennahen Luftschichten, im allgemeinen mit der Höhe abnimmt, wird $\frac{dn}{dh}$ im Normalfall negativ sein und der Zielstrahl seine hohle Seite der Erdoberfläche zuwenden.

Unabhängig vom numerischen Wert von $\frac{dn}{dh}$ wird die Krümmung bei Visur in den Zenit (wegen $\sin \zeta = 0$) zu Null - der Strahl durchdringt die Schichten mit unterschiedlichem Brechungsindex ungebrochen.

Maximalen Einfluß übt $\frac{dn}{dh}$ im Horizont ($\sin \zeta = 1$) aus.

Die Luftdichte ρ steht nach der allgemeinen Zustandsgleichung für ideale Gase (Boyle - Mariotte - Gay - Lussac'sches Gesetz) mit den Parametern p (Druck) und T (absolute Temperatur) in direktem Zusammenhang:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad (3, 11)$$

R steht für die universelle Gaskonstante der Luft bei $p_0 = 1013,226 \text{ mb}$ und $T_0 = 273,2^\circ \text{ K}$ ($R = 286,8 [\text{m}^2 \text{ grad}^{-1} \text{ s}^{-2}]$).

$\frac{d\rho}{dh}$ und in der Folge $\frac{dn}{dh}$ und $\frac{1}{r_L}$ sind demnach Funktionen von Druck, Temperatur und den Änderungen dieser Parameter mit der Höhe.

$$\frac{dn}{dh} = f\left(p, T, \frac{dp}{dh}, \frac{dT}{dh}\right) \quad (3, 12)$$

Die empfindlichste Abhängigkeit besteht dabei vom vertikalen Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh}$.

3.2 DIE ERFASSUNG DER REFRAKTION

3.2.1 MITTLERE REFRAKTIONS-KOEFFIZIENTEN

Die einfachste und am häufigsten gebrauchte Annahme über die Zielstrahlkrümmung ist die Hypothese von Biot-Bouguer (Tardi, 1951). Dabei wird willkürlich ein Kreisbogen, also konstante Krümmung für die Lichtkurve vorausgesetzt. Der, das Maß der Krümmung festlegende, mittlere Refraktionskoeffizient k , (s. 2.1.2.1), ist dann durch die zusätzliche Messung der Gegenzenitdistanz ζ_{21} bestimmt.

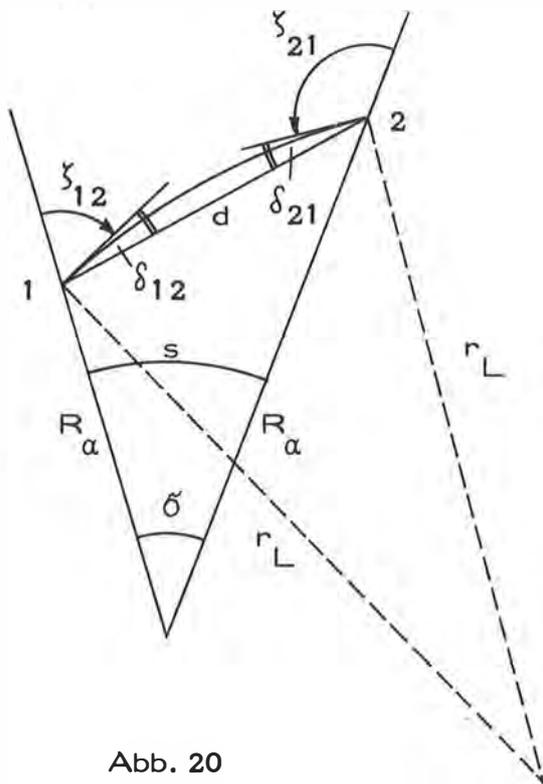


Abb. 20

$\zeta_{12}, \zeta_{21} \dots$ Ellipsoidische Zenitdistanzen

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_k = \frac{d}{2r_L} \cdot \varrho \quad (3, 13)$$

$$k = \frac{R_\alpha}{r_L} \quad (2, 11)$$

$$\sigma \doteq \frac{d \cdot \sin \zeta}{R_\alpha} \cdot \varrho \quad (3, 14)$$

$$\zeta = \zeta_{12} \text{ oder } \frac{\zeta_{12} + \zeta_{21}}{2}$$

oder ζ_{21} (unkritisch)

Mit dem Außenwinkelsatz der ebenen Trigonometrie finden wir aus Abb. 20 die Beziehung:

$$200 - \zeta_{12} - \delta_{12} + 200 - \zeta_{21} - \delta_{21} = 200 - \sigma \quad (3, 15)$$

$$200 - \zeta_{12} - \zeta_{21} + \sigma = \delta_{12} + \delta_{21} = 2\delta_k$$

$$\delta_k = 100 - \left(\frac{\zeta_{12} + \zeta_{21} - \sigma}{2} \right) \quad (3, 16)$$

δ_k ist der dem Kreisbogenverlauf des Zielstrahls entsprechende Refraktionswinkel.

Die Formeln (3, 13), (2, 11) und (3, 14) in die Beziehung (3, 15) eingesetzt führen zu:

$$k = \sin \zeta - \frac{R_a}{d} \cdot \frac{(\zeta_{12} + \zeta_{21} - 200)}{\varrho} \quad (3, 17)$$

Dies ist die strenge Formel für den mittleren Refraktionskoeffizienten, wie sie für stark geneigte Visuren angewendet werden muß.

Für flache Visuren ($\sin \zeta \doteq 1$) geht (3, 17) in die bekannte Näherungsformel über:

$$k = 1 - \frac{(\zeta_{12} + \zeta_{21} - 200)}{\sigma} \quad (3, 17a)$$

Mit (3, 17a) sind in der Vergangenheit eine Vielzahl von k -Bestimmungen durchgeführt worden. *) Als Ergebnis einer Ausgleichung von 28 k -Werten aus gegenseitigen Zenitdistanzen, die im Mittelgebirge in Hannover beobachtet wurden, fand Gauß 1823 den Mittelwert:

$$k_G = +0,1302 \pm 25\%, \quad (3, 18)$$

der im deutschsprachigen Raum zur Höhenbestimmung nach Formel (2, 12) verwendet wird. Andere Länder verwenden, aus ähnlichen Beobachtungsreihen abgeleitete k -Werte, die im Mittel zwischen $0,10 \leq k \leq 0,16$ liegen (Levallois, 1969; Bomford, 1980).

*) Anm.: Natürlich ist σ damals über die horizontale Seite s (aus Koordinaten) berechnet worden.

Wir wollen nun den Zahlenwert des Gauß'schen Refraktionskoeffizienten k_G benutzen, um eine Faustformel für die Größe des Refraktionswinkels δ bei kreisbogenförmigem Visurverlauf zu finden:

$$\delta^{cc} = \frac{d}{2r_L} \cdot \varphi^{cc} = \frac{d \cdot k}{2R_\alpha} \cdot \varphi^{cc} \quad \frac{\varphi^{cc}}{R_\alpha [\text{m}]} \doteq 0,1 \quad k = k_G = 0,13$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta_G^{cc} = 6,5^{cc}/d [\text{km}]} \quad (3,18a)$$

(3,18a) gibt den Betrag des mittleren Refraktionswinkels nach Gauß pro km Zielweite an.

In der Praxis treten jedoch sehr große Abweichungen von diesem Normalbetrag auf; aus der Erfahrung von unzähligen Beobachtungen weiß man, daß ein konstanter Refraktionskoeffizient k nicht existiert, sondern daß k zwischen beträchtlichen Extremwerten schwankt. Schränkt man die Variationsbreite von k auf das Intervall $-1 \leq k \leq +1$ ein, so liegt nur noch eine verschwindende Anzahl von tatsächlich aufgetretenen k -Werten außerhalb (Bahner t, 1970).

Die Gründe für die Abweichungen von $k_G = 0,13$ sind meteorologischer Natur und werden im nächsten Abschnitt eingehend behandelt. Dort wird auch angegeben, unter welchen Umständen $k_G = 0,13$ tatsächlich zutreffen kann.

Zum praktischen Wert des Gauß'schen Refraktionskoeffizienten kann nur gesagt werden, daß bei der überwiegenden Mehrzahl trigonometrischer Höhenbestimmungen eine andere Möglichkeit als die Verwendung von k_G aus wirtschaftlichen Gründen vollkommen ausgeschlossen ist. Unter Vorwegnahme erst später folgender Erkenntnisse läßt sich aber feststellen, daß, bei Vermeidung von bodennahen Visuren und Beobachtung um die Stunden des frühen Nachmittags, relativ geringe ($\pm 0,5$) Abweichungen von k_G zu erwarten sind.

3.2.2 DIE ABHÄNGIGKEIT DER REFRAKTION VOM MOMENTANEN ZUSTAND DER ATMOSPHERE

In Abschnitt 3.1. haben wir den Zusammenhang der Lichtstrahlkrümmung in einem beliebigen Punkt der Kurve mit dem dort herrschenden Vertikalgradienten des Brechungsindex hergestellt (3, 9) und im weiteren dessen Abhängigkeit von den Druck- und Temperaturverhältnissen angedeutet. Diese Abhängigkeit soll nun scharf formuliert werden. *)

Dazu differenzieren wir das Gesetz von Gladstone - Dale (3, 10):

$$\frac{dn}{dh} = c \cdot \frac{d\rho}{dh} \quad (3, 19)$$

und die allgemeine Zustandsgleichung für ideale Gase (3, 11):

$$\frac{d\rho}{dh} = \frac{1}{R \cdot T} \cdot \frac{dp}{dh} - \frac{p}{R \cdot T^2} \cdot \frac{dT}{dh} \quad (3, 20)$$

Gemeinsam mit der statischen Grundgleichung:

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dh \quad (3, 21)$$

(g... Schwerebeschleunigung)

und (3, 11) findet man aus (3, 19) und (3, 20):

Die Abhängigkeit des Vertikalgradienten des Brechungsindex von den meteorologischen Parametern p, T und $\frac{dT}{dh}$:

$$\boxed{\frac{dn}{dh} = -\frac{c}{R} \cdot \frac{p}{T^2} \cdot \left(\frac{g}{R} + \frac{dT}{dh} \right)} \quad (3, 22)$$

*) Anm.: Zum gleichen Ergebnis kommt man auch durch Differentiation der Formel von Barrel + Sears bei Unterdrückung von e.

Mit der eben gefundenen Formel (3, 22) und dem Krümmungsgesetz (3, 9) läßt sich jetzt der, für ein differentielles Stück der Lichtkurve gültige, lokale Refraktionskoeffizient $\alpha = \frac{R}{r} \alpha$ anschreiben:

$$\alpha = \frac{R}{n} \cdot \frac{c}{R} \cdot \frac{p}{T^2} \cdot \left(\frac{g}{R} + \frac{dT}{dh} \right) \cdot \sin \zeta \quad (3, 23a)$$

Nach Einsetzen mittlerer numerischer Werte für n , c , R , φ , R_α folgt die Fundamentalformel:

$$\alpha = 6,71 \cdot \frac{p}{T^2} \cdot (3,42 + \zeta) \cdot \sin \zeta \quad (3, 23b)$$

p in mmHg (Torr), T in $^{\circ}\text{K}$, $\zeta = \frac{dT}{dh}$ in $^{\circ}\text{C}/100 \text{ m}$

Past (1965) gibt für den Einfluß der Parameter p , T und $\frac{dT}{dh}$ auf α die Proportion an:

$$d\alpha(p) : d\alpha(T) : d\alpha\left(\frac{dT}{dh}\right) = 1 : 2 : 23$$

Wie schon zu Ende des Abschnitts 3.1 vorweggenommen, hat demnach der vertikale Temperaturgradient $\frac{dT}{dh}$ den weitaus stärksten Einfluß auf die Bahnkrümmung.

3.2.2.1 ATMOSPHERISCHE SCHICHTUNG

(Bahnert, 1970; Past, 1965; Keppke 1968; Tegeler 1971; Lepuschitz, 1981)

Nach den umfassenden Untersuchungen von Brocks (1939) und Levallois (1969), die eine Vielfalt meteorologischer Beobachtungen, besonders aber Sondenaufstiege, ausgewertet haben, scheint folgender Aufbau der unteren Atmosphäre (= Troposphäre, $h \cong 10$ km) gesichert:

Es lassen sich drei Luftschichten, tageszeit- und wetterabhängiger Mächtigkeit und Temperaturcharakteristik, unterscheiden:

- | | | | | |
|----------------|-------------------|----------------------|------------|------------------|
| 1 ^o | Bodennahe Schicht | $0 < h \cong$ | 20 [m] | |
| 2 ^o | Zwischenschicht | $20 \cong h \cong$ | 200 [m] | (nachts 500 m) |
| 3 ^o | Polytrope Schicht | $1500 \cong h \cong$ | 10.000 [m] | Übergangsschicht |

Dabei können die angegebenen Schichtgrenzen (20, 200, 1500 m) je nach Jahreszeit und Wetterlage um etwa die Hälfte ihres Wertes variieren.

ad 1^o: Die bodennahe Luftschicht ist tagsüber durch eine starke Temperaturabnahme und Dichtezunahme mit der Höhe gekennzeichnet. Die Temperaturabnahme kann im untersten Bereich $0 < h < 2$ m bei starker Sonneneinstrahlung den Grenzwert $\frac{dT}{dh} = -3,42^{\circ}/100$ m erreichen (geradliniger Zielstrahlverlauf, $\alpha = 0$) und sogar unterschreiten (Zielstrahl von Erde weggekrümmt, $\alpha < 0$). Das große Temperaturgefälle entsteht durch die Aufheizung des Bodens bei Sonneneinstrahlung. Die Ausbildung der Schicht beginnt etwa 1,5 Stunden nach Sonnenaufgang; die maximale Ausdehnung (20 - 30 m) wird um die Mittagszeit erreicht. Der Zustand der Schicht wird als "labil" bezeichnet, weil das hohe Temperaturgefälle zu einer turbulenten Bewegung der Luftteile, der sogenannten Konvektion führt. Von der Mittagszeit an erfolgt ein langsamer Abbau, der sich gegen Sonnenuntergang bis zur völligen Auflösung der Schicht beschleunigt.

Das Temperaturgefälle der bodennahen Luftschicht kann nach Brooks (1949) sehr gut durch eine logarithmische Funktion des Bodenabstandes h angenähert werden.

Nachts bildet sich häufig eine Inversionsschicht (Temperaturzunahme mit der Höhe, Zielstrahl stark zur Erde gekrümmt) aus, deren Mächtigkeit 20 m erreichen kann. Der Grund dafür ist, daß sich der Boden nach Sonnenuntergang rascher abkühlt als die freie Atmosphäre. Die untersten Luftschichten über dem Grund werden von dieser Abkühlung erfaßt und es kommt zu einer Temperaturzunahme mit der Höhe, die sich wieder logarithmisch darstellen läßt. Der Zustand wird als "stabil" bezeichnet, weil die Turbulenzen sehr gering bleiben (aufsteigende Luft gelangt in wärmere, absinkende in kältere Umgebung und wird so in beiden Fällen gezwungen, in die Ausgangslage zurückzukehren). Die Schichtausbildung beginnt schon vor Sonnenuntergang, das Ausdehnungsmaximum wird gegen Mitternacht erreicht. Gegen Sonnenaufgang wird die Inversion rasch abgebaut.

ad 2^o: Die über der bodennahen Luftschicht gelagerte Zwischenschicht ist vom Zyklus der Sonneneinstrahlung und der Ausstrahlung des Erdbodens wesentlich weniger betroffen. Ihre Ausbildung beginnt mit dem Stagnieren der Höhengausdehnung der bodennahen labilen Schicht am Morgen (Sonnenhöhe $\sim 30^\circ$ über Horizont) und die maximale Obergrenze von etwa 200 m Höhe wird noch vor Mittag erreicht. Kennzeichnend für die Schicht ist ein schwächeres Temperaturgefälle, das häufig den adiabatischen Grenzwert von $\frac{dT}{dh} = -0,98^\circ/100\text{ m}$ annimmt. Dann ist die Atmosphäre im "indifferenten Gleichgewicht", d.h. Luftteilchen können ohne Zuführung von Wärme auf- und absteigen. Der Grenzwert $\gamma_a = -0,98^\circ/100\text{ m}$ trennt den stabilen Zustand ($\gamma > -0,98^\circ/100\text{ m}$) vom labilen Zustand ($\gamma < -0,98^\circ/100\text{ m}$).

Der Abbau der Schicht ist noch vor Sonnenuntergang beendet und es beginnt die Ausbildung einer isothermen Zwischenschicht (im unteren Bereich noch leichte Inversion) mit bis zu 500 m Mächtigkeit um Mitternacht.

ad 3^o: In Höhen über ~ 1500 m ist das Temperaturgefälle im allgemeinen konstant mit $\gamma = -0,65^{\circ}/100\text{ m}$ und die zugehörige Schicht eine "polytrophe".

Zu zwei Zeitpunkten innerhalb eines Tages, nämlich 1,5 Stunden nach Sonnenaufgang und 1,5 Stunden vor Sonnenuntergang, reicht der konstante Gradient der polytropen Atmosphäre bis zum Boden. Dies sind die zur Entfernungsmessung am besten geeigneten Zeiten, weil dann die an den Streckenendpunkten erfaßten meteorologischen Daten als für den Zustand der dazwischen liegenden Atmosphäre repräsentativ angenommen werden können.

Tabelle 1 zeigt die beschriebenen Verhältnisse auf einen Blick: *)

γ [$^{\circ}\text{C}/100\text{m}$]	κ	Krümmung	atm. Zustand
$< -3,42$	< 0	v. Erde weg	} labil (überadiabatisch)
$= -3,42$	$= 0$	Gerade	
$-3,42 < \gamma < -0,98$	$0 < \kappa < 0,14$	zur Erde	} neutral (adiab.)
$= -0,98$	$= 0,14$	zur Erde	
$-0,98 < \gamma < -0,65$	$0,14 < \kappa < 0,16$	zur Erde	} stabil
$= -0,65$	$= 0,16$	zur Erde	
$-0,65 < \gamma < 0$	$0,16 < \kappa < 0,20$	zur Erde	} stabil
$= 0$	$= 0,20$	zur Erde	
> 0	$> 0,20$	zur Erde	stabil (Inversion)
$= -1,19$	$= 0,13 (k_G)$		

*) Anm.: Feuchteinfluß unterdrückt, $\sin \zeta = 1$, $t = 15^{\circ}$, $p = 720\text{ mm}$

3. 2. 2. 2 DIE PHYSIKALISCHEN BEDINGUNGEN FÜR EINEN KREISBOGENFÖRMIGEN VERLAUF DER VISUR

Aus den Erfahrungswerten über die unterschiedliche Schichtung der unteren Atmosphäre kann man schon folgern, daß besonders bei stark geneigten Visuren die Krümmung der Lichtkurve nicht konstant sein wird. Zu erwarten ist statt dessen verschiedene Krümmung innerhalb jedes Schichtbereiches, wobei der Übergang von einer Krümmung zur folgenden im Bereich der (fiktiven) Schichtgrenzen rasch bis sprunghaft vorstellbar ist. Aber selbst der kreisbogenförmige Verlauf innerhalb einer Schicht mit $\frac{dT}{dh} = \text{const.}$ (polytrop) ist wegen der Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe an einen ganz bestimmten Zahlenwert für $\frac{dT}{dh}$ gebunden. *)

Dieser Wert γ läßt sich bestimmen:

In Formel (3,9) wird der Einfachheit halber n und $\sin \zeta = 1$ gesetzt, Damit steht für die Krümmung des differentiellen Kreisbogenstücks:

$$\frac{1}{r_L} = - \frac{dn}{dh} = \text{const.}$$

Der Ausdruck (3,23a) für $\frac{dn}{dh}$ wird differenziert:

$$0 = -2 \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{dT}{dh} + \frac{dp}{dh}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dT}{dh} = \frac{T}{2p} \cdot \frac{dp}{dh}$$

*) Anm.: Andere, gleichwertige Voraussetzungen und Ableitungen für den Kreisbogenverlauf einer Lichtwelle:

- a) Lineare Abnahme der Luftdichte mit der Höhe (P a s t, 1965)
- b) Lineare Zunahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Höhe; Variationsrechnung (B a u l e, 1943)

und mit (3, 11) und (3, 21) weiter:

$$\boxed{\frac{dT}{dh} = -\frac{g}{2R} = -1,71^{\circ}/100 \text{ m}} \quad (3, 24)$$

Nur für ein konstantes Temperaturgefälle $\zeta = -1,71^{\circ}/100 \text{ m}$ kann die Krümmung des Visurstrahls konstant werden. Der zugehörige lokale Refraktionskoeffizient errechnet sich aus (3, 23) zu: $\varkappa = +0,10$ (konstant entlang des Kreisbogens, daher auch $k = +0,10$).

Folgerung:

Da ein $\zeta = -1,71^{\circ}/100 \text{ m}$ im allgemeinen nur bei starker Sonneneinstrahlung in der bodennahen Luftschicht auftritt, dort aber eine logarithmische Temperaturabnahme beobachtet wird, ist streng genommen ein Kreisbogen als geometrischer Ort für die Lichtkurve gar nicht möglich!

In Tabelle 1 ist auch der zum Gauß'schen Refraktionskoeffizienten $k_G = +0,13$ (hier als lokaler Refraktionskoeffizient betrachtet) gehörige Gradient ζ angegeben.

$$\varkappa = +0,13 \quad \zeta = -1,19^{\circ}/100 \text{ m}$$

$k = +0,13$ ist also nur bei einem polytropen ζ von $-1,19^{\circ}/100 \text{ m}$ möglich. Die geometrische Ermittlung von $0,13$ aus dem Kreisbahnmodell widerspricht aber (siehe oben) der physikalischen Bedingung.

$$\zeta = -1,71^{\circ}/100 \text{ m},$$

so daß die Anwendung eines k einen Modellfehler bedingt.

Wäre der Temperaturverlauf in der Atmosphäre stetig und α aus (3, 23) in jedem Punkt der Lichtkurve bekannt, könnte der Refraktionswinkel δ nach der

Formel von Fearnley

$$\delta = \frac{1}{R_\alpha} \int_0^d \frac{d-x}{d} \alpha dx \quad (3, 25)$$

aufsummiert werden. (Auch Brocks, 1939; Dufour, 1952).



Abb. 21

Wie schon aus der Anschauung her zu erwarten, haben die Brechungsverhältnisse in Standpunktnähe (x klein) den stärksten Anteil am Gesamtbetrag von δ . Die Anwendung der Formel (3, 25) scheitert vorerst daran, daß α bestenfalls für die Endpunkte der Visur bekannt sein wird. An eine in-situ Erfassung der bestimmenden Parameter γ , T und p durch Befliegung des gesamten Zielstrahls kann ja aus Kostengründen normalerweise nicht gedacht werden. Derartige Versuche sind aber im Rahmen von Universitätsforschungsprojekten sowohl mit Flugzeugen (Schrefl, Gerstbach, Rössler, 1981) als auch mit Modellhubschraubern (Univ. Stuttgart) erfolgreich durchgeführt worden; allerdings besonders in Hinblick auf die meteorologische Reduktion von Entfernungsmessungen. Desgleichen lassen sich auch Verbesserungen der Endpunktsdaten mit Ballonaufstiegen und Gradiententürmen erreichen (Schmid, 1977; Lepuschitz, 1981). Im Streben nach einer wirtschaftlichen Lösung sind um 1950 Gedanken entwickelt worden, mit Hilfe von Modellvorstellungen der Atmosphäre, die Parameter γ , T und p für diskrete Abschnitte des Zielstrahls aus meteorologischen Messungen am Standpunkt abzuleiten.

3. 2. 3 METEOROLOGISCHE MODELLE

Die grundlegenden Gedanken über die zeitlich-räumliche Temperaturverteilung in der Atmosphäre haben Levallois und Masson d'Autume (1953) formuliert. Ausgangspunkt für ihre Theorie waren die empirisch gewonnenen Gesetzmäßigkeiten in Aufbau, Höhenabhängigkeit und zeitlicher Veränderung von Temperaturfeldern in jenem Bereich der Atmosphäre, der für geodätische Messungen in Frage kommt:

- 1^o Die Temperatur ist von der Höhe und der Zeit abhängig.
- 2^o Der Tagesgang der Temperatur ist einer Sinusschwingung ähnlich.
- 3^o Die Amplitude dieser Schwingung nimmt von einem Maximum in Bodennähe mit der Höhe exponentiell ab (rasch gedämpfte Schwingung).
- 4^o Die Temperaturmaxima bzw. -minima treten mit zunehmender Höhe mit wachsender Verspätung auf (Phasenverschiebung nimmt zu).

Schlußfolgerung aus 1^o bis 4^o:

Die vom Erdboden zurückgeworfene Wärmestrahlung der Sonne (85 % der atmosphärischen Erwärmung) breitet sich nach oben hin in Wellenform langsam aus, wobei die Schwingung rasch gedämpft wird. *)

Die von Levallois angesetzte Form für $T = T(h, t)$ lautet:

$$T(h, t) = T_o + \gamma_o \cdot (h-h_o) + A(h) \cdot f\left(t - \frac{h-h_o}{v}\right) + \phi(t) \quad (3, 26)$$

*) Anm.: Formale Übereinstimmung mit einem aus der Fourier'schen Differentialgleichung der Wärmeleitung gefundenen Ausdruck für $T = T(h, T)$ (Past, 1965).

Parameter der Formel (3, 26):

T Temperatur in der Höhe h zur Zeit t
T_o mittlere regionale Temperatur am Boden (Höhe h_o)
γ_o mittlerer konstanter Temperaturgradient ($\approx -0,5^\circ/100\text{ m}$)
$A(h)$ Höhenveränderliche Amplitude mit Maximum am Boden
$f(t)$ periodische Funktion der Zeit zur Beschreibung der Temperaturschwingung
$\frac{h-h_o}{V}$ Phasenverzögerung
V Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle (0,3 - 0,5 km/h)
$A(h) \cdot f\left(t - \frac{h-h_o}{V}\right)$ Leitungsglied
$\phi(t)$ Strahlungsglied (Direktwirkung der Sonneneinstrahlung, höhenunabhängig; Gang und Amplitude aus Beobachtungen bekannt)

Die Amplitude $A(h)$ stellt Levallois durch eine exponentiell abnehmende Funktion der Amplitude $A(h_o)$ am Boden dar:

$$A(h) = A(h_o) \cdot e^{-k^2(h-h_o)} \quad , \quad (3, 27)$$

wobei er per definitionem $A(h_o) = 1$ setzt.

Der Dämpfungskoeffizient k^2 variiert nach der Erfahrung aus vielen Sondenaufstiegen in Abhängigkeit von der Zeit ($f(t)$) zwischen den Grenzen 4,5 und 1,5. Eine leichte Veränderlichkeit von k^2 mit der Luftfeuchtigkeit ist zwar beobachtet, aber noch nicht formuliert worden. So findet man bei Levallois die empirische Beziehung:

$$k^2 = 2,00 - 0,20 \cdot f(t)$$

Die fundamentale periodische Funktion $f(t)$ wird aus Temperaturmessungen am Boden ($T(h_o, t)$) mit der Beziehung (3, 28) gewonnen:

$$f(t) = T(h_o, t) - (T_o + \phi(t)) \quad (3, 28)$$

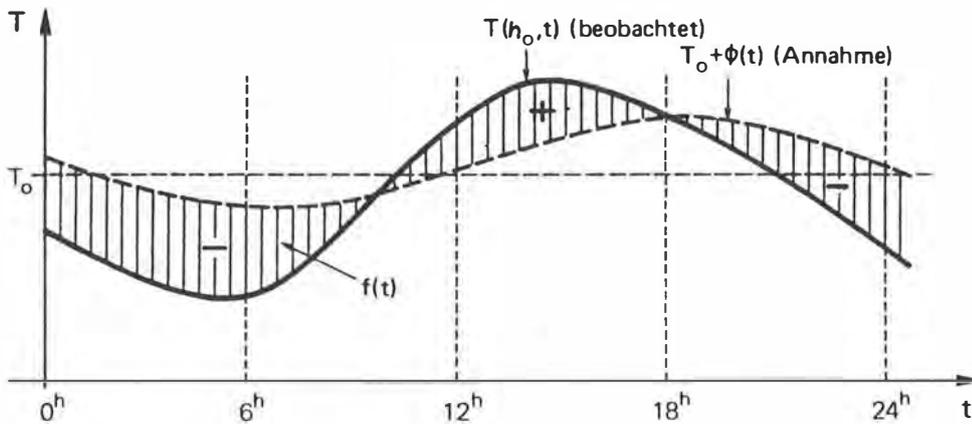


Abb. 22

Durch ausgedehnte Beobachtungsreihen weiß man, daß die beiden Kurven $T(h_o, t)$ und $T_o + \phi(t)$ in Abb. 22 sich innerhalb eines Tages zu zwei bestimmten Zeitpunkten schneiden:

etwa um 10^h und 17^h im Sommerquartal bzw.

gegen 11^h und 16^h während Frühjahr und Herbst.

Für diese, natürlich regional und jahreszeitlich korrekt zu ermittelnden Zeiten, gilt also:

$$T(h_o, t) = T_o + \phi(t)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$f(t) = 0$$

Zur praktischen Ermittlung der Werte von $f(t)$ verschiebt man am einfachsten ein transparentes Graphikum von $T_o + \phi(t)$ in Ordinateurichtung gegen die Graphik von $T(h_o, t)$ bis sich die beiden Kurven zu den richtigen Zeitpunkten schneiden ($f(t) = 0$). $f(t)$ kann dann als jeweilige Differenz der Ordinatenwerte abgelesen werden.

Damit ist der Ausdruck (3, 26) vollständig bestimmt:

$$T(h, t) = T_o + \zeta_o \cdot (h - h_o) + e^{-k^2(h-h_o)} \cdot f\left(t - \frac{h-h_o}{V}\right) + \phi(t) \quad (3, 29)$$

(3, 29), nach der Höhe differenziert, liefert den Temperaturgradienten:

$$\zeta(h, t) = \zeta_o - e^{-k^2(h-h_o)} \cdot \left[k^2 \cdot f\left(t - \frac{h-h_o}{V}\right) + \frac{1}{V} \cdot f'\left(t - \frac{h-h_o}{V}\right) \right] \quad (3, 30)$$

Dabei ist f' die Änderung der Fundamentalfunktion $f\left(t - \frac{h-h_o}{V}\right)$ mit der Zeit t .

Die Anwendung der Formeln (3, 23) und (3, 25) in Verbindung mit dem Ausdruck (3, 30) hat bei Höhentriangulationen in Frankreich recht plausible Ergebnisse für die Refraktionswinkel geliefert (Levallois, 1969).

Ihrer theoretischen Ableitung nach gilt die Levallois'sche Formel (3, 30) eigentlich nur für die Atmosphäre über einer wärmestrahrenden, ebenen Fläche der Höhe h_o . Die gute Übereinstimmung gerechneter und beobachteter Refraktionswinkel auch bei unruhigem Geländeprofil erreichte Levallois durch die Interpretation der Größe $h-h_o$ als jeweiligen Bodenabstand der Visur. Diese Modellvorstellung paßt natürlich nicht mehr bei großen Höhenunterschieden, weil dann $f(t)$ nicht für alle Bodenpunkte gleich vorausgesetzt werden kann.

Für den nach 3. 2. 2 bodennahen Bereich gilt nach (Best, 1952; Kukkamäki, 1938) eine logarithmische Temperaturänderung, die durch die umfangreichen Messungen von Brocks (1949) bestätigt worden ist.

$$\log \zeta = \log a + b \cdot \log h \quad \text{bzw.} \quad \zeta = a \cdot h^b \quad (3, 31)$$

a.... Temperaturgradient in 1m Höhe

b.... Exponent, im Mittel $\doteq -1 \quad \Rightarrow \quad \zeta \doteq \frac{a}{h}$

h.... Höhe über Boden

a ist eine Funktion der Tageszeit; tagsüber negativ, nachts positiv.

Das entsprechende Temperatugesetz lautet

$$T(h, t) = T_o + a(t) \cdot \ln \frac{h}{h_o} \quad (3, 32)$$

und speziell für $h_o = 1 \text{ m}$

$$T(h, t) = T_o + a(t) \cdot \ln h \quad (3, 32a)$$

Auf Basis der Temperatugesetze (3, 29) und (3, 32) hat Wunderlin (1979) in zehnjähriger Arbeit ein umfangreiches Computerprogramm (TGREFR) zur Refraktionswinkelberechnung entwickelt, das durch Einbeziehung zusätzlicher Parameter eine respektable Annäherung an die tatsächlichen atmosphärischen Verhältnisse zur Beobachtungszeit erreicht.

Wunderlin berechnet aus dem Datum, der geographischen Breite und der Meereshöhe den Grundwert γ_o des Temperaturgradienten für den Beobachtungsort. Die untersuchte Visur wird entsprechend der markanten Knickpunkte des in digitaler Form erfaßten Geländes in Abschnitte konstanter Lichtstrahlkrümmung unterteilt. Für diese Abschnitte wird der krümmungsbestimmende Temperaturgradient als Funktion von γ_o , der mittleren Visurhöhe h über Grund, dem Wetterfaktor W und der Levallois'schen Fundamentalfunktion $f(t)$ berechnet. Dabei wird der Wetterfaktor W aus den meteorologischen Angaben über Bewölkung, Luftfeuchtigkeit und Windstärke ermittelt. Die Grundlagen für die Bestimmung von $f(t)$ sind W , die Abstrahlungsgröße A und der Einstrahlungswinkel σ zwischen Sonnenrichtung und Geländenormaler. A wird spekulativ als von T_o abhängig angenommen.

Die Berechnung des Temperaturfeldes $T(h, t)$ erfolgt durch numerische Integration der Gradienten $\gamma(h, t)$. Die so erhaltenen Modelltemperaturen und Gradienten können anschließend mit Hilfe beobachteter Temperaturen (Standpunkt, Zielpunkt, Sonden) verbessert werden, um eine Anpassung an die momentanen atmosphärischen Verhältnisse zu erreichen.

Schließlich werden für die Abschnitte mit ungefähr konstantem ζ die Krümmungen ermittelt und der Refraktionswinkel δ wird nach der Formel von Fearnley (3, 25) aufsummiert.

Einen von Wunderlin noch ungeklärt beschriebenen Einfluß stellt die jeweilige Bodenbeschaffenheit des Geländes in ihrer Wirkung auf W und A dar. In gemischt bewachsenen Gelände sind jedenfalls plausible Resultate erzielt worden, deren Genauigkeit von Wunderlin aus mittleren Abweichungen zu etwa $\pm 15^{\text{CC}}$ abgeschätzt wird.

Für den Bereich der bodennahen Luftschichten in labilem Zustand lassen sich die Refraktionsverhältnisse durch das Monin-Obuchow'sche Turbulenzmodell klären (Lepuschitz, 1981). Als wichtige zusätzliche Parameter zu Temperatur, Luftdruck und Feuchte gehen der turbulente Wärmestrom und die Windgeschwindigkeit ein. Der turbulente Wärmestrom wird dabei gewöhnlich aus den Gliedern der Wärmehaushaltsgleichung errechnet, deren Beträge teilweise gemessen (Effektivpyranometer, Heat-Flux-Platten, Psychrometer, Anemometer) und teilweise empirisch oder unter Annahme von Hypothesen bestimmt werden. Die Refraktionswinkelberechnung erfolgt dann in ähnlicher Weise wie beim Levallois'schen Modell.

Beide Modelle sind jedoch erfahrungsgemäß empfindlich gegenüber Abweichungen von der angenommenen Schichtung der Atmosphäre (Wunderlin, 1979, Seite 207; Lepuschitz, 1981, Seite 143).

3. 2. 4 REFRAKTIONS-KOEFFIZIENTEN AUS ÜBERBESTIMMUNGEN

In trigonometrischen Höhennetzen kann nach Hradilek (1980) unter bestimmten Voraussetzungen der wirksame Refraktionskoeffizient k_{ij} für jede Visur $\overline{P_i P_j}$ aus den vorhandenen Überbestimmungen abgeleitet werden.

Die primäre Voraussetzung besteht darin, daß alle Beobachtungsstationen des Netzes entweder auf markanten Bergspitzen oder im Tal auf Türmen mit etwa 12 m Höhe angelegt sein müssen (Hradilek, 1968). Dann bleibt ein anomales Refraktionsverhalten einer bestimmten Visur im Regelfall aus und die k_{ij} für die von einer Station ausgehenden Zielstrahlen können durch eine Kombination zweier Funktionen ausgedrückt werden.

$$k_{ij} = f(P_i) + g(P_i, P_j) \quad (3, 33)$$

Von den zahlreichen von Hradilek erprobten Funktionen f und g soll hier nur jenes Paar angegeben werden, das auf einen Vorschlag von (Izotov-Pellinen, 1955) zurückgeht:

Stationsfunktion $f(P_i) = k_i$

Visurfunktion $g(P_i, P_j) = \frac{c_i}{\overline{H_{ij}}}$

$$k_{ij} = k_i + \frac{c_i}{\overline{H_{ij}}}$$

(3, 34)

Der Ansatz (3, 34) ist von der Vorstellung bestimmt, daß für Standpunkte außerhalb der besonders gestörten Schicht die Zielstrahlen ein vom Azimut unabhängiges, einheitliches Refraktionsverhalten k_i zeigen und begrenzte Unterschiede in den k_{ij} von der mittleren Höhe der jeweiligen Visur über dem Bodenprofil (äquivalente Höhe $\overline{H_{ij}}$) abhängig sind. Die Unbekannten k_i und c_i können im Ausgleich für jeden Netzpunkt P_i berechnet werden. Damit k_i und c_i tatsächlich konstant angenommen werden dürfen, müssen natürlich alle Beobachtungen von einer Station aus rasch hintereinander gemessen werden.

Trifft die Bedingung des gleichen Refraktionsverhaltens zu, so müssen auch gleiche (bzw. längenproportionale) Refraktionsänderungen Δk_{ij} bei allen von einem Standpunkt aus gemessenen Ziellinien auftreten. Dies prüft Hradilek durch zwei Wiederholungsmessungen im Abstand von jeweils zwei Stunden. Weicht eine Visur aus dem empirischen Fehlerband $2m_k$ (m_k aus Tabelle Hradilek, 1980 in Abhängigkeit der Visurlänge) deutlich aus, so muß sie im Ausgleich entweder unterdrückt (sehr kleines Gewicht) oder mit einem speziellen Ansatz für k_{ij} (zusätzliche Unbekannte) versehen werden (Abb. 23).

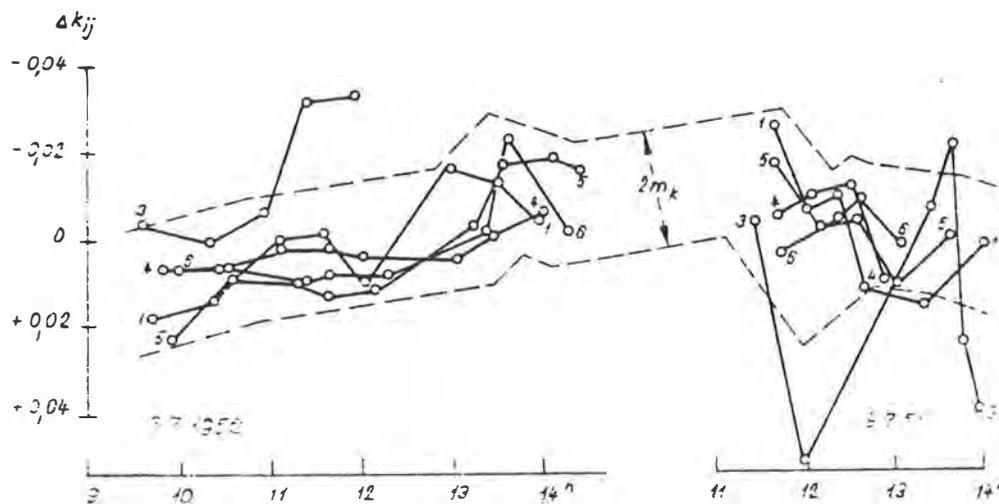


Abb. 23

Die Hradilek'sche Methode ist in zahlreichen Höhennetzen eingehend getestet worden und hat 'gesamtheitlich sehr viel versprechende Resultate ($m_h = \pm 2 - 3$ cm bei Visurlängen von 3 - 7 km) erbracht (Hradilek, 1968).^{*)}

*) Anm.: Um die oben genannte Genauigkeit einhalten zu können, müssen je nach Netzausdehnung in einer bestimmten Anzahl von Netzpunkten (Tal und Berg) die ellipsoidischen Höhen (aus geometrisch-astronomischen Nivellements) und die Lotabweichungen (aus astronomischen Ortsbestimmungen) vorliegen.

Große Bedeutung hat die Methode vor allem für die Dreidimensionale Geodäsie (Raumtriangulation) und für die Lotabweichungsbestimmung aus Zenitdistanzmessungen nach dem Verfahren von Finsterwalder (1937).

Der Hradilek'sche Ansatz versagt bei Beobachtungen aus der bodennahen Schicht (also Türme über den Talpunkten unbedingt notwendig) und bei Sonne-Schattenverhältnissen (in engeren Gebirgstälern mit steilen Flanken leider oft unvermeidlich), weil dann k_i nicht mehr vom Azimut unabhängig ist. Es werden zusätzliche Unbekannte zur Refraktionsdarstellung nötig, die natürlich die Anzahl der Überbestimmungen im Ausgleich empfindlich verringern.

3.2.5 DIE DIREKTE BESTIMMUNG DES REFRAKTIONSWINKELS MIT HILFE DER DISPERSION

In den bisherigen Abschnitten des Kapitels 3 haben wir stillschweigend n als unabhängig von der Wellenlänge λ des Lichtes betrachtet. Tatsächlich steht aber der Brechungsindex in Funktion der Wellenlänge, also:

$$n = n(\lambda) \qquad (3, 35)$$

Den Effekt, daß verschiedenfarbiges Licht auch verschieden stark gebrochen wird, bezeichnet man als Dispersion. Dabei wird kurzwelliges Licht (UV-Bereich) stärker gebrochen als langwelliges Licht (Infrarot-Bereich) (Abb. 24). Die - allerdings sehr kleine - Erscheinung der Dispersion tritt z. B. bei unkorrigierten Linsen in Form der chromatischen Fehler auf.

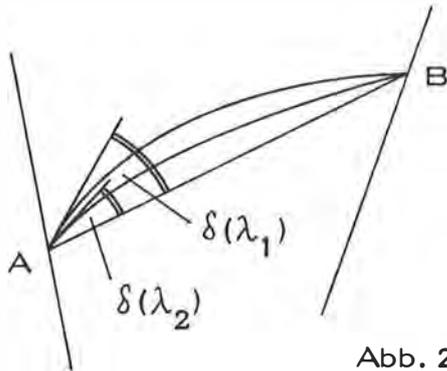


Abb. 24

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

$$\Delta \delta_1^2 = \delta(\lambda_1) - \delta(\lambda_2) \quad (3, 36)$$

Nacheiner Idee von Nähbauer kann man sich den Dispersionseffekt zunutze machen, um den Refraktionswinkel zu bestimmen. Zwei stark gebündelte Lichtstrahlen unterschiedlicher Wellenlänge mit dem Ursprung B erzeugen in einem optischen System in A zwei (durch die Kleinheit des Dispersionseffektes nur differentiell) verschiedene Bildpunkte. Gelingt es, den sehr kleinen Abstand dieser beiden Bildpunkte (bzw. den Dispersionswinkel direkt) auszumessen, so kann der Refraktionswinkel $\delta(\lambda)$ nach folgender Formel (Tengström, 1967) berechnet werden:

$$\delta_A(\lambda) = (n_o(\lambda) - 1) \cdot \frac{\Delta \delta_1^2}{n_o(\lambda) - n_o(\lambda_2)} + Q \quad (3, 37)$$

$n_o(\lambda)$ ist dabei der für die jeweilige Wellenlänge λ nach der Formel von Cauchy berechnete Vakuumbrechungsindex.

Q bezeichnet ein Korrekturglied wegen Luftfeuchtigkeit, das in der Regel vernachlässigt werden kann.

Nähbauer scheiterte bei seinen praktischen Versuchen daran, daß er keine Lichtquellen zur Verfügung hatte, die monochromatisches Licht mit großer Intensität und starker Bündelung aussenden konnten. Das Lichtproblem ist seit der Erfindung des Lasers befriedigend gelöst. Weiterhin problematisch bleibt jedoch die Messung des kleinen Dispersionswinkels, bzw. die Ausmessung des Abstandes der beiden Bildpunkte für λ_1 und λ_2 .

Tengström (1967) und Prilepin (1981) arbeiten mit einer interferometrischen Methode^{*)}, Brein (1968) mit Filtern und photographischen Platten und schließlich Williams (1981) mit einem optisch-elektronischen Kompensationssystem. Vor allem mit der Konstruktion von Williams konnten wiederholbare gute Absolutgenauigkeiten bei Messungen im Feld erzielt werden ($\pm 6^{\text{CC}}$).

Die Hoffnung nach einem Seriengerät solcher Bauart ist aber praktisch gleich Null; zu kostspielig sind die Grundbausteine (zwei Laser, ein Cassegrain Fernrohr) und zu aufwendig die notwendigen Zusatzapparaturen, um die systematischen Fehler bei der Messung des Dispersionswinkels auszuschalten (drehbares 3-Tripelprismensystem).

Für einen gebräuchlichen Unterschied in den verwendeten Wellenlängen $\Delta\lambda = 200 \text{ nm}$ ist der zu messende Winkel $\Delta\delta_1^2$ nur ungefähr 1/60 des Refraktionswinkels, also im Bereich von wenigen Zehntelsekunden pro km.

Die Tendenz geht zur Zeit zu einem theodolitartigen Gerät (Williams, 1978; Glissmann, 1978), das mit Hilfe eines Systems von zwei Optiken den Abstand der Bilder zweier verschiedenfarbiger Lichtquellen am Zielpunkt genau dann zum Verschwinden bringt, wenn das Fernrohr in die refraktionsfreie Richtung (geradlinige Verbindung A-B) weist. Leider ist noch kein Zeitpunkt bekannt, wann ein solches Gerät erwartet werden kann.

*) Anm.: Probleme, weil 1^o) durch Szintillation (kurzperiodische Änderungen der Refraktion) keine deutlichen Interferenzen zustande kommen und 2^o) die Interferenzen des blauen Lichtes überhaupt sehr schwach sind (starke Extinktion in der Atmosphäre für blaues Licht); ähnlich bei Fotoabbildung: Szintillation erzeugt statt deutlichem Punkt verschwommenes Scheibchen.

3. 2. 6 SPEZIELLE MESSANORDNUNGEN ZUR VERRINGERUNG, AUSSCHALTUNG ODER BESTIMMUNG DES REFRAKTIONS-EINFLUSSES

Wann immer sich dem Geodäten eine Aufgabe stellt, bei der mit einem schwer erfaßbaren Fehlereinfluß auf eine Meßgröße gerechnet werden muß, versucht er, spezielle Meßanordnungen zu finden, die den Einfluß minimieren, ausschalten oder bestimmen lassen. Solche Anordnungen in Hinblick auf den Refraktionseinfluß werden im folgenden beschrieben.

3. 2. 6. 1 GEGENSEITIG UND GLEICHZEITIG GEMESSENE ZENIT-DISTANZEN

Die einfachste Möglichkeit die fehlerhafte Wirkung des unzureichend bekannten Refraktionseinflusses zu verringern, ist die Messung gegenseitig-gleichzeitiger Zenitdistanzen. Das Mittel $\Delta \bar{h}_{12}$ aus den nach Formel (2, 12) berechneten Höhenunterschieden Δh_{12} und $-\Delta h_{21}$ ist nicht mehr mit der Unsicherheit der einzelnen Refraktionswinkel δ behaftet, sondern hängt nur mehr von ihrer Differenz $\delta_{12} - \delta_{21}$ genauigkeitsmäßig ab. Es kann demnach eine Genauigkeitssteigerung um $\sqrt{2}$ gegenüber einer einseitigen Höhenunterschiedsbestimmung erwartet werden. Die gleichzeitige Messung der beiden Zenitdistanzen erhöht die Wahrscheinlichkeit, daß δ_{12} und δ_{21} möglichst wenig voneinander abweichen.

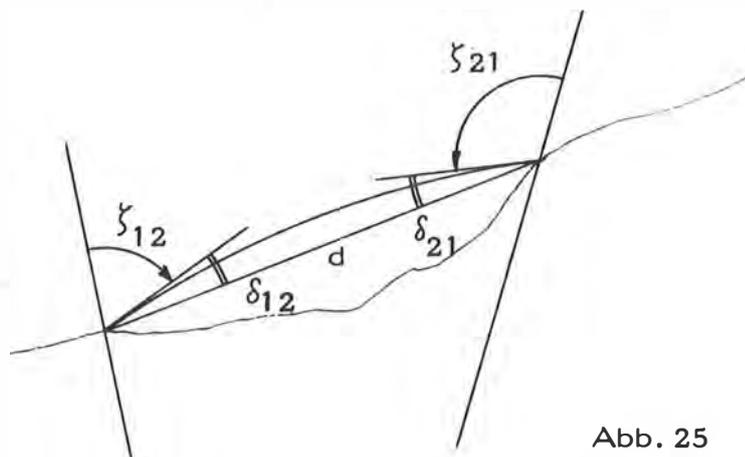


Abb. 25

Die Erdkrümmungsglieder fallen bei der Bildung von $\Delta \bar{h}$ heraus; $\Delta \bar{h}$ ist daher unabhängig vom gewählten R_a .

Mit (2,10) und $\sin \zeta_{12} \doteq \sin \zeta_{21}$:

$$\Delta \bar{h}_{12} = \frac{\Delta h_{12} - \Delta h_{21}}{2} = d \cdot \frac{(\cos \zeta_{12} - \cos \zeta_{21})}{2} - d \cdot \sin \zeta_{12} \left(\frac{\delta_{12} - \delta_{21}}{2} \right)^* \quad (3, 38)$$

$$m_{\Delta \bar{h}}^-(\zeta_{12}) = \pm \frac{d}{2} \sin \zeta_{12} \cdot \frac{m_{\zeta_{12}}}{\varrho} \quad m_{\Delta \bar{h}}^-(\zeta_{21}) = \pm \frac{d}{2} \sin \zeta_{12} \cdot \frac{m_{\zeta_{21}}}{\varrho}$$

Mit $m_{\zeta_{12}} = m_{\zeta_{21}} = m_{\zeta}$:

analog:

$$m_{\Delta \bar{h}}^-(\zeta) = \pm \frac{d \cdot \sin \zeta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m_{\zeta}}{\varrho} \quad m_{\Delta \bar{h}}^-(\delta) = \pm \frac{d \cdot \sin \zeta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m_{\delta}}{\varrho}$$

Faustformel:

$$m_{\Delta \bar{h}}^-(\zeta) = \pm 1 \text{ mm/km} \cdot m_{\zeta}^{\text{cc}} \quad m_{\Delta \bar{h}}^-(\delta) = \pm 1 \text{ mm/km} \cdot m_{\delta}^{\text{cc}}$$

Da die Distanz meist einseitig gemessen wird, gilt für m_d aus 2.1.2.3:

$$m_{\Delta \bar{h}}^-(d) = \pm \cos \zeta \cdot m_d$$

$$m_{\Delta \bar{h}}^- = \pm \sqrt{\cos^2 \zeta \cdot m_d^2 + \frac{d^2 \sin^2 \zeta}{2} \cdot \frac{m_{\zeta}^2 + m_{\delta}^2}{\varrho^2}} \quad (3, 39)$$

*) Anm.: Wenn man sich nicht aus meteorologischen Beobachtungen Näherungswerte für $\delta_{12} - \delta_{21}$ beschaffen kann, wird das ganze Glied gleich Null gesetzt (Biot - Bouguer).

3. 2. 6. 2 HÖHENBESTIMMUNG AUS GEMESSENEN DISTANZEN

Hradilek hat 1958 als erster auf die Möglichkeit hingewiesen, bei der Bestimmung großer Höhenunterschiede völlig auf die unsicheren Zenitdistanzen zu verzichten und statt dessen elektromagnetisch gemessene Distanzen als Parameter heranzuziehen.

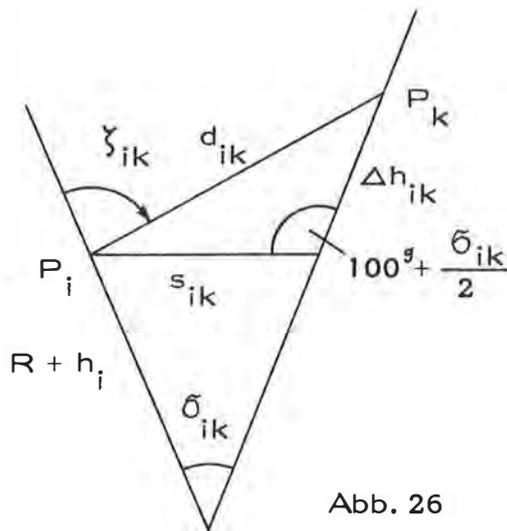


Abb. 26

- d_{ik} ... gemessene Schrägdistanz
- s_{ik} ... aus Koordinaten abgeleitete horizontale Seite in Höhe von P_i
- σ_{ik} ... Zentriwinkel zwischen den Ellipsoidnormalen von P_i und P_k
- Δh_{ik} ... Ellipsoidischer Höhenunterschied

Mit den Größen aus Abb. 26 ergibt sich unter Verwendung des Cosinussatzes eine quadratische Gleichung für den ellipsoidischen Höhenunterschied Δh_{ik} :

$$\Delta h_{ik} = -s_{ik} \cdot \sin \frac{\sigma_{ik}}{2} \pm \sqrt{d_{ik}^2 - s_{ik}^2 \cos^2 \frac{\sigma_{ik}}{2}} \quad (3, 40)$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist für $\zeta < \frac{\pi}{2}$ positiv, für $\zeta > \frac{\pi}{2}$ negativ zu wählen. Bei der Untersuchung der Fehlereinflüsse von m_d und m_s auf $m_{\Delta h}$ setzen wir ohne Genauigkeitsverlust:

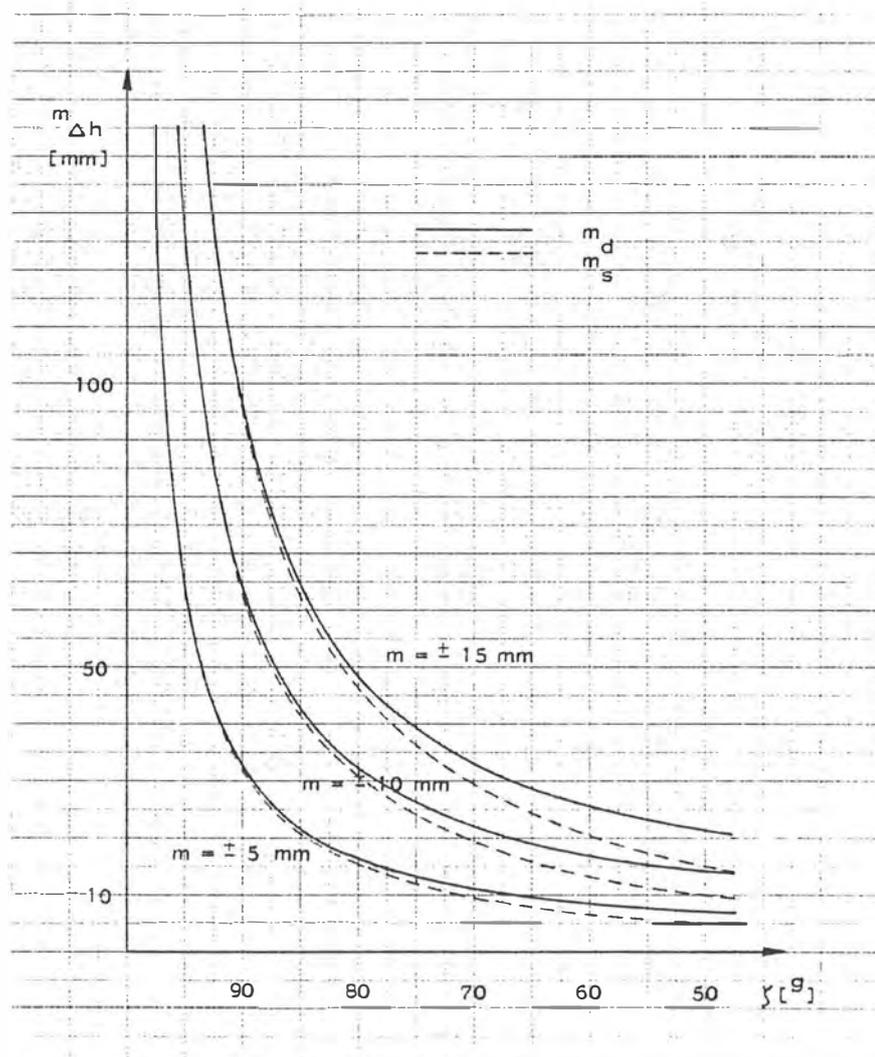
$$\sigma_{ik} = \frac{s_{ik}}{2R}, \quad \sin \frac{\sigma_{ik}}{2} = \frac{\sigma_{ik}}{2}, \quad \cos \frac{\sigma_{ik}}{2} = 1$$

Mit der Beziehung $s_{ik} \doteq d_{ik} \cdot \sin \zeta_{ik}$ und unter Vernachlässigung kleiner Größen gibt das Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$m_{\Delta h_{ik}} = \pm \sqrt{\frac{m_d^2}{\cos^2 \zeta_{ik}} + \tan^2 \zeta_{ik} m_s^2} \quad (3, 41)$$

Dem Fehlerausdruck (3, 41) ist sofort abzulesen, daß Formel (3, 40) für eine horizontale Visur unbestimmt wird und überhaupt bei großen Zenitdistanzen nicht vorteilhaft anzuwenden ist. Für große Höhenunterschiede jedoch kann die Anwendung von (3, 40) nur zweckmäßig sein. Wie die Genauigkeit von (3, 40) mit abnehmender Zenitdistanz wächst, ist in Diagramm 4 für drei verschiedene mittlere Fehler m der elektronisch gemessenen Distanz d und der horizontalen Seite s dargestellt.

Diagr. 4



Das Hradilek'sche Verfahren ist, da rationell anwendbar, ein echtes Verfahren für die Praxis. In einem bestehenden, bereits ausgeglichenen Triangulationsnetz brauchen nur mehr die besonders steilen Distanzen elektromagnetisch dazugemessen werden, um die Höhengenaugigkeit der Hochpunkte effektiv zu steigern. Grundvoraussetzung dafür ist aber eine sehr hohe Punktlagegenauigkeit im Netz, weil der mittlere Fehler der aus Koordinaten abgeleiteten Horizontalstrecke s fast ebenso stark in die Höhengenaugigkeit eingeht (siehe Diagramm 4) wie der mittlere Fehler der neugemessenen Schrägdistanz d . Der Zusammenhang zwischen m_s und dem mittleren Richtungsfehler m_R sowie der Genauigkeit der Lotabweichungen m_γ ist in der Dissertation von Zeger (1978) sehr ausführlich behandelt. Liegt eine hohe Punktlagegenauigkeit ($\approx \pm 10$ mm) im Netz vor, so kann man sich recht einfach die Grenzwerte der Zenitdistanzen verschaffen, ab denen für vorgegebenen Distanzfehler m_d und geschätzten Refraktionsfehler m_δ eine Genauigkeitssteigerung bei Anwendung der Hradilek'schen Methode zu erwarten ist. Für diese Abschätzung gebraucht man günstigerweise den relativen mittleren Distanzfehler $|\frac{m_d}{d}|$. *)

$$m_{\Delta h}(\delta) = \pm d \cdot \sin \zeta \cdot \frac{m_\delta}{\rho} \qquad m_{\Delta h}(d) = \pm \frac{m_d}{\cos \zeta}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke folgt: $\sin 2\zeta = 2 \cdot |\frac{m_d}{d}| \cdot \frac{\rho}{m_\delta}$

Tab. 2

$\frac{m_d}{d}$ \ / m_δ	± 1 mm/km	± 5 mm/km	± 10 mm/km	± 15 mm/km
$\pm 5^{cc}$	91,8	/	/	/
$\pm 10^{cc}$	95,9	78,0	/	/
$\pm 15^{cc}$	97,3	86,0	67,7	/
$\pm 20^{cc}$	98,0	89,7	78,0	59,6

*) Anm.: Nach 2.1.2.5 ist ja der stärkste Fehlereinfluß die Unsicherheit des Refraktionswinkels. Es dürfen daher für die Abschätzung alle anderen Größen fehlerfrei gesetzt werden.

Zeger (1978) zeigt in seiner Dissertation eine Erweiterung des Hradil'schen Verfahrens zu einer überbestimmten Meßanordnung, indem er einen Gipfelpunkt von drei Talpunkten aus mit elektromagnetisch gemessenen Schrägdistanzen verbindet.

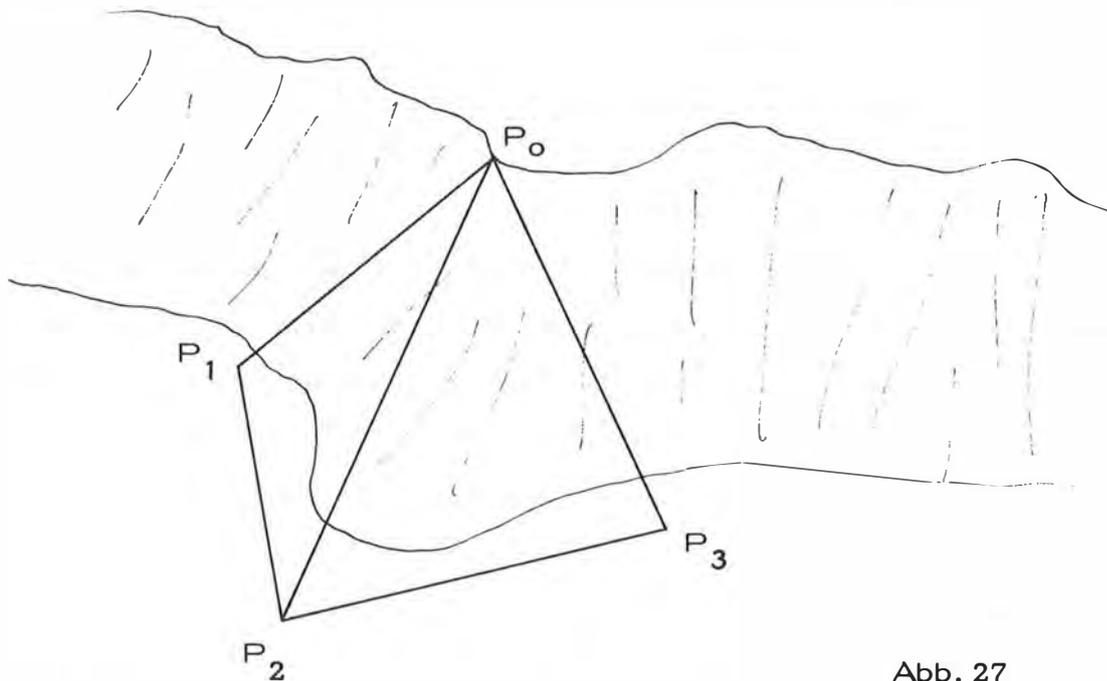


Abb. 27

Aus den gemessenen Richtungen, die mit den in allen Punkten bestimmten Lotabweichungen reduziert werden, rechnet Zeger über die im Tal mit möglichst wenig Höhenunterschied gemessenen Distanzen $\overline{P_1 P_2}$ und $\overline{P_2 P_3}$ die drei Horizontalabstände nach P'_0 . Da sich bei den Dreiecksauflösungen $\overline{P_2 P'_0}$ zweimal unabhängig ergibt, liegen drei Überbestimmungen für die Höhe von P_0 vor. Gleichung (3,40) kann demnach viermal angewendet werden und die Einzelresultate können einer gewichteten Mittelung zugeführt werden.

Zeger empfiehlt bei Anwendung der Methode eine Schranke von $\zeta < 80^\circ$ bzw. $\zeta > 120^\circ$ einzuhalten.

3. 2. 6. 3 VERFAHREN VON MALKOVSKIJ (Bahner t, 1970)

Malkovskij stellte 1968 ein Verfahren vor, bei dem durch Beobachtung eines eingefluchteten Hilfspunktes Z etwa in der Mitte der Visur 1-2 (Abb. 28), die Refraktionskoeffizienten k_1 auf P_1 und k_2 auf P_2 berechnet werden können. Voraussetzung ist die Annahme kreisbogenförmiger Strahlenverläufe und die Identität der wirksamen Koeffizienten zum Zielpunkt und zum Hilfspunkt.

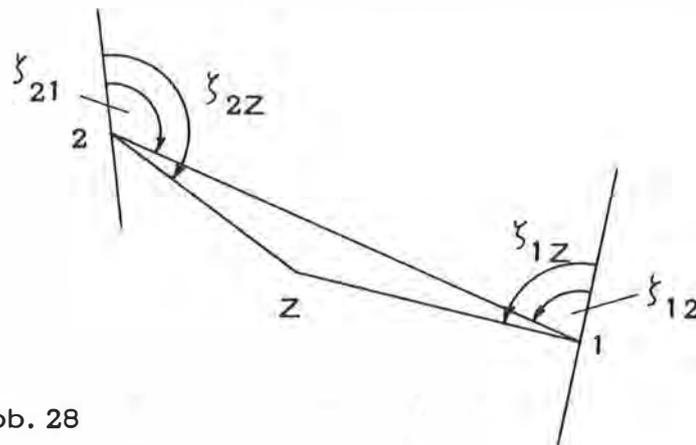


Abb. 28

Der Höhenschluß des Dreiecks 1Z2 lautet:

$$\Delta h_{1Z} - \Delta h_{2Z} = \Delta h_{12} \quad (3, 42)$$

Für die Δh_{ik} setzt man Formel (2, 12) und zerlegt:

$$\Delta h_{ik} = d_{ik} \cdot \cos \gamma_{ik} + \frac{d_{ik}^2 \sin^2 \gamma_{ik}}{2R} - \frac{d_{ik}^2 \sin \gamma_{ik}}{2R} \cdot k_i = \Delta h_{ik}^! - a_{ik} \cdot k_i$$

Damit wird (3, 42) zu:

$$\Delta h_{1Z}^! - a_{1Z} \cdot k_1 - \Delta h_{2Z}^! + a_{2Z} \cdot k_2 = \Delta h_{12}^! - a_{12} \cdot k_1$$

Die Kombination der Δh_{ik}^I gibt den Widerspruch w :

$$w = (\Delta h_{1Z}^I - \Delta h_{2Z}^I - \Delta h_{12}^I) = (a_{1Z} - a_{12}) \cdot k_1 - a_{2Z} \cdot k_2 \quad (3,43)$$

Der mittlere Refraktionskoeffizient \bar{k} für die Visur 1-2 berechnet sich nach (3,17):

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = \sin \zeta - \frac{R_a}{d_{12}} \cdot \left(\frac{\zeta_{12} + \zeta_{21} - 200^g}{\varrho \cdot g} \right) = \bar{k}$$

und weiter $k_2 = 2\bar{k} - k_1$

In (3,43) eingesetzt und umgeformt:

$$k_1 = \frac{w + 2a_{2Z} \cdot \bar{k}}{a_{1Z} + a_{2Z} - a_{12}} \quad (3,44)$$

Mal'kovskij gibt bei seinen Versuchsmessungen eine Genauigkeitssteigerung von 75 % gegenüber Verwendung eines konstanten Refraktionskoeffizienten an. Aus den in Abschnitt 3.2.2 besprochenen Gründen erscheinen aber dem Verfasser die von Mal'kovskij getroffenen Voraussetzungen problematisch, vor allem wenn der vertikale Abstand des Hilfspunktes Z zur Visur 1-2 groß wird. Darüber hinaus ist Formel (3,44) leider auch numerisch ungünstig, weil k_1 aus dem Quotienten zweier sehr kleiner Werte errechnet wird, was nach der Regel von Lallande Unsicherheiten mit sich bringt. Bei ruhig verlaufendem Bodenprofil und geringem Abstand zwischen Z und 1-2 kann jedoch durchaus mit einer Minderung der Refraktionsunsicherheit gerechnet werden.

3. 2. 6. 4 DAS VERTIKALE DREIECK (METHODE VON SANCHEZ)^{*)}

Beim "2^{ème} Symposium de Géodésie à trois dimensions" 1962 in Cortina d'Ampezzo berichtete der Argentinier Sanchez über die ersten Ergebnisse von Refraktionswinkelbestimmungen mit Hilfe der "Methode des vertikalen Dreiecks". Dieses Verfahren ist bemerkenswert einfach; sein Erfolg hängt hauptsächlich von der erreichten Distanzmeßgenauigkeit ab.

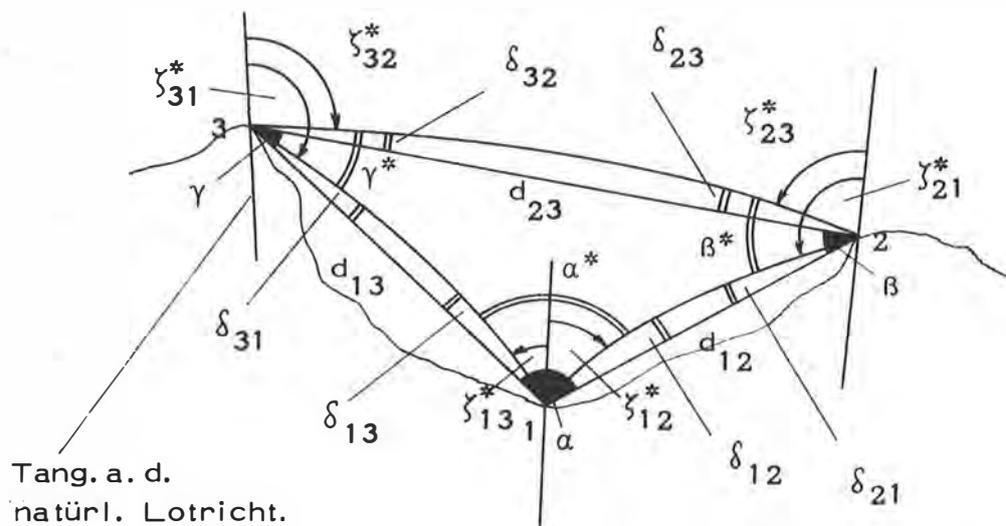


Abb. 29

Wenn bei zwei höhenmäßig zu bestimmenden Hochpunkten 2 und 3 der Meßpunkt 1 im Tal in der Vertikalebene der beiden Hochpunkte gewählt wird, so bilden diese drei Punkte ein vertikales Dreieck. Werden in diesem Dreieck die drei Schrägdistanzen (d_{12} , d_{13} , d_{23}) mit sehr hoher

^{*)} Anm.: Da dem Verfasser eine ausführliche Arbeit von Sanchez über das Problem des vertikalen Dreiecks leider nicht zugänglich gewesen ist, sind die nötigen Formeln und Zusammenhänge nach Vortragsberichten (Sanchez, 1962, 1967) selbst abgeleitet worden (Wunderlich, 1980). In beschränktem Maß sind daher Abweichungen zu den Überlegungen von Sanchez möglich.

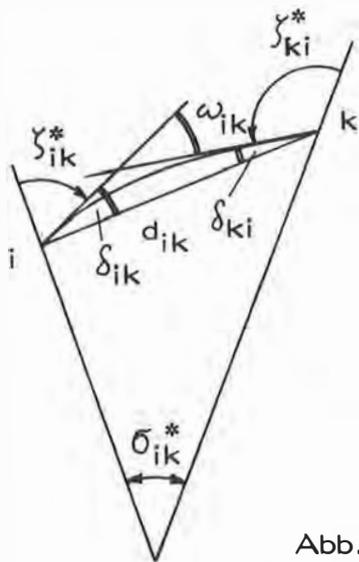
Genauigkeit bestimmt, dann können aus ihnen über den Cosinus- oder den Halbwinkelsatz die refraktionsfreien Dreieckswinkel (α, β, γ) errechnet werden. In den Differenzen dieser Winkel mit den aus den beobachteten Zenitdistanzen (ζ_{ik}^*) gebildeten, refraktionsbehafteten Winkeln ($\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$) sind jeweils zwei der sechs gesuchten Refraktionswinkel (δ_{ik}) in einer Linearkombination enthalten.

Diese Zusammenhänge lassen sich in folgenden drei Gleichungen ausdrücken:

$\psi_1 = \alpha - \alpha^* = \arccos \frac{d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2}{2d_{12}d_{13}} - (\zeta_{12}^* + \zeta_{13}^*) = \delta_{12} + \delta_{13}$	(3, 45a)
$\psi_2 = \beta - \beta^* = \arccos \frac{d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2}{2d_{12}d_{23}} - (\zeta_{21}^* - \zeta_{23}^*) = \delta_{21} - \delta_{23}$	(3, 45b)
$\psi_3 = \gamma - \gamma^* = \arccos \frac{d_{13}^2 + d_{23}^2 - d_{12}^2}{2d_{13}d_{23}} - (\zeta_{31}^* - \zeta_{32}^*) = \delta_{31} - \delta_{32}$	(3, 45c)

Eine zweite Gruppe von drei linearen Gleichungen für je zwei Refraktionswinkel δ_{ik} läßt sich leicht finden, wenn man mit Hilfe je zweier gegenseitiger Zenitdistanzen und des von den Tangenten an die natürlichen Lotlinien eingeschlossenen Zentriwinkels δ_{ik}^* den Schnittwinkel ω_{ik} der beiden Tangenten an die Lichtkurve berechnet (Abb. 30). (Vergleiche 3. 2. 1)

$\omega_{12} = 200^g + \delta_{12}^* - (\zeta_{12}^* + \zeta_{21}^*) = \delta_{12} + \delta_{21}$	(3, 46a)
$\omega_{13} = 200^g + \delta_{13}^* - (\zeta_{13}^* + \zeta_{31}^*) = \delta_{13} + \delta_{31}$	(3, 46b)
$\omega_{23} = 200^g + \delta_{23}^* - (\zeta_{23}^* + \zeta_{32}^*) = \delta_{23} + \delta_{32}$	(3, 46c)



$$\omega_{ik} = \delta_{ik} + \delta_{ki}$$

(Außenwinkelsatz)

Abb. 30

Mit (3, 45) und (3, 46) liegt ein System von sechs linearen Gleichungen für die sechs unbekanntenen Refraktionswinkel δ_{ik} vor:

$$\begin{aligned} \delta_{12} + \delta_{13} &= \psi_1 \\ \delta_{21} - \delta_{23} &= \psi_2 \\ \delta_{31} - \delta_{32} &= \psi_3 \\ \delta_{12} + \delta_{21} &= \omega_{12} \\ \delta_{13} + \delta_{31} &= \omega_{13} \\ \delta_{23} + \delta_{32} &= \omega_{23} \end{aligned} \quad (3, 47)$$

Wie leicht zu erkennen ist, liegt bei (3, 47) eine lineare Abhängigkeit vor, denn:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \omega_{12} + \omega_{13} - \omega_{23}$$

Die Unbestimmtheit des Systems ist geometrisch unschwer einsehbar (Wunderlich, 1980):

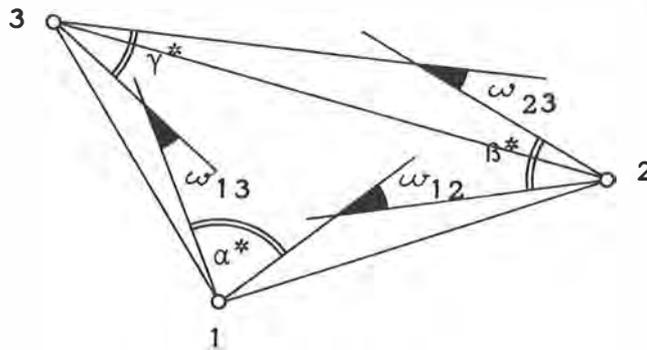


Abb. 31

Das durch (3, 47) mathematisch formulierte Problem besteht nämlich geometrisch darin, in einem fest vorgegebenen Dreieck drei bekannte, durch ihre Schenkel materialisierte, Winkel (α^* , β^* , γ^*), so um ihre Zentren (1, 2, 3) zu verdrehen, daß ihre gegenseitigen Schnittwinkel gleich ω_{12} , ω_{13} und ω_{23} werden. Für jede vorgegebene Lage eines Winkels (z. B. α^*) gibt es nur eine einzige Lage der beiden restlichen Winkel (β^* , γ^*), die diese Bedingung erfüllt. Da aber die Ausgangslage des Winkels α^* beliebig ist, sind auch die Lagen von β^* und γ^* unbestimmt (vergleiche: Orientierungsunbekannte).

Zur Beseitigung der Unbestimmtheit von (3, 47) bieten sich die verschiedensten Formen von Zusatzbedingungen an. Sanchez stellte die folgenden beiden Hypothesen zur Wahl:

1^o Kreisbogenannahme nach Biot - Bouguer (siehe 3. 2. 6. 1) für den Visurstrahl zwischen den Gipfelpunkten 2 und 3.

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{\omega_{23}}{2} \quad (3, 48)$$

Ein Kreisbogenverlauf ist zwar nach 3. 2. 2 fraglich, die beiden Refraktionswinkel können aber bei ausgesetzten Gipfelpunkten mit nicht zu unterschiedlicher Höhenlage durchaus gleich groß erwartet werden.

Von (3, 47) verbleiben jetzt fünf Gleichungen für die restlichen vier unbekanntem Refraktionswinkel:

$$\begin{aligned}\delta_{12} + \delta_{13} &= \psi_1 \\ \delta_{21} &= \psi_2 + \frac{\omega_{23}}{2} \\ \delta_{31} &= \psi_3 + \frac{\omega_{23}}{2}\end{aligned}\tag{3, 49}$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} + \delta_{21} &= \omega_{12} \\ \delta_{13} + \delta_{31} &= \omega_{13}\end{aligned}$$

mit der Verträglichkeitsbedingung:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \omega_{23} = \omega_{12} + \omega_{13}\tag{3, 50}$$

Aus den letzten vier Gleichungen (3, 49) gewinnt man:

$$\begin{aligned}\delta_{21} &= \psi_2 + \frac{\omega_{23}}{2} \\ \delta_{31} &= \psi_3 + \frac{\omega_{23}}{2} \\ \delta_{12} &= \omega_{12} - \psi_2 - \frac{\omega_{23}}{2} \\ \delta_{13} &= \omega_{13} - \psi_3 - \frac{\omega_{23}}{2}\end{aligned}$$

Mit der Rechenprobe: $\delta_{12} + \delta_{13} = \psi_1$

2^o Annahme gleichen Refraktionsverhaltens für die beiden vom Talpunkt ausgehenden Visuren 1-2 und 1-3.

$$\delta_{12} : \delta_{21} = \delta_{13} : \delta_{31} = \text{const.} = c \quad (3, 51)$$

Diese Hypothese scheint bei allen Fällen, wo zur Beobachtungszeit keine deutlichen Licht-Schattenverhältnisse (etwa: 1, 2 im Schatten, 3 in der Sonne) herrschen, berechtigt. Sie empfiehlt sich besonders dann zur Anwendung, wenn ein beträchtlicher Höhenunterschied zwischen den Gipfelpunkten 2, 3 die Annahme von (3, 48) in Frage stellt.

Aus (3, 47) ergibt sich mit (3, 51) ein System von sechs Gleichungen für fünf Unbekannte:

$$\begin{aligned} c \cdot \delta_{21} + c \cdot \delta_{31} &= \psi_1 \\ \delta_{21} - \delta_{23} &= \psi_2 \\ \delta_{31} - \delta_{32} &= \psi_3 \\ (c+1) \cdot \delta_{21} &= \omega_{12} \\ (c+1) \cdot \delta_{31} &= \omega_{13} \\ \delta_{23} + \delta_{32} &= \omega_{23} \end{aligned} \quad (3, 52)$$

wieder mit der Verträglichkeitsbedingung (3, 50):

$$\omega_{12} + \omega_{13} - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 = \omega_{23}$$

Zur Lösung addiert man die Gleichungen für ω_{12} und ω_{13} und setzt deren Summe in die Gleichung für ψ_1 ein.

Dann folgt:

$$c = \frac{\psi_1}{\omega_{12} + \omega_{13} - \psi_1}$$

und weiter:

$$\delta_{21} = \frac{\omega_{12}}{c+1}$$

$$\delta_{12} = \frac{c}{c+1} \cdot \omega_{12}$$

$$\delta_{31} = \frac{\omega_{13}}{c+1}$$

$$\delta_{13} = \frac{c}{c+1} \cdot \omega_{13}$$

$$\delta_{23} = \frac{\omega_{12}}{c+1} - \psi_2$$

$$\delta_{32} = \frac{\omega_{13}}{c+1} - \psi_3$$

und als Re-
chenprobe:

$$\delta_{23} + \delta_{32} = \omega_{23}$$

3. 2. 6. 4. 1 DIE ABWEICHUNG DES VERTIKALEN DREIECKS VON EINER VERTIKALEBENE

Wenn zu Beginn dieses Abschnitts von drei Punkten gesprochen wurde, die in der gleichen Vertikalebene liegen sollen, so ist das unter Vernachlässigung der Tatsache geschehen, daß eine solche Anordnung in Strenge gar nicht möglich ist.

Schon zwischen zwei Punkten in nicht spezieller Lage auf dem Ellipsoid sind ja bekanntlich zwei Vertikalebenen (Normalschnittsebenen) definiert, und zwar jeweils durch einen Punkt und die Ellipsoidnormale im anderen Punkt. Da zwei Ellipsoidnormale im allgemeinen windschief zueinander stehen, fallen die beiden Vertikalebenen gewöhnlich auch nicht zusammen, sondern schließen einen sehr kleinen Winkel miteinander ein. Dieser Winkel läßt sich nach bekannten Formeln (Jordan/Eggert/Kneissl, 1969) berechnen, ist aber bei den Größen der betrachteten Meßanordnungen jedenfalls zu vernachlässigen.

Festgehalten werden muß aber, daß die drei Punkte der vertikalen Meßanordnung eine Ebene festlegen, die mit keiner der sechs durch sie definierten Normalschnittsebenen im allgemeinen exakt zusammenfallen wird.

Geht man bei dieser Betrachtung nun vom Ellipsoid zum Erdkörper über, so wird die Windschiefe der Lote noch durch die Lotabweichungen vergrößert. Es wird klar, daß der Talpunkt gar nicht streng zwischen den beiden Bergpunkten eingefluchtet werden kann.

Es ist daher zu untersuchen, ab welchem Ausweichen des Talpunktes aus der Flucht, meßbare Änderungen der Distanzen und Zenitdistanzen auftreten würden.

Bei den Distanzen reicht eine triviale Abschätzung mit einem rechtwinkligen Dreieck aus.

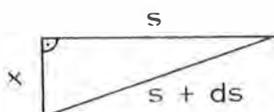


Abb. 32

s[m]	x[m]	ds = 1mm
500	1	
1000	1,4	
1500	1,7	
2000	2	

Die Grenzen, ab welchem Ausweichen μ der Lotrichtung aus der Vertikalebene des Zielpunkts eine Zenitdistanzänderung $d\zeta = 1^{\text{cc}}$ auftreten würde, hat Rosenthaler (1982) untersucht. Auf der Gauß'schen Einheitskugel stellt ZP die Zenitdistanz ζ in der Vertikalebene des Zielpunkts, Z'P die Zenitdistanz $(\zeta + d\zeta)$ in der Vertikalebene des Standpunkts dar.

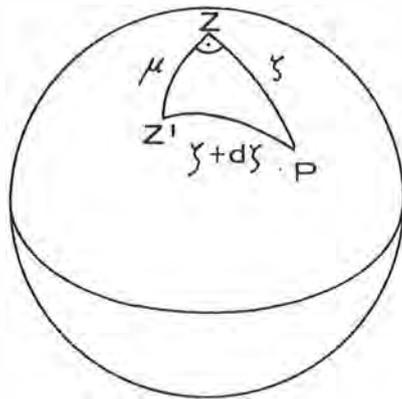


Abb. 33

Mit dem Cosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie ergibt sich:

$$\cos(\zeta + d\zeta) = \cos\zeta \cos\mu + \sin\zeta \sin\mu \cos 100^{\text{g}}$$

Mit Taylor und der Reihe für $\cos\mu$

$$\cos\zeta - \sin\zeta \frac{d\zeta}{\varrho} = \cos\zeta \cdot \left(1 - \frac{\mu^2}{2\varrho^2}\right)$$

und es steht schließlich:

$$\mu^{\text{cc}} = \pm \sqrt{2 \tan\zeta \cdot d\zeta^{\text{cc}} \cdot \varrho^{\text{cc}}}$$

$d\zeta = 1^{\text{cc}}$ wird erreicht bei:

ζ	μ
95^{g}	$40^{\text{c}} 22^{\text{cc}}$
90^{g}	$28^{\text{c}} 35^{\text{cc}}$
80^{g}	$19^{\text{c}} 80^{\text{cc}}$
70^{g}	$15^{\text{c}} 81^{\text{cc}}$

Tab. 4

Tab. 4 läßt deutlich erkennen, daß bei realistischen Beträgen der Lotwindschiefe (wenige $^{\text{cc}}$) bzw. des dadurch verursachten Ausweichens aus der Flucht keine merkbare Änderung der Zenitdistanz zu erwarten ist.

Zur Untersuchung, ab welchem Ausweichen aus der Flucht eine meßbare Änderung ($d\zeta = 1^{\text{CC}}$) in den Zenitdistanzen auftritt, greift man am einfachsten zu folgender geometrischen Vorstellung:

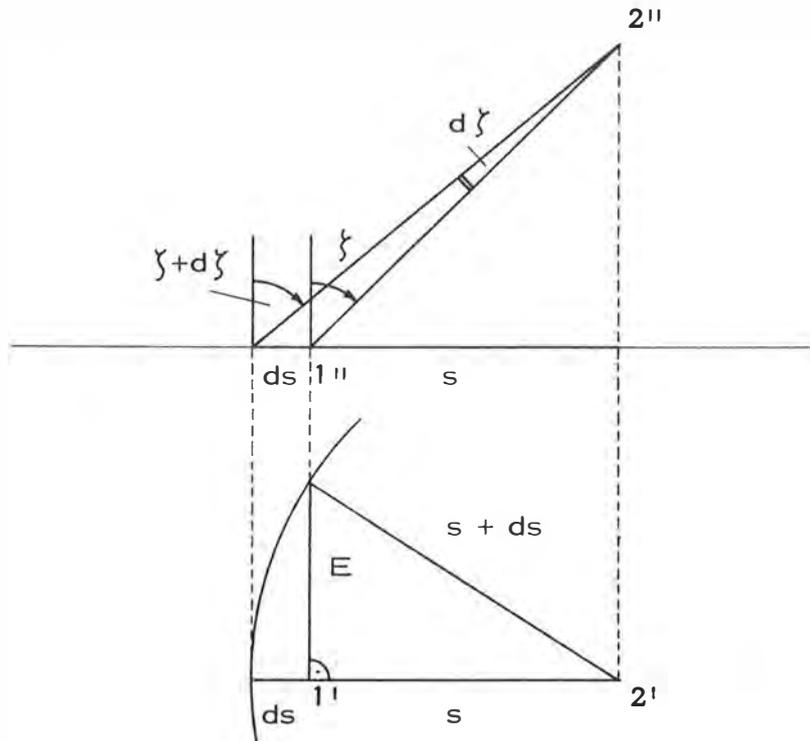


Abb. 34

Wir fragen vorerst nach der Exzentrizität ds der horizontalen Seite s , die eine Änderung der Zenitdistanz um $d\zeta = 1^{\text{CC}}$ bewirkt. Läßt man anschließend die gefundene Seite $s + ds$ den Basiskreis eines Kegels mit Spitze in 2 beschreiben, so ist die, dem jeweiligen ds entsprechende, Fluchtabweichung E aus einem rechtwinkligen Dreieck abzulesen.

$$ds = \frac{2s}{\sin 2\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\rho}$$

$$E = \sqrt{(s+ds)^2 - s^2}$$

$\zeta [^{\circ}]$	95		90		80		70	
$s [m]$	ds	E	ds	E	ds	E	ds	E
500	1,0	3,2	0,5	2,3	0,3	1,6	0,2	1,4
1000	2,0	6,3	1,0	4,5	0,5	3,3	0,4	2,8
1500	3,0	9,5	1,5	6,8	0,8	4,9	0,6	4,2
	ds	E	ds	E	ds	E	ds	E
	[cm]	[m]	[cm]	[m]	[cm]	[m]	[cm]	[m]

Tab. 5

Es ist daher durch Fluchtungsungenauigkeiten von wenigen cm keine Ungenauigkeit in den Zenitdistanzen zu erwarten.

3. 2. 6. 4. 2 DIE VORAUSZUSETZENDE GENAUIGKEIT DER SCHRÄGDISTANZEN

Die Distanzmessung ist der heikelste Punkt der Methode von Sanchez. Mit ihrer Präzision steht und fällt der Erfolg der Refraktionswinkelbestimmung. Wie im folgenden gezeigt wird, ist eine ungeheuer hohe Meßgenauigkeit nötig, um die aus den Distanzen abgeleiteten Soll-Dreieckswinkel mit Sekundengenauigkeit zu erhalten.

In einem ebenen Dreieck mit den Seiten a , b , c errechnen sich die Winkel α , β , γ nach dem Cosinus-Satz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

(β , γ durch zyklische Vertauschung)

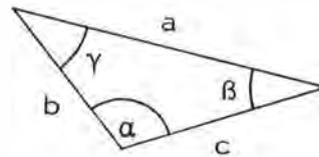


Abb. 35

Durch Differentiation:

$$2a \cdot da = 2b \cdot db + 2c \cdot dc - 2c \cos \alpha \cdot db - 2b \cos \alpha \cdot dc + 2bc \sin \alpha \frac{d\alpha}{\rho}$$

$$\frac{d\alpha}{\rho} = \underbrace{\left(\frac{a}{bc \sin \alpha}\right)}_{C_a} \cdot da + \underbrace{\left(\frac{c \cos \alpha - b}{bc \sin \alpha}\right)}_{C_b} \cdot db + \underbrace{\left(\frac{b \cos \alpha - c}{bc \sin \alpha}\right)}_{C_c} \cdot dc$$

$$m_{\alpha}^{cc} = \pm \rho^{cc} \cdot \sqrt{C_a^2 \cdot m_a^2 + C_b^2 \cdot m_b^2 + C_c^2 \cdot m_c^2} \quad (3, 53)$$

Formel (3, 53) erlaubt die Berechnung des mittleren Winkelfehlers m_{α} aus den mittleren Fehlern m_a , m_b , m_c der gemessenen Distanzen.

Zu Zwecken der Genauigkeitsabschätzung für vorgegebene Dreiecksformen ohne Interesse des Maßstabs empfiehlt sich aber der Übergang auf den mittleren relativen Distanzfehler $\frac{m_d}{d}$:

$$m_{\alpha}^{cc} = \pm \rho^{cc} \cdot \sqrt{a^2 C_a^2 \left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + b^2 C_b^2 \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + c^2 C_c^2 \left(\frac{m_c}{c}\right)^2}$$

Mit $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c} = \frac{m_d}{d}$ folgt:

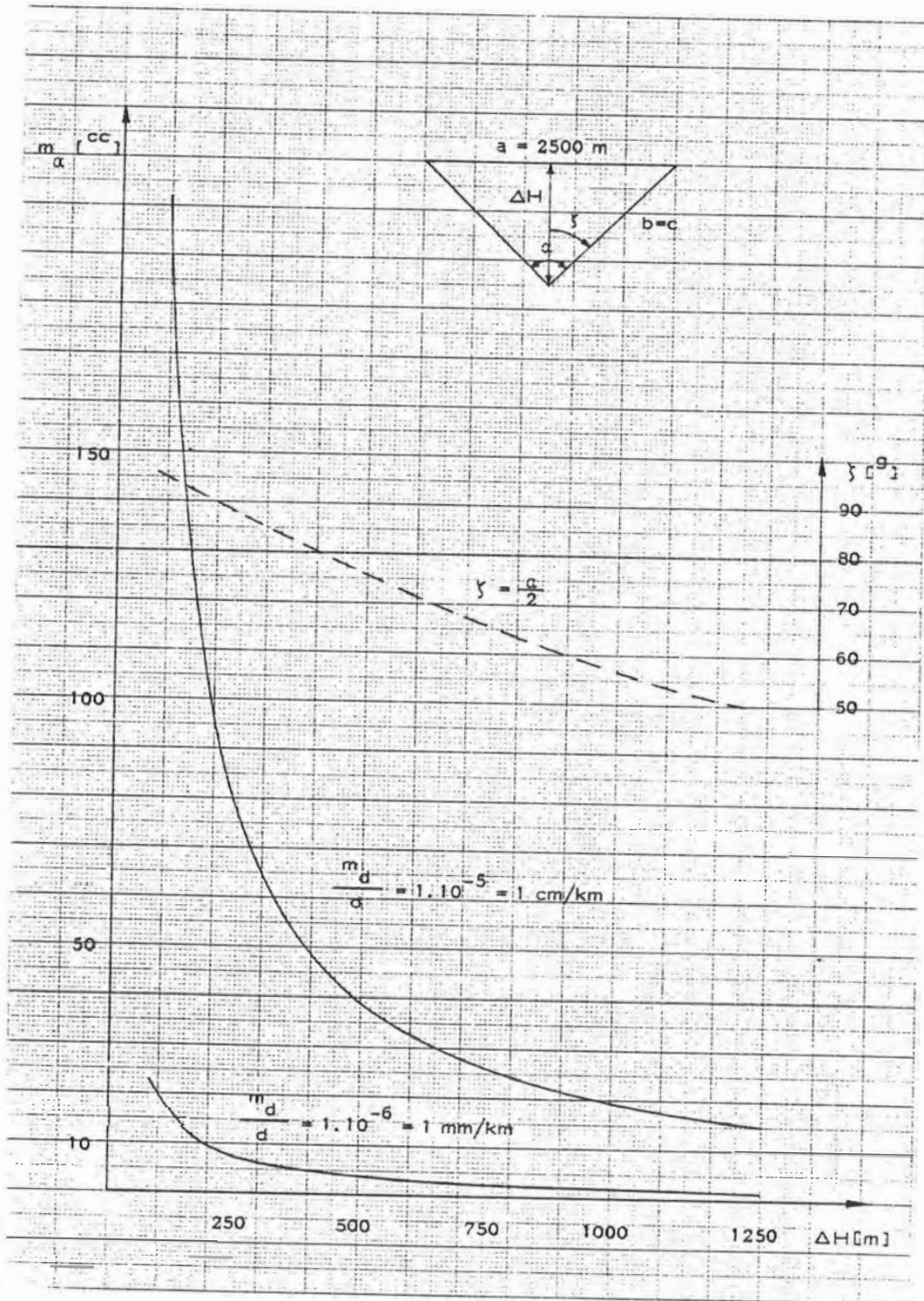
$$m_\alpha^{cc} = \pm \varrho^{cc} \cdot \sqrt{a^2 C_a^2 + b^2 C_b^2 + c^2 C_c^2} \cdot \frac{m_d}{d} \quad (3, 54)$$

Diagramm 5 schafft Klarheit über den Zusammenhang zwischen m_α und der Form des vertikalen Dreiecks.

Ein, der Einfachheit halber gleichschenkelig gewähltes, Dreieck wird in seinem Abstand Spitze-Hypotenuse (ΔH) kontinuierlich geändert. Dabei tritt der starke Einfluß von $\sin \alpha$ im Nenner von (3, 53) deutlich zutage. Bei zu stumpfem Winkel α , also im Verhältnis zur Länge a kleinem ΔH wird m_α unerlaubt groß. Das Diagramm zeigt den Verlauf von m_α in Abhängigkeit von ΔH für zwei verschiedene mittlere relative Distanzfehler, worunter jeweils die innere (Instrumenten-)Genauigkeit verstanden werden soll. Die, wegen diverser anderer Unsicherheiten sicherlich etwas größeren, mittleren Fehler (siehe 4. 4. 3. 1) als Maß der äußeren Genauigkeit müssen also über diesen untersten Grenzen gesucht werden. Schließlich ist noch unter Benützung eines dritten Diagrammeinganges die Kurve der entsprechenden Zenitdistanzen ($\zeta = \frac{\alpha}{2}$) aufgetragen, die es gestattet, bei jeglichen Ablesungen des Hauptdiagramms niemals den Bereich realistischer Zenitdistanzen zu verlassen.

Schon auf den ersten Blick ist dem Diagramm zu entnehmen, daß Distanzmeßgeräte gängiger Natur ($\frac{m_d}{d} \cong 1 \cdot 10^{-5}$) für die Methode keinerlei Bedeutung besitzen, da m_α immer unzulässig hoch erwartet werden muß.

Mit Präzisionsdistanzmeßgeräten der Klasse MA100, ME3000 und vielleicht DI20 ($\frac{m_d}{d} \cong 1 \cdot 10^{-6}$) kann das Verfahren zu guten Ergebnissen führen, wenn bei den Messungen peinlichste Sorgfalt angelegt wird (siehe 4. 4. 3. 1) und mehrere Wiederholungen durchgeführt werden.



Diagr. 5

Mit unzweifelhaft sicheren Ergebnissen darf man bei Einsatz des Terrameters ($\frac{m_d}{d} \cong 1 \cdot 10^{-7}$) rechnen, dessen innere Genauigkeit fast ident mit der äußeren sein soll, da das Mehrfarbenlaserinstrument mit Hilfe der Dispersion die meteorologischen Einflüsse auf die Distanzmessung fast völlig ausschaltet (Huggett, 1981).

Weitergehende Untersuchungen des Verfassers haben ergeben, daß es bei stumpfwinkligen Dreiecken ($\alpha > 100^\circ$), wie sie bei der Meßanordnung eines vertikalen Dreiecks eigentlich ausschließlich zu erwarten sind, ausreicht, m_α zu bestimmen. m_β und m_γ sind immer kleiner als m_α , weil die lange Seite a bei (3, 53) für m_α im Zähler, für m_β und m_γ aber im Nenner steht. Weiters kann ausgesagt werden, daß beschränkte Symmetrieabweichungen der Dreiecksform von der speziell gewählten gleichschenkeligen nur geringen Einfluß auf m_α zeigen.

3. 2. 6. 4. 3 GENAUIGKEITSANFORDERUNGEN FÜR DIE ZENITDISTANZEN

Da die beobachteten Zenitdistanzen linear in den Formelapparat (3, 47) eingehen, müssen ihre mittleren Fehler geringer vorausgesetzt werden als die gewünschten mittleren Fehler der Refraktionswinkel. Erfahrungsgemäß ist ein m_{ζ} von $\pm 1^{\text{cc}}$ anzustreben. Dieser Wert (innere Genauigkeit) kann durch sechs rasch aufeinanderfolgende Zielungen (in beiden Kreislagen) auf gut einstellbare Zielmarken im Mittel zumeist eingehalten werden (Ramsayer, 1971; Wunderlich, 1979). Der überaus sorgfältigen Zentrierung und Instrumenten- bzw. Zielhöhenfeststellung (siehe 4. 4. 3. 2) kommt, wie bei der Distanzmessung, entscheidende Bedeutung zu.

3. 2. 6. 4. 4 DIE BESTIMMUNG DER NATÜRLICHEN LOTRICHTUNGEN

In (3, 46) treten Terme δ_{ik}^* auf. Diese, von den natürlichen Lotrichtungen $(\varphi_i^*, \lambda_i^*)$ in den Dreieckseckpunkten eingeschlossenen Zentriwinkel, werden aus astronomischen Beobachtungen abgeleitet. Zum Einsatz kommen dabei Prismenastrolabien in Verbindung mit der "Methode der gleichen Höhen" (siehe 2. 1. 1).

Bei nicht zu großem Ausweichen der Lote aus der Ebene des vertikalen Dreiecks lassen sich die δ_{ik}^* durch die inneren Produkte der Richtungseinheitsvektoren genügend genau errechnen:

$$\cos \delta_{ik}^* = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i^* \cos \lambda_i^* \\ \cos \varphi_i^* \sin \lambda_i^* \\ \sin \varphi_i^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_k^* \cos \lambda_k^* \\ \cos \varphi_k^* \sin \lambda_k^* \\ \sin \varphi_k^* \end{pmatrix} \quad (3, 55)$$

$$\equiv \cos \delta_{ik}^* = \sin \varphi_i^* \sin \varphi_k^* + \cos \varphi_i^* \cos \varphi_k^* \cos \Delta \lambda_{ik}^*$$

Bei Verwendung eines Taschenrechners ist wegen der Kleinheit von $\Delta \lambda$ und δ das Ex-Produkt zu benutzen, um numerischen Ungenauigkeiten vorzubeugen.

Da im Hochgebirge die topographischen Anteile der Lotabweichungen die systematischen im allgemeinen überwiegen (Helmert, 1880), und durch die Meßanordnung normal zum Tal- bzw. Bergkettenverlauf (siehe Abb. 10) zu erwarten ist, daß die topographischen Komponenten annähernd in das Azimut des vertikalen Dreiecks fallen, ist die Anwendung von (3, 55) zu- meist unproblematisch.

Eine Kontrolle stellt die Berechnung des Winkels δ_{ik} nach (3, 14) dar. Mit Formel (2, 4) für den Einfluß ε der Lotabweichungskomponenten ξ, η im Azimut α gilt dann:

$$\delta_{ik}^* = \delta_{ik} - \varepsilon_i + \varepsilon_k \quad (3, 56)$$

$$\delta_{ik} = \arcsin \frac{d_{ik} \cdot \sin \zeta_{ik}}{R+h_k} \doteq \frac{d_{ik} \sin \zeta_{ik}}{R+h_k} \cdot \rho \quad (3, 57)$$

Diese Näherungsformel ist völlig ausreichend. Will man δ_{ik} sekunden- genau erhalten, so genügt es d_{ik} auf ± 10 m, ζ auf $\pm 0,7^g$ und R auf ± 20 km zu kennen. Es ist klar, daß der Widerspruch $w = \delta_{ik}^* + \delta_{kl}^* - \delta_{il}^*$ wegen Verkantung der Normalschnittsebenen bei einer Berechnung nach (3, 56) zumindest für die betrachteten Punktabstände (< 3 km) zu 0 wird. Der Verfasser ist aber der Ansicht, daß die Bestimmung nach (3, 55) vorzu- ziehen ist: Der Widerspruch w ist schließlich Ausdruck der physikalisch- geometrischen Realität und (ohne weitere Abschätzungen komplizierterer Art) ein Maß für die Verkantung. Überdies ist es wahrscheinlich (Be- stätigung im Testnetz "Hohe Wand"), daß die Beträge sehr klein ($< 0,2^{cc}$) bleiben und dadurch auch in den später berechneten Höhenunterschieden die Widersprüche 0,1 mm nicht überschreiten.

Im folgenden soll nun der Zusammenhang gesucht werden, ab welchem Winkel χ zwischen Normalschnittsebene Σ_i und Gegennormalschnitts- ebene Σ_k sich ein nach (3, 55) berechneter Zentriwinkel δ_{ik}^* um 1^{cc} von seiner Projektion $\delta_{ik}^{*!}$ in Σ_i unterscheidet.

3.2.6.4.4.1 DER WINKEL ZWISCHEN NORMALSCHNITTS- UND GEGENNORMALSCHNITTSEBENE

Als "Normalschnittsebene" wird hier zum Unterschied vom herkömmlichen Sprachgebrauch jene Ebene betrachtet, die durch die Tangente an die natürliche Lotrichtung im Standpunkt und den Zielpunkt aufgespannt wird. Der Winkel, den sie mit ihrer Gegennormalschnittsebene einschließt, heiße χ .

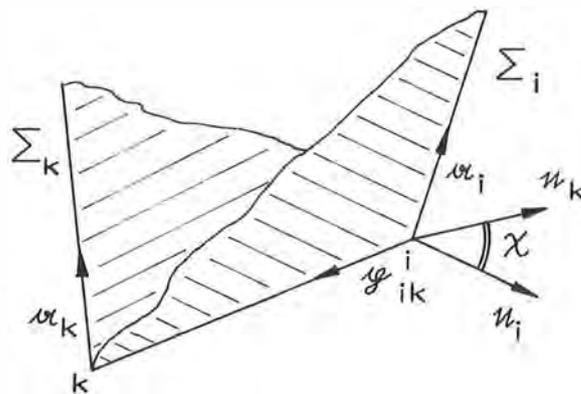


Abb. 36

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i^* \cos \lambda_i^* \\ \cos \varphi_i^* \sin \lambda_i^* \\ \sin \varphi_i^* \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k^* \cos \lambda_k^* \\ \cos \varphi_k^* \sin \lambda_k^* \\ \sin \varphi_k^* \end{pmatrix} \quad g^!_{ik} = \begin{pmatrix} \sin \bar{\gamma}_{ik} \sin \alpha_{ik} \\ \sin \bar{\gamma}_{ik} \cos \alpha_{ik} \\ \cos \bar{\gamma}_{ik} \end{pmatrix}$$

α_i, α_k und $g^!_{ik}$ sind Raumrichtungseinheitsvektoren.

α_i, α_k geben die natürlichen Lotrichtungen bezogen auf das geozentrische Koordinatensystem an.

$g^!_{ik}$ gibt die räumliche Richtung zum Zielpunkt in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem an, muß also noch mit Hilfe der Drehmatrix $R_{\varphi,-}$ in das geozentrische Koordinatensystem transformiert werden (Rinner, 1967).

$\bar{\gamma}_{ik}$ = direkte Zenitdistanz zwischen P_i und P_k .

α_{ik} = nördliches Azimut der Richtung $\overline{P_i P_k}$.

Abb. 37 zeigt den Zusammenhang der beiden Koordinatensysteme:

Geozentrisches Koordinatensystem (X, Y, Z):

- Zentrum - Schwerpunkt der Erde
- X,Y Ebene - Äquatorebene
- X,Z Ebene - Meridianebene von Greenwich
- Z - Rotationsachse der Erde

Lokales kartesisches Koordinatensystem (x, y, z):

- Zentrum - Standpunkt
- z - Lotrichtung im Standpunkt
- x,y Ebene - normal auf z durch Standpunkt
- y - zeigt nach Norden
- y,z Ebene - Meridianebene

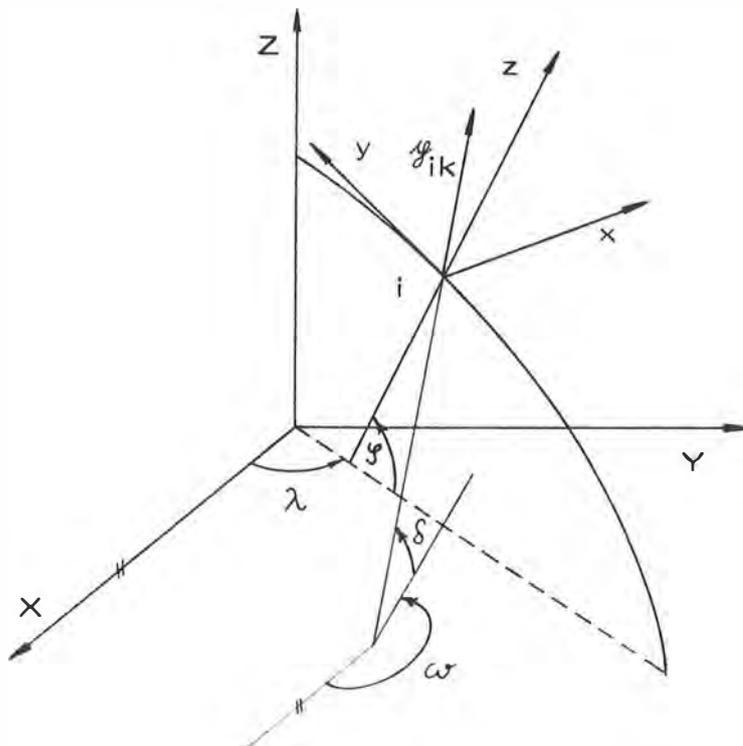


Abb. 37

Mit den Drehwinkeln $100 - \varphi$ und $100 + \lambda$ ergibt sich die räumliche Drehmatrix $R_{\varphi, \lambda}$ zu:

$$R_{\varphi, \lambda} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda_i^* & -\sin \varphi_i^* \cos \lambda_i^* & \cos \varphi_i^* \cos \lambda_i^* \\ \cos \lambda_i^* & -\sin \varphi_i^* \sin \lambda_i^* & \cos \varphi_i^* \sin \lambda_i^* \\ 0 & \cos \varphi_i^* & \sin \varphi_i^* \end{pmatrix}$$

Jetzt kann der Zielpunktvektor φ_{ik} im geozentrischen Koordinatensystem angeschrieben werden.

$$\varphi_{ik} = \begin{pmatrix} \cos \delta_{ik} \cos \omega_{ik} \\ \cos \delta_{ik} \sin \omega_{ik} \\ \sin \delta_{ik} \end{pmatrix} = R_{\varphi, \lambda} \cdot \varphi'_{ik}$$

Da die Vektorlänge bei räumlichen Drehungen eine Invariante ist, so ist auch φ_{ik} ein Einheitsvektor.

Aus den Raumrichtungseinheitsvektoren α_i, α_k und φ_{ik} formulieren sich die Normalvektoren u_1 und u_2 der beiden Ebenen Σ_i und Σ_k zu:

$$u_i = \frac{\alpha_i \times \varphi_{ik}}{|\alpha_i \times \varphi_{ik}|} \quad u_k = \frac{\alpha_k \times \varphi_{ik}}{|\alpha_k \times \varphi_{ik}|}$$

Da der gesuchte Winkel χ sehr klein zu erwarten ist, benützt man zu seiner genauen Bestimmung statt des Skalarproduktes besser das äußere Produkt der beiden Normalvektoren und gewinnt so den Sinus χ :

$$\chi = \arcsin \left| u_i \times u_k \right| \quad (3, 58)$$

3. 2. 6. 4. 4. 2 DIE AUSWIRKUNG DER WINDSCHIEFE DER LOTE AUF DIE BERECHNUNG DES ZENTRIWINKELS

Zur Berechnung der Differenz $\delta_{ik}^* - \delta_{ik}^{*1}$ wegen χ wählt man günstigerweise ein spezielles Koordinatensystem mit der x-Achse in der Verbindung $\overline{P_i P_k}$ und der Normalschnittsebene Σ_i als x, z-Ebene.

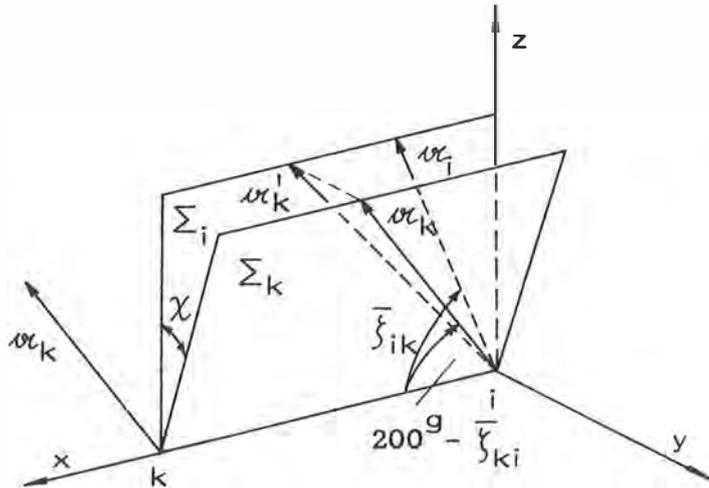


Abb. 38

$\alpha_k^1 \dots$ Orthogonalprojektion von α_k auf Σ_i

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \cos \bar{\gamma}_{ik} \\ 0 \\ \sin \bar{\gamma}_{ik} \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} -\cos \bar{\gamma}_{ki} \\ \sin \bar{\gamma}_{ki} \sin \chi \\ \sin \bar{\gamma}_{ki} \cos \chi \end{pmatrix} \quad \alpha_k^1 = \begin{pmatrix} -\cos \bar{\gamma}_{ki} \\ 0 \\ \sin \bar{\gamma}_{ki} \cos \chi \end{pmatrix}$$

$$|\alpha_i| = |\alpha_k| = 1 \quad |\alpha_k^1| = \sqrt{\cos^2 \bar{\gamma}_{ki} + \sin^2 \bar{\gamma}_{ki} \cdot \cos^2 \chi} = \sqrt{1 - \sin^2 \bar{\gamma}_{ki} \sin^2 \chi} = n$$

Mit diesen Vektoren kann nun der Zentriwinkel δ_{ik}^* und seine Projektion δ_{ik}^{*1} in Σ_i berechnet werden:

$$\cos \delta_{ik}^* = \alpha_i \cdot \alpha_k = -\cos \bar{\gamma}_{ik} \cos \bar{\gamma}_{ki} + \sin \bar{\gamma}_{ik} \sin \bar{\gamma}_{ki} \cos \chi$$

$$\cos \delta_{ik}^{*1} = \frac{\alpha_i \cdot \alpha_k^1}{n} = \frac{\cos \delta_{ik}^*}{n}$$

Wir setzen nun die Differenz an:

$$\begin{aligned} \sin^2 \delta_{ik}^* - \sin^2 \delta_{ik}^{*1} &= \cos^2 \delta_{ik}^{*1} - \cos^2 \delta_{ik}^* = \cos^2 \delta_{ik}^* \cdot \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{\cos^2 \delta_{ik}^*}{n^2} \cdot (1 - 1 + \sin^2 \bar{\zeta}_{ki} \sin^2 \chi) = \\ &= \frac{\cos^2 \delta_{ik}^* \sin^2 \bar{\zeta}_{ki} \sin^2 \chi}{1 - \sin^2 \bar{\zeta}_{ki} \sin^2 \chi} \end{aligned}$$

Da δ und χ sehr kleine Winkel sind, nähert man:

$$\begin{aligned} \delta_{ik}^{2*} - \delta_{ik}^{2*1} &= (\delta_{ik}^* - \delta_{ik}^{*1}) \cdot \underbrace{(\delta_{ik}^* + \delta_{ik}^{*1})}_{2\delta_{ik}^*} = \sin^2 \bar{\zeta}_{ki} \cdot \chi^2 \\ \delta_{ik}^* - \delta_{ik}^{*1} &= \frac{\sin^2 \bar{\zeta}_{ki} \cdot \chi^2}{2\delta_{ik}^*} \end{aligned} \quad (3, 59a)$$

und findet schließlich den relativen Fehler:

$$\boxed{\frac{\delta_{ik}^* - \delta_{ik}^{*1}}{\delta_{ik}^*} = \frac{\sin^2 \bar{\zeta}_{ki}}{2} \cdot \left(\frac{\chi}{\delta_{ik}^*} \right)^2} \quad (3, 59b)$$

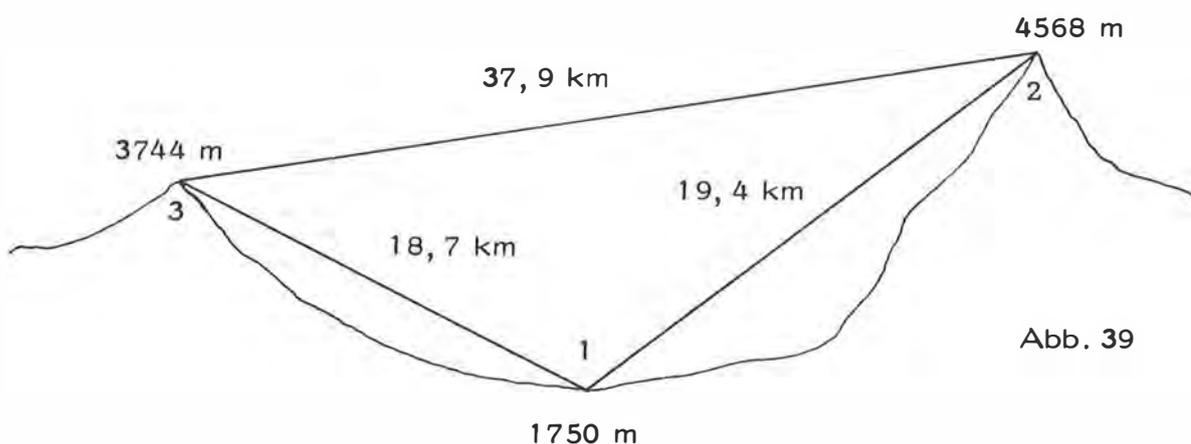
Für einen horizontalen Punktabstand von 1 km ($\delta \doteq 1^c$) und $\bar{\zeta} \doteq 80^g$ zeigt die Abschätzung, daß $\chi > 15^{cc}$ werden müßte, damit die Berechnung von δ_{ik}^* um mehr als 1^{cc} verfälscht würde. Eine Änderung der Lotabweichungskomponente normal zum Azimut eines vertikalen Dreiecks in einem solch großen Ausmaß ist nicht zu erwarten und wurde auch im Testnetz "Hohe Wand" nicht erreicht.

3. 2. 6. 4. 5 DIE VERTIKALEN DREIECKE VON TOLOMBON UND ALPACHIRI

Sanchez hat seine Methode in zwei verschiedenen Gegenden Argentinien selbst erprobt. Zum ersten Mal im April 1962 im

Vertikalen Dreieck Tolombón.

Das Messungsgebiet liegt im Gebiet des Calchaqui-Tales in der trockenen Provinz Tucumán.



Die Distanzen wurden mit einem Tellurometer MRA2 mehrfach zu verschiedenen Wetterlagen und immer zu den Zeiten der Schichtausbildungen (Mitter, 1976) ausgeführt. Die innere Genauigkeit lag etwa bei $\frac{m_d}{d} \doteq 2 \cdot 10^{-6}$ (Bestätigung der Genauigkeit des MRA2 bei Draheim, 1963). Dem entspricht nach Formel (3, 54) ein m_α von $\pm 25^{\text{CC}}$.

Wenn man nun bedenkt, daß der Normalrefraktionswinkel (3, 18a) für $d = 19 \text{ km}$ etwa 125^{CC} ausmacht, so beträgt die Unsicherheit eines nach (3, 49) abgeleiteten Refraktionswinkels für dieses Beispiel etwa ein Fünftel seines Betrages. Zieht man außerdem noch die relativ hohen mittleren Fehler der astronomischen Messungen auf den extremen Bergpunkten (bis $\pm 15^{\text{CC}}$) und die Beobachtungsfehler bei der Zenitdistanzmessung in Betracht, so dürfte m_δ auf mehr als $\pm 30^{\text{CC}}$ anwachsen. Aber selbst $\frac{m_\delta}{\delta} = \frac{1}{4}$ erweist sich noch als eine recht passable Genauigkeit bei Refraktionsuntersuchungen über die von Sanchez gewählten großen Entfernungen und Höhenunterschiede.

Ein Beispiel für in Tolombón nach (3, 49) berechnete Refraktionswinkel, das Sanchez beim Symposium Figure of the Earth and Refraction 1967 in Wien mitgeteilt hat:

11. April 1964, 15^{h30}

$$\delta_{23} = \delta_{32} = +176^{\text{CC}}$$

$$\delta_{12} = -3^{\text{CC}} \quad \delta_{21} = +108^{\text{CC}}$$

$$\delta_{13} = +56^{\text{CC}} \quad \delta_{31} = +139^{\text{CC}}$$

in einem weiteren Testnetz, dem

Vertikalen Dreieck Alpachiri,

führte Sanchez ein geometrisches und ein astronomisches Nivellement zwischen den Punkten 3 und 1 aus, um die refraktionsfreie Zenitdistanz ζ_{13} aus dem Höhenunterschied zu ermitteln.

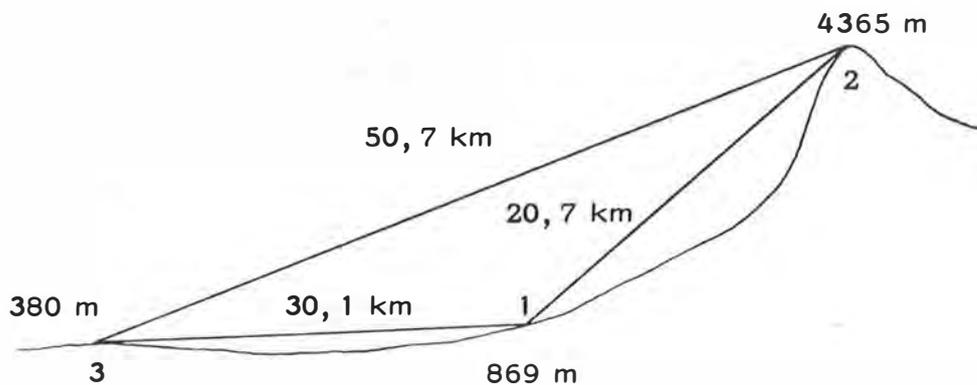


Abb. 40

So konnte er für einen Tag im Juli die Refraktionswinkel errechnen:

$$\begin{array}{ll} \delta_{23} = +306^{\text{CC}} & \delta_{32} = +435^{\text{CC}} \\ \delta_{12} = +151^{\text{CC}} & \delta_{21} = +93^{\text{CC}} \\ \delta_{13} = +170^{\text{CC}} & \delta_{31} = +253^{\text{CC}} \end{array}$$

Die Genauigkeiten lagen wieder ungefähr bei jenen von Tolombón.

Nach einem Vorschlag von Prof. Bretterbauer wurde nun der Versuch unternommen, die Methode von Sanchez in Österreich zu erproben, und zwar bei wesentlich geringeren Punktentfernungen ($\approx 3\text{km}$), wie sie bei uns für die trigonometrische Höhenbestimmung üblich sind. Zu diesem Zwecke wählte ein Diplomand, Herr Rosenthaler, gemeinsam mit dem Verfasser, ein vertikales Dreieck im Gebiet der Hohen Wand südlich von Wien aus.

3. 2. 6. 4. 6 DAS VERTIKALE DREIECK "HOHE WAND"

Das vertikale Dreieck "Hohe Wand" überspannt das Einbruchsbecken der "Neuen Welt" vom Steilabfall der Hohen Wand bis zu den Fischauer Vorbergen (Abb. 41-43).

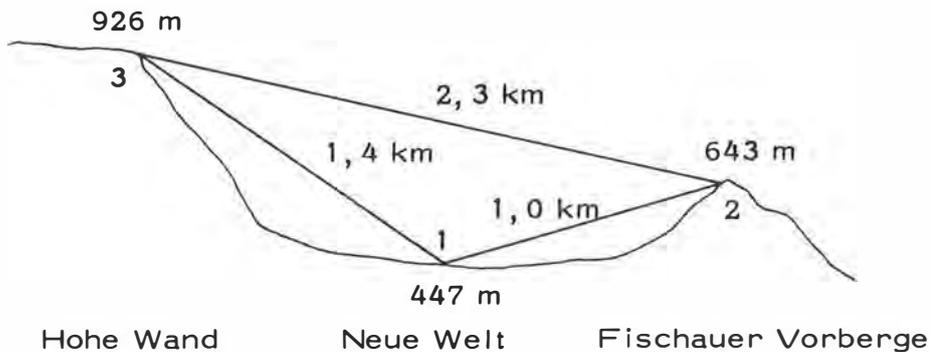


Abb. 41

Es weist Seitenlängen bis 2,3 km und Höhenunterschiede bis zu 480 m auf.

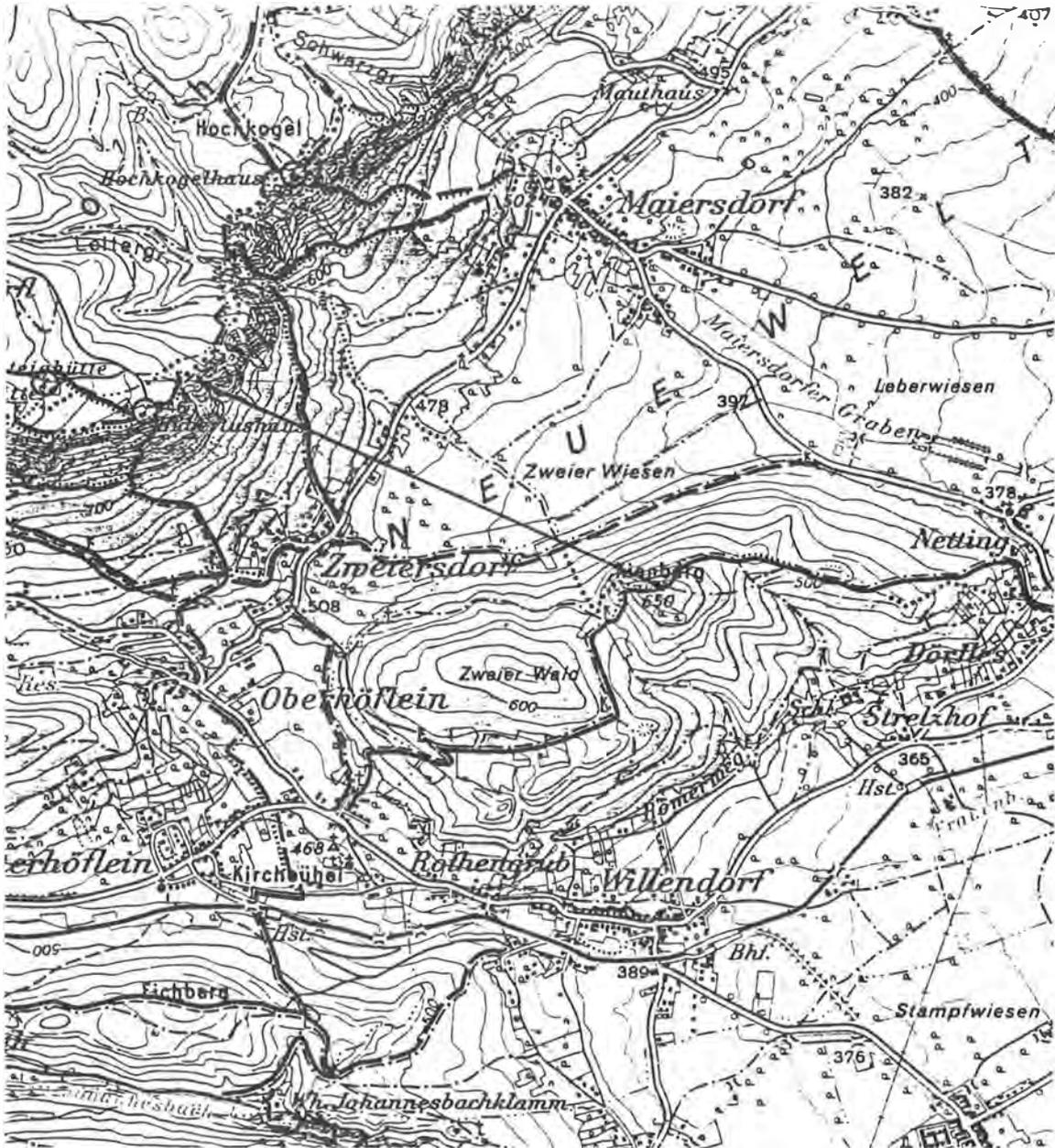


Abb. 42

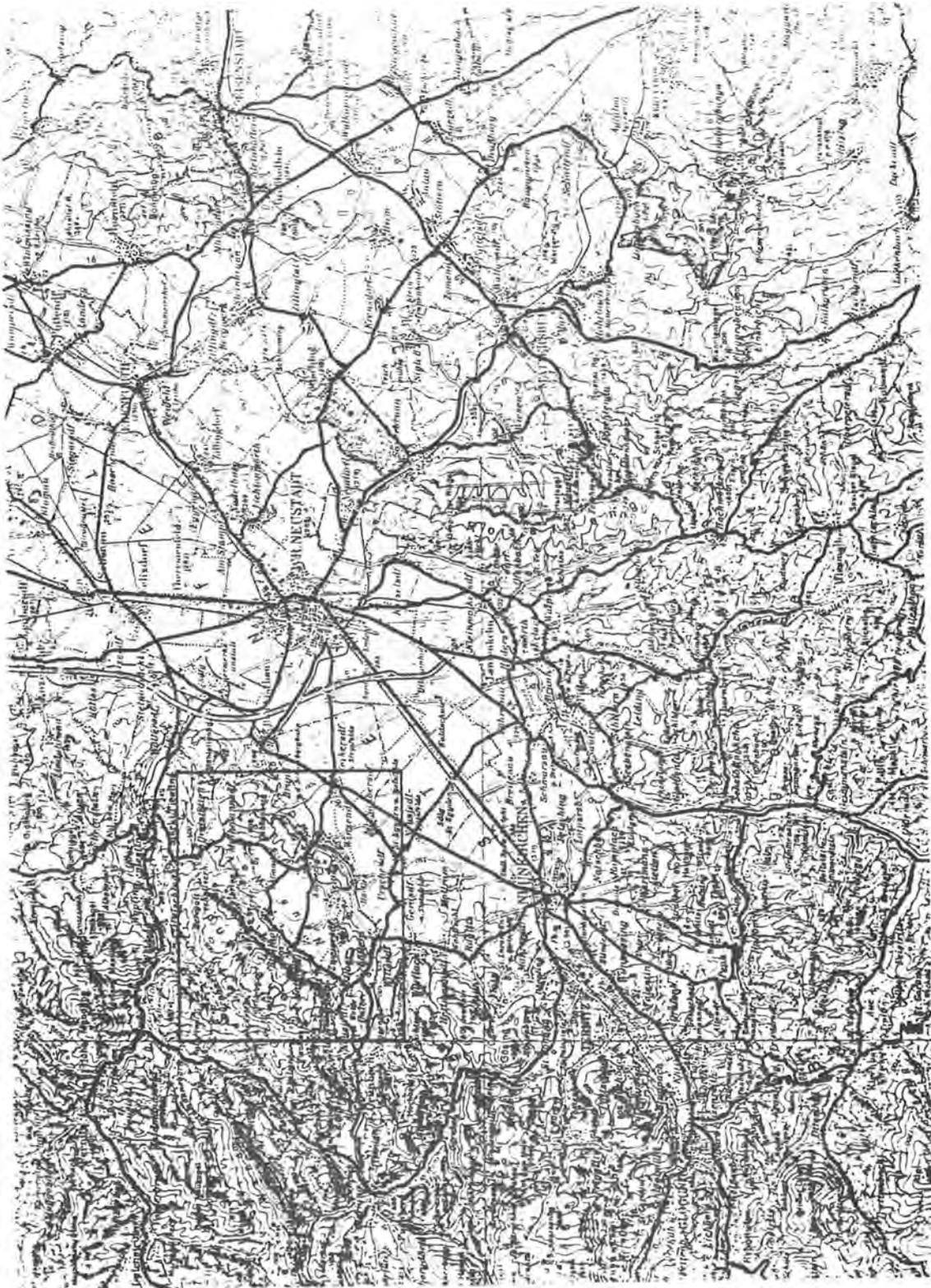


Abb. 43

Gegenüber tief eingeschnittenen Tälern im hochalpinen Teil Österreichs, die zweifellos geometrisch günstigere (siehe 3.2.6.4.2) Dreiecksformen zugelassen hätten, ergibt sich beim gewählten Messungsgebiet der Vorteil der schnellen Erreichbarkeit (~ 1 Stunde) von Wien aus. Diesem Argument wurde aus den leidigen Kostengründen absoluter Vorrang eingeräumt. Darüber hinaus wurde als günstig erachtet, daß einer der Meßpunkte (3 = Hubertushaus) bereits durch einen Pfeiler stabilisiert und an das staatliche Präzisionsnivelement angeschlossen war. Dieser Punkt gehört zum Testnetz des Instituts für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abt. Landesvermessung, der TU Wien. Sowohl Punkt 3 als auch Punkt 2 (Kienberg) liegen auf ausgesetzten Felsnasen, so daß die Zielstrahlen ins Tal sehr rasch Abstand vom Gelände gewinnen. Das bringt für alle Refraktionsuntersuchungen den Vorteil, daß "normales" höhen-, tageszeit- und wetterabhängiges Refraktionsverhalten studiert werden kann und keine Refraktionsanomalien wegen zu geringen Bodenabstandes befürchtet werden müssen (vergleiche Punkt Murs im Netz der IGN, Levallois, 1969). Der Talpunkt liegt, durch einen massiv einbetonierten Bolzen vermarktet, inmitten von Weizenfeldern und Wiesen.

Bezüglich der Ergebnisse der Refraktionsstudien anhand der Methode Sanchez verweise ich auf die ausführliche Arbeit von Rosenthaler (1982).

Das große Problem bei der Anwendung der Sanchez-Methode im vertikalen Dreieck "Hohe Wand" liegt darin, daß das Winkelausmaß des Refraktionseinflusses wegen der geringen Entfernungen (≤ 3 km) sehr gering ausfällt (δ_G für 2,3 km = 15^{CC}). Es ist daher eine ungeheure Präzision in der Distanzmessung ($\frac{m_d}{d} \doteq 1 \cdot 10^{-6}$) vonnöten, will man sichere ($m_\delta \doteq \pm 5^{\text{CC}}$) Refraktionswinkel ableiten. Das ist eine Distanzmeßgenauigkeit, wie sie nur das Terrameter garantieren kann. Bei Verwendung derzeit verfügbarer Präzisionsdistanzer wie dem Tellurometer MA100 oder dem Mekometer ME3000 sind eine Reihe von Wiederholungsmessungen unter immer anderen atmosphärischen Bedingungen nicht zu umgehen.

Aber selbst bei aller Akribie und allem Aufwand bleibt das unangenehme Gefühl für den Geodäten zurück, daß diese Messungen unkontrolliert sind und die abgeleiteten Refraktionswinkel damit nicht bewiesen werden können! Dieses geodätische Unbehagen gemeinsam mit der kritischen Frage, wann die Einführung der Bedingung (3, 48) oder (3, 51) zur Lösung des Systems gerechtfertigt ist, führte den Verfasser zu einer Weiterentwicklung der Methode von Sanchez.

Im folgenden Abschnitt werden die Gedanken erläutert, wie man von einem vertikalen Dreieck zu einer (distanz-)kontrollierten Meßanordnung gelangt und wie die willkürliche Einführung von Bedingungen durch zusätzliche Messungen umgangen werden kann. Anschließend werden die Ergebnisse einer 24-Stunden Dauer-Zenitdistanzmessung aufgeführt, analysiert und diskutiert.

4. DAS VERTIKALE VIERECK

Eine eindeutige Bestimmung der Refraktionswinkel läßt sich erreichen, wenn man das gegebene vertikale Dreieck zu einem Viereck erweitert. Durch die Einfluchtung eines zweiten Talpunktes (4) und die Messung der drei **zusätzlichen** Distanzen erzielt man eine einfache Überbestimmung des vertikalen Distanznetzes. Damit ist eine echte Genauigkeitskontrolle für die Distanzen gegeben. Die Unbestimmtheit des - jetzt um sechs Zenitdistanzen erweiterten - Systems zur Bestimmung der zwölf Refraktionswinkel bleibt aber bislang bestehen. Um die Unterbestimmung zu beseitigen, ohne eine willkürliche Bedingung einzuführen, genügt es, ein geometrisches Präzisionsnivellement zwischen den beiden Talpunkten zu führen. Dieses liefert zusammen mit dem Ergebnis eines astronomischen Nivellements den ellipsoidischen Höhenunterschied der beiden Talpunkte, aus dem die refraktionsfreien Zenitdistanzen zwischen ihnen rückgerechnet werden können. Dadurch ist dann die "Orientierung" der restlichen Zenitdistanzen gegeben.

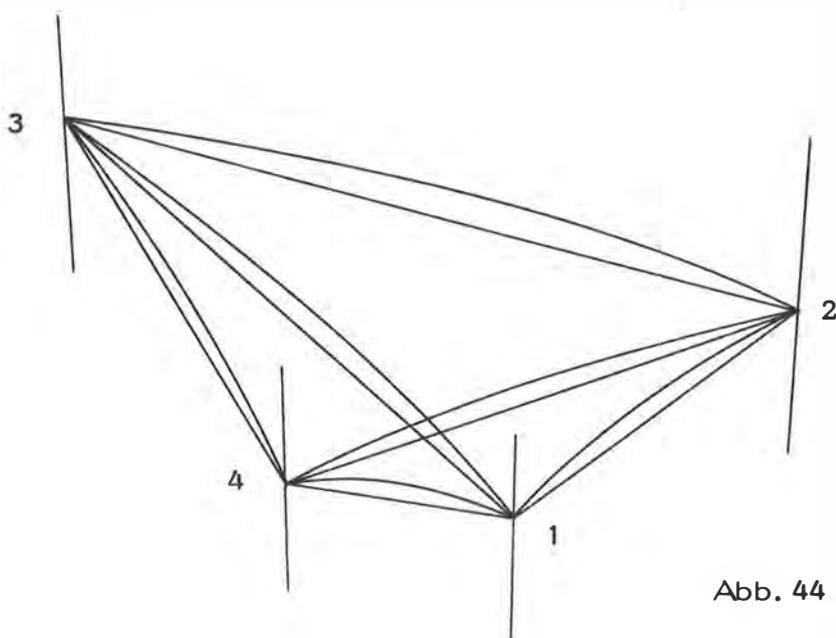


Abb. 44

Wird die Meßanordnung nicht zum Zwecke von Refraktionsuntersuchungen benützt, sondern wird nur eine präzise Höhenbestimmung der beiden Gipfelpunkte angestrebt, fallen natürlich die Zenitdistanzmessungen weg.

4.1 DAS VERTIKALE VIERECK ALS MESSANORDNUNG ZUR VORAUSSETZUNGSFREIEN ERMITTLUNG VON REFRAKTIONS- WINKELN

4.1.1 BEDINGTER AUSGLEICH DES VERTIKALEN DISTANZNETZES

Da im vertikalen Viereck auch die beiden Diagonalen gemessen werden, liegt eine einfache Überbestimmung vor, die in einem Ausgleichsverfahren verarbeitet werden kann. Als Algorithmus erweist sich der bedingte Ausgleich nach Reißmann (1980) wegen seiner einfachen Berechnungsweise als besonders geeignet. Dazu wird in einem Eckpunkt des Vierecks eine 400^g -Winkelsummenbedingung aufgestellt.

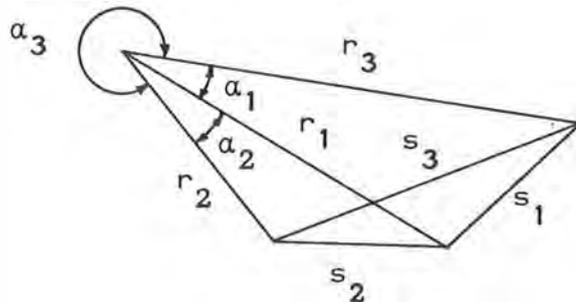


Abb. 45

ursprüngliche Bedingungsgleichung:

(für $i = 1$ gilt $i-1 = 3$)

$$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = \sum_{i=1}^3 \arccos \frac{\bar{r}_{i-1}^2 + \bar{r}_i^2 - \bar{s}_i^2}{2\bar{r}_{i-1} \cdot \bar{r}_i} - 400^g = 0 \quad (4, 1)$$

umgeformte Bedingungsgleichung:

$$a_{r_1} v_{r_1} + a_{r_2} v_{r_2} + a_{r_3} v_{r_3} + a_{s_1} v_{s_1} + a_{s_2} v_{s_2} + a_{s_3} v_{s_3} + w = 0 \quad (4, 2)$$

$$\equiv A^T v + w = 0$$

Koeffizienten:

$$a_{r_i} = \frac{df}{dr_i} = \left(\frac{r_{i-1} \cdot \cos \alpha_i - r_i}{r_{i-1} \cdot r_i \cdot \sin \alpha_i} + \frac{r_{i+1} \cdot \cos \alpha_{i+1} - r_i}{r_i \cdot r_{i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1}} \right) \cdot \varrho \quad (4, 3)$$

$$a_{s_i} = \frac{df}{ds_i} = \frac{s_i}{r_{i-1} \cdot r_i \cdot \sin \alpha_i} \cdot \varrho \quad (4, 4)$$

$$\begin{aligned} w = f(r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3) &= \sum_{i=1}^3 \arccos \frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2r_{i-1} \cdot r_i} - 400^g = \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i - 400^g \end{aligned} \quad (4, 5)$$

Einheiten: a [cc/mm] v [mm] w [cc]

Rechengang: $A^T v + w = 0 \quad v = P^{-1} A k \quad (4, 6)$

$$\Rightarrow A^T P^{-1} A k + w = N k + w = 0 \quad (4, 7)$$

$$k = -N^{-1} w \quad (4, 8)$$

Die Gewichtung der Messungen erfolgt nach den Genauigkeitsangaben der Herstellerfirma des jeweiligen Präzisionsdistanzmeßgerätes unter Berücksichtigung der Fehlerformel (2, 19) für die Zentrierung auf die Bodenpunkte.

$$m_{d_i} [\text{mm}] = c_1 [\text{mm}] + c_2 [\text{mm/km}] \cdot d [\text{km}] \quad (4, 9)$$

$$m_d = \sqrt{m_{d_i}^2 + \cos^2 \zeta (m_G^2 + m_R^2)} \quad (2, 19)$$

$$p = \frac{m_o^2}{m_d^2} \quad (4, 10)$$

Die Genauigkeit der ausgeglichenen Distanzen errechnet sich aus:

$$\bar{Q} = P^{-1} - P^{-1}AN^{-1}A^T P^{-1} \quad (4, 11)$$

$$\bar{m}_i = m_o \cdot \sqrt{\bar{Q}_{ii}} \quad (4, 12)$$

Die Werte \bar{m}_i sind als Maß dafür anzusehen, ob die geforderte hohe Genauigkeit (siehe 3. 2. 6. 4. 2) tatsächlich eingehalten wurde. Ein allfälliger Maßstabsfehler des Präzisionsdistanzmeßgerätes könnte durch den Ausgleich nicht entdeckt werden. Ein solcher Fehler ist aber vollkommen auszuschließen, da ja eine gut überbestimmte Ermittlung von Reflektor/Instrumentenkonstante und Maßstabsfaktor auf einer Invar-drahtbasis ohnehin unerläßlich ist. Läßt man auch bei der Messung von Instrumenten- und Reflektorhöhen die nötige Sorgfalt (siehe 4. 4. 3. 1) walten, so kann ein Genauigkeitsverlust gegenüber den Werksangaben nur eintreten, wenn die Mittel der meteorologischen Daten von Stand- und Zielpunkt nicht für den ganzen Meßstrahl repräsentativ sind. Durch wiederholte Distanzmessungen zu verschiedenen Tageszeiten und Wetterlagen kann aber wohl gehofft werden, daß diese Fehler im Mittel nur mehr im stark verminderten Ausmaß auftreten! Bei Einsatz eines Präzisionsdistanzmeßgerätes auf Dispersionsbasis (Terrameter) fällt diese Fehlerquelle völlig weg.

4. 1. 2 DIE BESTIMMUNG DER REFRAKTIONSFREIEN ELLIPSOIDISCHEN ZENITDISTANZ z_{14}

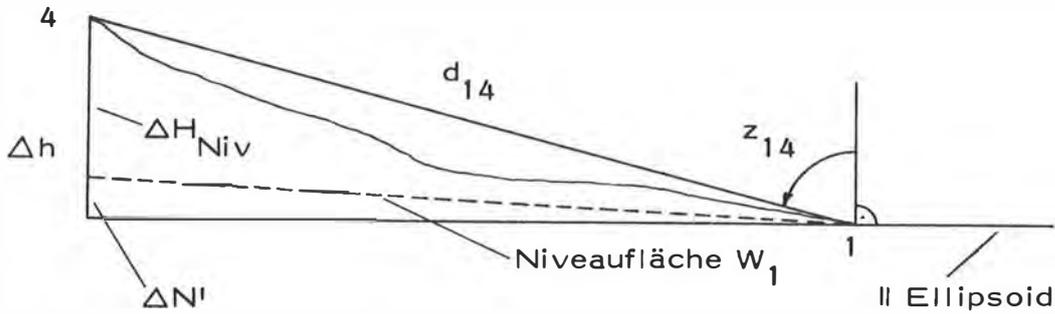


Abb. 46

$$z_{14} = \zeta_{14} + \delta_{14} = \zeta_{14}^* + \varepsilon_{14} + \delta_{14} \quad (4, 13)$$

Der vom Refraktionseinfluß auf die Zenitdistanzmessung unabhängige ellipsoidische Höhenunterschied (Δh) der beiden Talpunkte 1 und 4 läßt sich nach dem

Theorem von Villarceau $\Delta h = \Delta H_{Niv} + \Delta N'$ (1, 2)

aus dem direkten Ergebnis eines Präzisionsnivellements (ΔH_{Niv}) und dem Anstieg bzw. Gefälle ($\Delta N'$) der Niveaufläche W_1 von 1 nach 4 ermitteln. Aus diesem Δh kann dann die refraktionsfreie ellipsoidische Zenitdistanz z_{14} aus (2, 12) gerechnet werden, wobei im Erdkrümmungsglied K wegen dessen Kleinheit statt z_{14} die gemessene Zenitdistanz ζ_{14}^* eingesetzt werden darf.

$$z_{14} = \arccos \frac{\Delta h_{14} - K_{14}}{d_{14}} \quad \text{mit } K = \frac{d_{14}^2 \sin^2 \zeta_{14}^*}{2R_\alpha} \quad (4, 14)$$

Da der Abstand der Punkte 1 und 4 nur einige hundert Meter betragen wird, kann das Profil der Niveaulfläche W_1 als Kreisbogen angenommen werden. Den Anstieg $\Delta N'_1$ gewinnt man dann aus den Lotabweichungskomponenten ε_1 in 1 und ε_4 in 4 nach Formel (1, 3a).

$$\Delta N'_1 = - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{2} \cdot \frac{s_{14}}{\varrho}$$

Zum Zwecke der Abschätzung, welche Genauigkeit der einzelnen Formelgrößen vorausgesetzt werden muß, um z_{14} sekundengenau zu erhalten, schreiben wir (4, 14) nochmals an:

$$\cos z_{14} = \frac{\Delta H_{14}}{d_{14}} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2} \cdot \frac{\sin \zeta_{14}^*}{\varrho} - \frac{\zeta_{14}^{*2}}{2R\alpha}$$

Nach Differentiation und Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ergibt sich, schon vereinfacht ($\sin z_{14} \doteq \sin \zeta_{14}^*$):

$$m_{z_{14}}^{cc} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varrho^{cc}}{s_{14}} \right)^2 \cdot m_{\Delta H_{14}}^2 + \frac{m_{\varepsilon}^2}{2} + \left(\frac{\Delta H_{14}}{s_{14} \cdot d_{14}} \right)^2 \cdot m_{d_{14}}^2 \cdot \varrho^{2cc}} \quad (4, 15)$$

Die Fehlereinflüsse von ζ_{14}^* und R_α sind in (4, 15) schon weggelassen, weil sie keinen beachtenswerten Beitrag zu m_z liefern können.

Es ist:

$$d_{z_{14}}(\zeta_{14}^*) = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{2\varrho} \cdot \cot \zeta_{14}^* + \frac{d_{14}}{R\alpha} \cdot \cos \zeta_{14}^* \right) \cdot d\zeta_{14}^*$$

$$d_{z_{14}}(R_\alpha) = - \frac{d_{14} \cdot \sin \zeta_{14}}{2R_\alpha^2} \cdot dR_\alpha$$

ζ_{14}^* bräuchte nur auf einige Gon und R_α auf einige 100 km bekannt zu sein, um in z_{14} die Sekunde zu sichern!

Das ist bei der vorliegenden Arbeit immer der Fall, weshalb m_ζ und m_{R_α} samt ihren Koeffizienten in Formel (4, 15) unterdrückt worden sind. Gleichzeitig ist damit gezeigt, daß das Ersetzen von z_{14} in K durch die Näherung ζ_{14}^* gerechtfertigt war.

Ausschlaggebend für die Genauigkeit von z_{14} sind also $m_{\Delta H_{14}}$, m_ε und $m_{d_{14}}$. Für eine Annahme $\Delta H_{14} = 50$ m, $d_{14} = 500$ m erreicht $m_{z_{14}} = \pm 1^{cc}$, wenn $m_{\Delta H_{14}} = \pm 0,8$ mm oder $m_\varepsilon = \pm 1,4^{cc}$ oder $m_{d_{14}} = \pm 8$ mm wird. Diese Werte sind bei einiger Sorgfalt sicherlich einhaltbar. Die Distanzmeßgenauigkeit muß schon wegen der hohen Anforderungen aus Kapitel 3. 2. 6. 4. 2 besser als die hier benötigte sein.

Die Genauigkeit von ζ_{14}^* beeinflusst schließlich entscheidend die Genauigkeit des Refraktionswinkels δ_{14} , der sich aus

$$\delta_{14} = z_{14} - \zeta_{14}^* - \varepsilon_1 \quad (4, 16)$$

ergibt.

4. 1. 3 DIE BESTIMMUNGSGLEICHUNGEN FÜR DIE ZWÖLF REFRAKTIONSWINKEL IM VERTIKALEN VIERECK

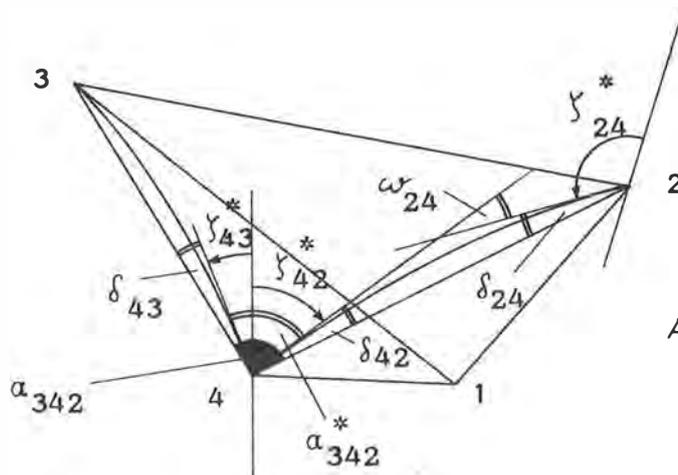


Abb. 47

Skizze zum Prinzip der Indexvergabe

Analog zu 3.2.6.4 werden wieder die Differenzen zwischen refraktionsbehafteten Winkeln α_{jik}^* (gebildet aus Zenitdistanzsummen oder Differenzen) und refraktionsfreien Winkeln α_{jik} (aus Distanzen errechnet) gebildet. Zu diesen " ψ -Gleichungen" treten entsprechend Seite 72 die " ω -Gleichungen" der Schnittwinkel der Visurtangenten. Insgesamt lassen sich elf voneinander unabhängige Gleichungen formulieren. Die aus dem vorhergehenden Kapitel schon bekannte Unterbestimmung der Aufgabe wird nun durch Anfügen von (4, 16) als zwölfte Gleichung behoben.

$$\text{I. } \psi_{312} = \alpha_{312} - \alpha_{312}^* = \arccos \frac{d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2}{2d_{12}d_{13}} - (\zeta_{12}^* + \zeta_{13}^*) = \delta_{12} + \delta_{13}$$

$$\text{II. } \psi_{413} = \alpha_{413} - \alpha_{413}^* = \arccos \frac{d_{14}^2 + d_{13}^2 - d_{34}^2}{2d_{14}d_{13}} - (\zeta_{14}^* - \zeta_{13}^*) = \delta_{14} - \delta_{13}$$

$$\text{III. } \psi_{124} = \alpha_{124} - \alpha_{124}^* = \arccos \frac{d_{12}^2 + d_{24}^2 - d_{14}^2}{2d_{12}d_{24}} - (\zeta_{21}^* - \zeta_{24}^*) = \delta_{21} - \delta_{24}$$

$$\text{IV. } \psi_{423} = \alpha_{423} - \alpha_{423}^* = \arccos \frac{d_{24}^2 + d_{23}^2 - d_{34}^2}{2d_{24}d_{23}} - (\zeta_{24}^* - \zeta_{23}^*) = \delta_{24} - \delta_{23}$$

$$\text{V. } \psi_{231} = \alpha_{231} - \alpha_{231}^* = \arccos \frac{d_{13}^2 + d_{23}^2 - d_{12}^2}{2d_{13}d_{23}} - (\zeta_{31}^* - \zeta_{32}^*) = \delta_{31} - \delta_{32}$$

$$\text{VI. } \psi_{134} = \alpha_{134} - \alpha_{134}^* = \arccos \frac{d_{13}^2 + d_{34}^2 - d_{14}^2}{2d_{13}d_{34}} - (\zeta_{34}^* - \zeta_{31}^*) = \delta_{34} - \delta_{31}$$

$$\text{VII. } \psi_{342} = \alpha_{342} - \alpha_{342}^* = \arccos \frac{d_{34}^2 + d_{24}^2 - d_{23}^2}{2d_{34}d_{24}} - (\zeta_{43}^* + \zeta_{42}^*) = \delta_{43} + \delta_{42}$$

$$\text{VIII. } \psi_{241} = \alpha_{241} - \alpha_{241}^* = \arccos \frac{d_{24}^2 + d_{14}^2 - d_{12}^2}{2d_{24}d_{14}} - (\zeta_{41}^* - \zeta_{42}^*) = \delta_{41} - \delta_{42}$$

$$\text{IX. } \omega_{12} = 200^g + \delta_{12}^* - (\zeta_{12}^* + \zeta_{21}^*) = \delta_{12} + \delta_{21}$$

$$\text{X. } \omega_{13} = 200^g + \delta_{13}^* - (\zeta_{13}^* + \zeta_{31}^*) = \delta_{13} + \delta_{31}$$

$$\text{XI. } \omega_{14} = 200^g + \delta_{14}^* - (\zeta_{14}^* + \zeta_{41}^*) = \delta_{14} + \delta_{41}$$

$$\text{XII. } z_{14} - \zeta_{14}^* - \varepsilon_1 = \arccos \left(\frac{\Delta H_{14}(\text{Niv}) - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2} \cdot \frac{d_{14} \sin \zeta_{14}^*}{\rho} - \frac{d_{14}^2 \sin^2 \zeta_{14}^*}{2Ra}}{d_{14}} \right) - \zeta_{14}^* - \varepsilon_1 = \delta_{14}$$

Beginnend mit der Berechnung von δ_{14} aus Gleichung XII. können die restlichen elf Refraktionswinkel aus den Gleichungen I. - XI. trivial ermittelt werden.

$$\begin{aligned}\delta_{41} &= \omega_{14} - \delta_{14} \\ \delta_{42} &= \omega_{14} - \psi_{241} - \delta_{14} \\ \delta_{43} &= -\omega_{14} + \psi_{241} + \psi_{342} + \delta_{14} \\ \delta_{13} &= \delta_{14} - \psi_{413} \\ \delta_{31} &= \omega_{13} + \psi_{413} - \delta_{14} \\ \delta_{32} &= \omega_{13} + \psi_{413} - \psi_{231} - \delta_{14} \\ \delta_{34} &= \omega_{13} + \psi_{413} + \psi_{134} - \delta_{14} \\ \delta_{12} &= \psi_{312} + \psi_{413} - \delta_{14} \\ \delta_{21} &= \omega_{12} - \psi_{312} - \psi_{413} + \delta_{14} \\ \delta_{24} &= \omega_{12} - \psi_{312} - \psi_{413} - \psi_{124} + \delta_{14} \\ \delta_{23} &= \omega_{12} - \psi_{312} - \psi_{413} - \psi_{124} - \psi_{423} + \delta_{14}\end{aligned}$$

(4, 19)

4.1.3.1 DIE MITTLEREN FEHLER DER ZWÖLF REFRAKTIONS- WINKEL IM VERTIKALEN VIERECK

Bei der Bestimmung der mittleren Fehler der einzelnen Refraktionswinkel δ muß beachtet werden, daß ein Teil der in (4, 19) vorkommenden Messungsgrößen - nämlich die sechs Distanzen - durch den vorangegangenen Ausgleich untereinander korreliert sind. Es gelangt daher das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz zur Anwendung. Die Streumatrix $S_{\delta\delta}$ ergibt sich nach (Reißmann, 1980; Wolf, 1979) aus:

$$S_{\delta\delta} = A_{\delta} S_{ll} A_{\delta}^T \quad (4, 20)$$

Dabei bedeutet A_{δ} die Koeffizientenmatrix und S_{ll} die Streumatrix der Beobachtungen, die im Bereich der Distanzen auch außerhalb der Hauptdiagonale besetzt ist.

$$S_{ll} = \begin{pmatrix} m_{\Delta l_{14}}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{13}^2 & r_{13-34} m_{13} m_{34} & r_{13-23} m_{13} m_{23} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{13-34} m_{13} m_{34} & m_{34}^2 & r_{34-23} m_{34} m_{23} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{13-23} m_{13} m_{23} & r_{34-23} m_{34} m_{23} & m_{23}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{y_{14}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{y_{41}}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m_{\xi_1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\xi_4}^2 \end{pmatrix} \quad (4, 21)$$

Die Korrelationskoeffizienten r_{ik} lassen sich aus den Gewichtsreziproken \bar{q}_{ii} und Kofaktoren \bar{q}_{ik} des Distanzausgleiches berechnen:

$$r_{ik} = \frac{\bar{q}_{ik}}{\sqrt{\bar{q}_{ii} \cdot \bar{q}_{kk}}} \quad (4, 22)$$

*) Anm.: vereinfachte Bezeichnungsweise $m_{d_{ik}} = m_{ik}$, $r_{d_{ik}-d_{kj}} = r_{ik-kj}$

Der strichliert umrandete Bereich in $S_{||}$ ist nur der Anschaulichkeit halber mit Hilfe der Korrelationskoeffizienten r_{ik} angeschrieben; im Zuge der praktischen Aufstellung der $S_{||}$ wird hier direkt die Matrix $m_o^2 \cdot \bar{Q}$ (4, 11) aus dem Distanzausgleich eingesetzt. Die Seiten 112 und 113 zeigen die vollständigen Matrizen A_δ und $S_{||}$, aus denen dann $S_{\delta\delta}$ (4, 20) berechnet werden kann.

4.1.3.2 AUFSTELLUNG DER KOEFFIZIENTENMATRIX A_δ

Durch Differentiation der Bestimmungsgleichungen (4, 19) erhalten wir die Koeffizienten für die Fehlerrechnung. Ausgegangen wird von der Gleichung für δ_{14} :

$$\delta_{14} = z_{14} - \zeta_{14}^* - \varepsilon_1$$

Das Differential lautet:

$$d\delta_{14} = dz_{14} - d\zeta_{14}^* - d\varepsilon_1$$

dz_{14} ist das Differential der Gleichung (4, 14):

$$dz_{14} = - \underbrace{\frac{g^{cc}}{s_{14}} \cdot d\Delta H_{14}}_A + \underbrace{\frac{g^{cc} \cdot \Delta H_{14}}{s_{14} \cdot d_{14}} \cdot dd_{14}}_B + \frac{1}{2} \cdot d\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot d\varepsilon_4$$

Vernachlässigt wurden dabei die Glieder mit $d\zeta_{14}^*$ und dR_a wegen ihrer Kleinheit und zur weiteren Vereinfachung $\sin z_{14} = \sin \zeta_{14}^*$ und $d_{14} \cdot \sin z_{14} = s_{14}$ gesetzt. Mit den Abkürzungen A und B finden wir endgültig:

$$\boxed{d\delta_{14} = -A \cdot d\Delta H_{14} + B \cdot dd_{14} - d\zeta_{14}^* - \frac{1}{2} d\varepsilon_1 + \frac{1}{2} d\varepsilon_4} \quad (4, 23a)$$

Somit lauten $d\omega_{14}$ und $d\delta_{41}$:

$$d\omega_{14} = -d\zeta_{14}^* - d\zeta_{41}^* - d\varepsilon_1 + d\varepsilon_4$$

$$d\delta_{41} = +A \cdot d\Delta H_{14} - B \cdot dd_{14} - d\zeta_{41}^* - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4 \quad (4, 23b)$$

Es ist vorteilhaft, im Anschluß $d\delta_{42}$ zu bestimmen:

$$\delta_{42} = \delta_{41} - \psi_{241}$$

also:

$$d\delta_{42} = d\delta_{41} - d\psi_{241}$$

Dabei war ψ_{241} :

$$\psi_{241} = \alpha_{241} - \zeta_{41}^* + \zeta_{42}^*$$

Im Differential:

$$d\psi_{241} = d\alpha_{241} - d\zeta_{41}^* + d\zeta_{42}^*$$

tritt $d\alpha_{241}$ auf, dessen Bildungsgesetz schon aus (3, 53) bekannt ist:

$$d\alpha_{241} = \varrho \cdot \underbrace{\frac{d_{12}}{d_{24} d_{14} \sin \alpha_{241}}}_{C_{12}(241)} \cdot dd_{12} + \varrho \cdot \underbrace{\frac{d_{14} \cos \alpha_{241} - d_{24}}{d_{24} d_{14} \sin \alpha_{241}}}_{C_{24}(241)} \cdot dd_{24} + \varrho \cdot \underbrace{\frac{d_{24} \cos \alpha_{241} - d_{14}}{d_{24} d_{14} \sin \alpha_{241}}}_{C_{14}(241)} \cdot dd_{14}$$

Damit läßt sich $d\delta_{42}$ bereits anschreiben:

$$d\delta_{42} = +A \cdot d\Delta H_{14} - C_{12}(241) \cdot dd_{12} - (B + C_{14}(241)) \cdot dd_{14} - C_{24}(241) \cdot dd_{24} - d\zeta_{42}^* - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4 \quad (4, 23c)$$

Bei der Bildung der restlichen neun Refraktionswinkeldifferentiale treten nur mehr formal gleichartige Koeffizienten auf. Daher kann hier auf ihre Ableitung verzichtet und direkt auf ihre Anschreibung in (4, 23) verwiesen werden.

Koeffizientenmatrix A_δ (1. Teil)

	$d\Delta H_{14}$	dd_{13}	dd_{34}	dd_{23}	dd_{12}	dd_{14}	dd_{24}
$d\delta_{14}$	-A	0	0	0	0	+B	0
$d\delta_{41}$	+A	0	0	0	0	-B	0
$d\delta_{42}$	+A	0	0	0	$-C_{12}(241)$	$-(B+C_{14}(241))$	$-C_{24}(241)$
$d\delta_{43}$	-A	0	$+C_{34}(342)$	$+C_{23}(342)$	$+C_{12}(241)$	$+(B+C_{14}(241))$	$+(C_{24}(241)+C_{24}(342))$
$d\delta_{13}$	-A	$-C_{13}(413)$	$-C_{34}(413)$	0	0	$+(B-C_{14}(413))$	0
$d\delta_{31}$	+A	$+C_{13}(413)$	$+C_{34}(413)$	0	0	$-(B-C_{14}(413))$	0
$d\delta_{32}$	+A	$+(C_{13}(413)-C_{13}(231))$	$+C_{34}(413)$	$-C_{23}(231)$	$-C_{12}(231)$	$-(B-C_{14}(413))$	0
$d\delta_{34}$	+A	$+(C_{13}(413)+C_{13}(134))$	$+(C_{34}(413)+C_{34}(134))$	0	0	$-(B-C_{14}(413)-C_{14}(134))$	0
$d\delta_{12}$	+A	$+(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$+C_{34}(413)$	$+C_{23}(312)$	$+C_{12}(312)$	$-(B-C_{14}(413))$	0
$d\delta_{21}$	-A	$-(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$-C_{34}(413)$	$-C_{23}(312)$	$-C_{12}(312)$	$+(B-C_{14}(413))$	0
$d\delta_{24}$	-A	$-(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$-C_{34}(413)$	$-C_{23}(312)$	$-(C_{12}(312)+C_{12}(124))$	$+(B-C_{14}(413)-C_{14}(124))$	$-C_{24}(124)$
$d\delta_{23}$	-A	$-(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$-(C_{34}(413)+C_{34}(423))$	$-(C_{23}(312)+C_{23}(423))$	$-(C_{12}(312)+C_{12}(124))$	$+(B-C_{14}(413)-C_{14}(124))$	$-(C_{24}(124)+C_{24}(423))$

Koeffizientenmatrix A_δ (2. Teil)

	$d\zeta_{12}^*$	$d\zeta_{21}^*$	$d\zeta_{13}^*$	$d\zeta_{31}^*$	$d\zeta_{14}^*$	$d\zeta_{41}^*$	$d\zeta_{23}^*$	$d\zeta_{32}^*$	$d\zeta_{24}^*$	$d\zeta_{42}^*$	$d\zeta_{34}^*$	$d\zeta_{43}^*$	$d\varepsilon_1$	$d\varepsilon_2$	$d\varepsilon_3$	$d\varepsilon_4$
$d\delta_{14}$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1/2	0	0	+1/2
$d\delta_{41}$	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1/2	0	0	+1/2
$d\delta_{42}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1/2	0	0	+1/2
$d\delta_{43}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	+1/2	0	0	-1/2
$d\delta_{13}$	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1/2	0	0	+1/2
$d\delta_{31}$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1/2	0	+1	-1/2
$d\delta_{32}$	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1/2	0	+1	-1/2
$d\delta_{34}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1/2	0	+1	-1/2
$d\delta_{12}$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1/2	0	0	-1/2
$d\delta_{21}$	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1/2	-1	0	+1/2
$d\delta_{24}$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	+1/2	-1	0	+1/2
$d\delta_{23}$	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	+1/2	-1	0	+1/2

(4, 23)

4.1.4 DIE BERECHNUNG DER ELLIPSOIDISCHEN HÖHENUNTERSCHIEDE

Sind die zwölf Refraktionswinkel δ_{ik} ermittelt, gewinnt man die ellipsoidischen Höhenunterschiede Δh_{ik} im vertikalen Viereck aus (2, 10):

$$\Delta h_{ik} = d_{ik} \cos \zeta_{ik} - d_{ik} \sin \zeta_{ik} \cdot \delta_{ik} + \frac{d_{ik}^2 \sin^2 \zeta_{ik}}{2R_a}$$

Dabei sind die ellipsoidischen Zenitdistanzen nach (2, 5) gegeben aus:

$$\zeta_{ik} = \zeta_{ik}^* + \varepsilon_{ik}$$

Da die Überbestimmung im Distanznetz durch einen Ausgleich verarbeitet worden ist und die Refraktionswinkel einem vollständig bestimmten System entstammen, ist es klar, daß keine Widersprüche zwischen den einzelnen Höhenunterschieden, bzw. ihren Summen und Differenzen auftreten können!

In jedem Teildreieck des vertikalen Vierecks muß gelten:

$$\Delta h_{ik} + \Delta h_{kl} + \Delta h_{li} = 0 \quad (4, 24)$$

Ebenso für die Summe aus hin und rück:

$$\Delta h_{ik} + \Delta h_{ki} = 0 \quad (4, 25)$$

Mittlere Fehler von Höhenunterschieden bzw. Punkthöhen im vertikalen Viereck können dementsprechend nicht aus Überbestimmungen oder Widersprüchen errechnet werden, sondern sind nur durch die abgeleiteten Fehlerformeln (4, 29) zu erhalten.

4.2 DAS VERTIKALE VIERECK ALS METHODE ZUR REFRAKTIONS- UNBEEINFLUSSTEN ERMITTLUNG GROSSER HÖHENUNTER- SCHIEDE

Interessieren die absoluten Größen der Refraktionswinkel δ_{ik} in der Meßanordnung nicht, sondern sollen nur die Höhenunterschiede zu den beiden Bergpunkten möglichst genau (d. h. ohne Verwendung refraktionsfehlerbelasteter Zenitdistanzen) bestimmt werden, so können alle Zenitdistanzbeobachtungen ζ_{ik}^* aus 4.1 unterlassen werden. *) Die zur Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede Δh_{ik} notwendigen refraktionsfreien ellipsoidischen Zenitdistanzen z_{ik} sind ja durch das überbestimmt ausgemessene vertikale Distanznetz und das geometrisch-astronomische Nivellement zwischen den beiden Talpunkten 1 und 4 festgelegt. Formel (4, 14) liefert z_{14} und damit die "Orientierung" der durch die sechs Distanzen überbestimmt erhaltenen Winkel α im vertikalen Diagonalviereck. Die zum Übergang von den Zenitdistanzen z_{ik} auf ihre Gegenzenitdistanzen z_{ki} notwendigen ellipsoidischen Zenitwinkel δ_{ik} sind durch die Näherungsformel (3, 57) immer genau genug gegeben (siehe 3. 2. 6. 4. 4). Seite 116 zeigt - unter Benutzung der gleichen Vorgangsweise wie in (4, 19) - die zwölf Bestimmungsgleichungen für die refraktionsfreien ellipsoidischen Zenitdistanzen z_{ik} (4, 26). Daneben sind gleich die Differentiale dz_{ik} (4, 27) zur späteren Fehlerrechnung angeschrieben. Die Glieder $d\delta_{ik}$ sind dabei schon unterdrückt, da sie bei der Genauigkeit der in δ_{ik} auftretenden Größen keinen Beitrag zu dz_{ik} leisten können. Die aus (2, 12) mit $k = 0$ zu berechnenden ellipsoidischen Höhenunterschiede sind natürlich durch die geometrischen Abhängigkeiten im Sinne von (4, 24) und (4, 25) widerspruchsfrei.

*) Anm.: Hier gilt die Einschränkung, daß zur Reduktion der gemessenen Distanzen auf die Bodenpunkte (2, 15c) genäherte Zenitdistanzen (aus einem Satz oder aus Näherungshöhen) gebraucht werden. Wegen 2. 1. 2. 4 darf deren fehlertheoretischer Einfluß auf die d_{ik} aber vernachlässigt werden.

$$z_{14} = \arccos \left(\frac{\Delta H_{14}(\text{Niv}) - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2} \cdot \frac{d_{14} \cdot \sin \zeta_{14}^*}{\rho} - \frac{d_{14}^2 \cdot \sin^2 \zeta_{14}^*}{2R\alpha}}{d_{14}} \right)$$

$$z_{41} = 200^g - z_{14} + \delta_{14}$$

$$z_{42} = z_{41} - \alpha_{241} = 200^g - z_{14} - \alpha_{241} + \delta_{14}$$

$$z_{43} = \alpha_{342} - z_{42} = -200^g + z_{14} + \alpha_{241} + \alpha_{342} - \delta_{14}$$

$$z_{13} = z_{14} - \alpha_{413}$$

$$z_{31} = 200^g - z_{13} + \delta_{13} = 200^g - z_{14} + \alpha_{413} + \delta_{13}$$

$$z_{32} = z_{31} - \alpha_{231} = 200^g - z_{14} + \alpha_{413} - \alpha_{231} + \delta_{13}$$

$$z_{34} = z_{31} + \alpha_{134} = 200^g - z_{14} + \alpha_{413} + \alpha_{134} + \delta_{13}$$

$$z_{12} = \alpha_{312} - z_{13} = -z_{14} + \alpha_{413} + \alpha_{312}$$

$$z_{21} = 200^g - z_{12} + \delta_{12} = 200^g + z_{14} - \alpha_{413} - \alpha_{312} + \delta_{12}$$

$$\begin{aligned} z_{24} = z_{21} - \alpha_{124} &= 200^g - z_{12} + \delta_{12} - \alpha_{124} = \\ &= 200^g + z_{13} - \alpha_{312} - \alpha_{124} + \delta_{12} = \\ &= 200^g + z_{14} + \delta_{12} - \alpha_{413} - \alpha_{312} - \alpha_{124} \end{aligned}$$

$$z_{23} = z_{24} - \alpha_{423} = 200^g + z_{14} - \alpha_{413} - \alpha_{312} - \alpha_{124} - \alpha_{423} + \delta_{12}$$

(4, 26)

$$dz_{14} = -A d\Delta H_{14} + B dd_{14} + \frac{1}{2} d\varepsilon_1 + \frac{1}{2} d\varepsilon_4$$

$$dz_{41} = -dz_{14}$$

$$dz_{42} = dz_{41} - d\alpha_{241} = -dz_{14} - d\alpha_{241}$$

$$dz_{43} = -dz_{42} + d\alpha_{342} = dz_{14} + d\alpha_{241} + d\alpha_{342}$$

$$dz_{13} = dz_{14} - d\alpha_{413}$$

$$dz_{31} = -dz_{13} = -dz_{14} + d\alpha_{413}$$

$$dz_{32} = dz_{31} - d\alpha_{231} = -dz_{14} + d\alpha_{413} - d\alpha_{231}$$

$$dz_{34} = dz_{31} + d\alpha_{134} = -dz_{14} + d\alpha_{413} + d\alpha_{134}$$

$$dz_{12} = -dz_{13} + d\alpha_{312} = -dz_{14} + d\alpha_{413} + d\alpha_{312}$$

$$dz_{21} = -dz_{12} = dz_{14} - d\alpha_{413} - d\alpha_{312}$$

$$\begin{aligned} dz_{24} = dz_{21} - d\alpha_{124} &= -dz_{12} - d\alpha_{124} = \\ &= dz_{13} - d\alpha_{312} - d\alpha_{124} = \\ &= dz_{14} - d\alpha_{413} - d\alpha_{312} - d\alpha_{124} \end{aligned}$$

$$dz_{23} = dz_{24} - d\alpha_{423} = dz_{14} - d\alpha_{413} - d\alpha_{312} - d\alpha_{124} - d\alpha_{423}$$

(4, 27)

4. 2. 1 DIE MITTLEREN FEHLER DER ELLIPSOIDISCHEN HÖHENUNTERSCHIEDE

Zur Ermittlung der $m_{\Delta h_{ik}}$ wird das Differential der Formel (2, 12) gebildet, wobei das Erdkrümmungsglied unbeachtet bleibt, da es für die Fehlerrechnung wegen seiner Kleinheit unwirksam ist.

$$d\Delta h_{ik} = \cos z_{ik} \cdot dd_{ik} - \underbrace{d_{ik} \sin z_{ik}}_{\doteq s_{ik}} \cdot \frac{dz_{ik}}{\varrho} \quad (4, 28a)$$

Die dz_{ik} in (4, 28a) entnehmen wir (4, 27) und setzen für die $d\alpha$ wieder die Differentialausdrücke der Form (3, 53) ein. Die sich so ergebenden Fehlergleichungen für die $d\Delta h_{ik}$ sind auf Seite 119 angeschrieben. Sie enthalten gegenüber den Fehlergleichungen für die Refraktionswinkel δ_{ik} aus 4. 1. 3. 2 nur mehr Koeffizienten für $d\Delta H_{14}$, die entsprechenden dd_{ik} , sowie $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_4$. Bedenkt man, daß in den Koeffizienten $z_{ik} \doteq \zeta_{ik} \doteq \zeta_{ik}^*$ ausreichend genau ist, so läßt sich unschwer die notwendige Identität der hier aufgeführten Fehlergleichungen mit jenen erkennen, die für die in 4. 1. 4 aus (2, 10) berechneten Höhenunterschiede gelten. Mit den schon bekannten Vernachlässigungen lautet das Differential eines aus (2, 10) gewonnen ellipsoidischen Höhenunterschieds:

$$d\Delta h_{ik} = \cos \zeta_{ik}^* \cdot dd_{ik} - \frac{d_{ik} \sin \zeta_{ik}^*}{\varrho} \cdot (d\zeta_{ik}^* + d\varepsilon_i + d\delta_{ik}) \quad (4, 28b)$$

In diese Formel werden die jeweiligen Ausdrücke für $d\delta_{ik}$ mit ihren Koeffizienten aus A_δ eingesetzt. Die Terme mit $d\zeta_{ik}^*$ heben einander auf, ebenso jene mit $d\varepsilon_i$ für $i \neq 1$ oder 4. *) Die Koeffizienten von $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_4$ lauten wie in (4, 27) beide + 0,5 oder beide - 0,5, je nach dem ob die Zenitdistanz in das - zur Berechnung der ε_i einheitlich gewählte - Azimut A_{14}^* oder in das Gegenazimut weist.

) Anm.: Diese Tatsache ist natürlich trivial, da ja die δ_{ik} im Prinzip aus den Differenzen der z_{ik} und $\zeta_{ik}^ + \varepsilon_i$ gebildet worden sind, was aber aus dem Formelsystem (4, 18) nicht unmittelbar ersichtlich ist.

Die Koeffizientenmatrix $A_{\Delta h}$ (4, 28) kann zur numerischen Rechnung sehr einfach aus der Koeffizientenmatrix A_{δ} (4, 23) gewonnen werden: Dazu ist vorerst die Koeffizientenmatrix A_z (4, 27) aufzustellen. Sie entsteht aus A_{δ} , wenn die Spalten 8 - 19 ($d\zeta_{ik}^*$) sowie 21 ($d\varepsilon_2$) und 22 ($d\varepsilon_3$) gestrichen werden und in den Spalten 20 ($d\varepsilon_1$) und 23 ($d\varepsilon_4$) der Koeffizient $+0,5$ (Azimut von $z_{ik} = \text{Azimut von } \varepsilon_i$) oder $-0,5$ (Azimut von $z_{ik} = \text{Azimut von } \varepsilon_i + 200^g$) gesetzt wird. A_z ist jetzt mit einer Diagonalmatrix D zu multiplizieren, die mit den Faktoren $-\frac{s_{ik}}{\varrho}$ besetzt ist. Addiert man vor dieser Multiplikation in jeder Zeile den Ausdruck

$$F_{ik} = -\frac{\varrho}{s_{ik}} \cdot \cos z_{ik}$$

zum Faktor desjenigen dd_{ik} , das die gleichen Indices wie $d\Delta h_{ik}$ trägt, so ist mit der Produktmatrix $D \cdot A_z$ bereits $A_{\Delta h}$ gefunden.

Unter Anwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ergibt sich die Matrix $S_{\Delta h \Delta h}$ der mittleren Fehlerquadrate $m_{\Delta h_{ik}}^2$ nach:

$$S_{\Delta h \Delta h} = A_{\Delta h} \cdot S_{II} \cdot A_{\Delta h}^T \quad (4, 29)$$

Dabei ist natürlich S_{II} um die Spalten (und Zeilen) 8 - 19, 21 und 22 vermindert.

Fehlergleichungen für die ellipsoidischen Höhenunterschiede

$$d\Delta h_{14} = -\frac{s_{14}}{\varrho} \cdot (-A d\Delta H_{14} + \overbrace{(F_{14}+B)}^0 dd_{14} + \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{41} = -\frac{s_{14}}{\varrho} \cdot (+A d\Delta H_{14} - \overbrace{(-F_{41}+B)}^{\pm F_{14}} dd_{14} - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 - \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{42} = -\frac{s_{24}}{\varrho} \cdot (+A d\Delta H_{14} - C_{12}(241) dd_{12} - (B+C_{14}(241)) dd_{14} - (F_{24}+C_{24}(241)) dd_{24} - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 - \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{43} = -\frac{s_{34}}{\varrho} \cdot (-A d\Delta H_{14} + (-F_{34}+C_{34}(342)) dd_{34} + C_{23}(342) dd_{23} + C_{12}(241) dd_{12} + (B+C_{14}(241)) dd_{14} + (C_{24}(241)+C_{24}(342)) dd_{24} + \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{13} = -\frac{s_{13}}{\varrho} \cdot (-A d\Delta H_{14} + (F_{13}-C_{13}(413)) dd_{13} - C_{34}(413) dd_{34} + (B-C_{14}(413)) dd_{14} + \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{31} = -\frac{s_{13}}{\varrho} \cdot (+A d\Delta H_{14} + (-F_{13}+C_{13}(413)) dd_{13} + C_{34}(413) dd_{34} - (B-C_{14}(413)) dd_{14} - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 - \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{32} = -\frac{s_{23}}{\varrho} \cdot (+A d\Delta H_{14} + (C_{13}(413)-C_{13}(231)) dd_{13} + C_{34}(413) dd_{34} - (F_{23}+C_{23}(231)) dd_{23} - C_{12}(231) dd_{12} - (B-C_{14}(413)) dd_{14} - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 - \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{34} = -\frac{s_{34}}{\varrho} \cdot (+A d\Delta H_{14} + (C_{13}(413)+C_{13}(134)) dd_{13} + (F_{34}+C_{34}(413)+C_{34}(134)) dd_{34} - (B-C_{14}(413)-C_{14}(134)) dd_{14} - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 - \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{12} = -\frac{s_{12}}{\varrho} \cdot (+A d\Delta H_{14} + (C_{13}(413)+C_{13}(312)) dd_{13} + C_{34}(413) dd_{34} + C_{23}(312) dd_{23} + (F_{12}+C_{12}(312)) dd_{12} - (B-C_{14}(413)) dd_{14} - \frac{1}{2}d\varepsilon_1 - \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{21} = -\frac{s_{12}}{\varrho} \cdot (-A d\Delta H_{14} - (C_{13}(413)+C_{13}(312)) dd_{13} - C_{34}(413) dd_{34} - C_{23}(312) dd_{23} - (F_{12}+C_{12}(312)) dd_{12} + (B-C_{14}(413)) dd_{14} + \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{24} = -\frac{s_{24}}{\varrho} \cdot (-A d\Delta H_{14} - (C_{13}(413)+C_{13}(312)) dd_{13} - C_{34}(413) dd_{34} - C_{23}(312) dd_{23} - (C_{12}(312)+C_{12}(124)) dd_{12} + (B-C_{14}(413)-C_{14}(124)) dd_{14} + (F_{24}-C_{24}(241)) dd_{24} + \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

$$d\Delta h_{23} = -\frac{s_{23}}{\varrho} \cdot (-A d\Delta H_{14} - (C_{13}(413)+C_{13}(312)) dd_{13} - (C_{34}(413)+C_{34}(423)) dd_{34} + (F_{23}-C_{23}(312)-C_{23}(423)) dd_{23} - (C_{12}(312)+C_{12}(124)) dd_{12} + (B-C_{14}(413)-C_{14}(124)) dd_{14} - (C_{24}(124)+C_{24}(423)) dd_{24} + \frac{1}{2}d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}d\varepsilon_4)$$

Die Koeffizientenmatrix der Fehlergleichungen wird mit $A_{\Delta h}$ bezeichnet.

(4, 28)

Koeffizientenmatrix A_Z

	$d\Delta H_{14}$	dd_{13}	dd_{34}	dd_{23}	dd_{12}	dd_{14}	dd_{24}	dE_1	dE_4
z_{14}	-A	0	0	0	0	+B	0	+1/2	+1/2
z_{41}	+A	0	0	0	0	-B	0	-1/2	-1/2
z_{42}	+A	0	0	0	$-C_{12}(241)$	$-(B+C_{14}(241))$	$-C_{24}(241)$	-1/2	-1/2
z_{43}	-A	0	$+C_{34}(342)$	$+C_{23}(342)$	$+C_{12}(241)$	$+(B+C_{14}(241))$	$+ (C_{24}(241)+C_{24}(342))$	+1/2	+1/2
z_{13}	-A	$-C_{13}(413)$	$-C_{34}(413)$	0	0	$+(B-C_{14}(413))$	0	+1/2	+1/2
z_{31}	+A	$+C_{13}(413)$	$+C_{34}(413)$	0	0	$-(B-C_{14}(413))$	0	-1/2	-1/2
z_{32}	+A	$+(C_{13}(413)-C_{13}(231))$	$+C_{34}(413)$	$-C_{23}(231)$	$-C_{12}(231)$	$-(B-C_{14}(413))$	0	-1/2	-1/2
z_{34}	+A	$+(C_{13}(413)+C_{13}(134))$	$+(C_{34}(413)+C_{34}(134))$	0	0	$-(B-C_{14}(413)-C_{14}(134))$	0	-1/2	-1/2
z_{12}	+A	$+(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$+C_{34}(413)$	$+C_{23}(312)$	$+C_{12}(312)$	$-(B-C_{14}(413))$	0	+1/2	+1/2
z_{21}	-A	$-(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$-C_{34}(413)$	$-C_{23}(312)$	$-C_{12}(312)$	$+(B-C_{14}(413))$	0	+1/2	+1/2
z_{24}	-A	$-(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$-C_{34}(413)$	$-C_{23}(312)$	$-(C_{12}(312)+C_{12}(124))$	$+(B-C_{14}(413)-C_{14}(124))$	$-C_{24}(124)$	+1/2	+1/2
z_{23}	-A	$-(C_{13}(413)+C_{13}(312))$	$-(C_{34}(413)+C_{34}(423))$	$-(C_{23}(312)+C_{23}(423))$	$-(C_{12}(312)+C_{12}(124))$	$+(B-C_{14}(413)-C_{14}(124))$	$-(C_{24}(124)+C_{24}(423))$	+1/2	+1/2

(4, 27)

Matrix D

$$\begin{pmatrix}
 \frac{s_{14}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{s_{14}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{s_{24}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{34}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{13}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{13}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{23}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{34}}{g} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{12}}{g} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{12}}{g} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{24}}{g} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{23}}{g}
 \end{pmatrix}$$

Matrix F

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +F_{14} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{14} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{24} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -F_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & +F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +F_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & +F_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +F_{24} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & +F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

$$F_{ik} = -\frac{g \cdot \cos z_{ik}}{s_{ik}}$$

*) Anm.: Da $s_{ki} = s_{ik}$ und $\cos z_{ki} = -\cos z_{ik}$ ist, darf man ohne Genauigkeitsverlust $F_{ki} = -F_{ik}$ setzen. Speziell gilt: $F_{14} = -B$

4. 2. 2 DIE GEWINNUNG DER NIVELLEMENTHÖHENUNTERSCHIEDE

Die Nivellementhöhenunterschiede $\Delta H_{ik}^{(Niv)}$ zu den Bergpunkten des vertikalen Vierecks werden durch Kombination der ellipsoidischen Höhenunterschiede Δh_{ik} mit den Niveauflächenundulationsdifferenzen $\Delta N_{ik}^!$ nach dem Theorem von Villarceau (1, 2) berechnet:

$$\Delta H_{ik}^{(Niv)} = \Delta h_{ik} - \Delta N_{ik}^!$$

Bei Annahme eines kreisbogenförmigen Niveauflächenanstieges können die $\Delta N_{ik}^!$ über die Lotabweichungskomponenten ε_i ermittelt werden.

$$\Delta N_{ik}^! = - \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_k}{2} \cdot \frac{s_{ik}}{\varrho} \quad (1, 3a)$$

Die $\Delta N_{ik}^!$ in fehlertheoretische Überlegungen einzubeziehen, erscheint nicht sinnvoll, da der zu ihrer Berechnung angenommene kreisbogenförmige Geoidverlauf bei den geringen Punktabständen im vertikalen Viereck wohl erwartet, aber nicht ohne weitere astronomische Messungen gesichert werden kann.

Für den Übergang auf echte Meereshöhendifferenzen ΔH_{ik} wären darüber hinaus gravimetrische Messungen zur Berechnung der orthometrischen Korrekturen notwendig.

4.3 DIE VORAUSZUSETZENDEN GENAUIGKEITEN DER MESSGRÖSSEN

Die Genauigkeitsanforderungen an die Bestimmungsgrößen im vertikalen Viereck sind äußerst hoch. Sie sind bereits in den Kapiteln 3.2.6.4 und 4.1.2 besprochen worden, sollen aber der Übersichtlichkeit halber an dieser Stelle noch einmal zusammengestellt werden.

Um einen mittleren Fehler in den Refraktionswinkeln von $\sim \pm 3^{\text{CC}}$ einzuhalten (dem entspricht ein $m_{\Delta h}$ von $\sim \pm 5 \text{ mm}/1000\text{m } \Delta h$), sind in etwa folgende mittlere Fehler bei den Meßgrößen einzuhalten:

Distanzen d_{ik} :	$m_{d_{ik}}$	$\cong \pm 1 \text{ mm}$
Nivellement ΔH_{14} :	$m_{\Delta H_{14}}$	$\cong \pm 0,5 \text{ mm}$
Zenitdistanzen ζ_{ik}^* :	$m_{\zeta_{ik}^*}$	$\cong \pm 1^{\text{CC}}$
natürl. Lotrichtungen φ_i^*, λ_i^* :	$m_{\varphi_i^*} = m_{\lambda_i^*}$	$\cong \pm 0,7^{\text{CC}}$

Für die notwendige Reduktion der gemessenen Distanzen und Zenitdistanzen auf die Bodenpunkte sind die Instrumenten-, Ziel- und Reflektorhöhen auf besser als $\pm 1 \text{ mm}$ zu erfassen (siehe 2.1.2.4)!

Auf die Realisation der Genauigkeitsvorgaben in der Praxis wird in 4.4 näher eingegangen.

4.4 ERPROBUNG DES VERFAHRENS

Zur praktischen Erprobung des Verfahrens wurde das vertikale Dreieck "Hohe Wand" (siehe 3. 2. 6. 4. 6) durch Einfluchtung eines vierten Punktes zu einem vertikalen Viereck erweitert. Der neue Punkt konnte so gewählt werden, daß die von ihm zu den beiden Bergpunkten ausgehenden Strecken fast genau die gleichen Längen aufwiesen, wie die beiden vom ersten Talpunkt wegweisenden. Die Abb. 48 und 49 zeigen die neue Meßanordnung.

Vertikales Viereck "Hohe Wand"

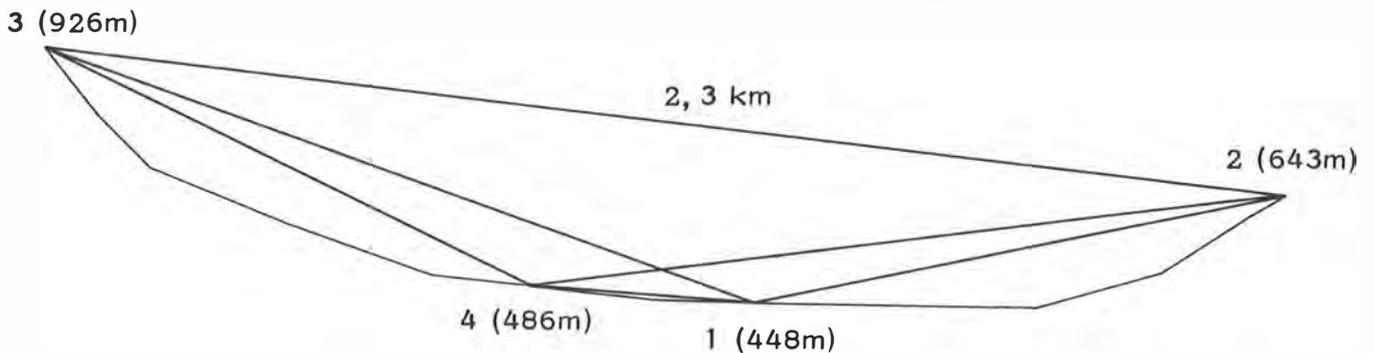


Abb. 48

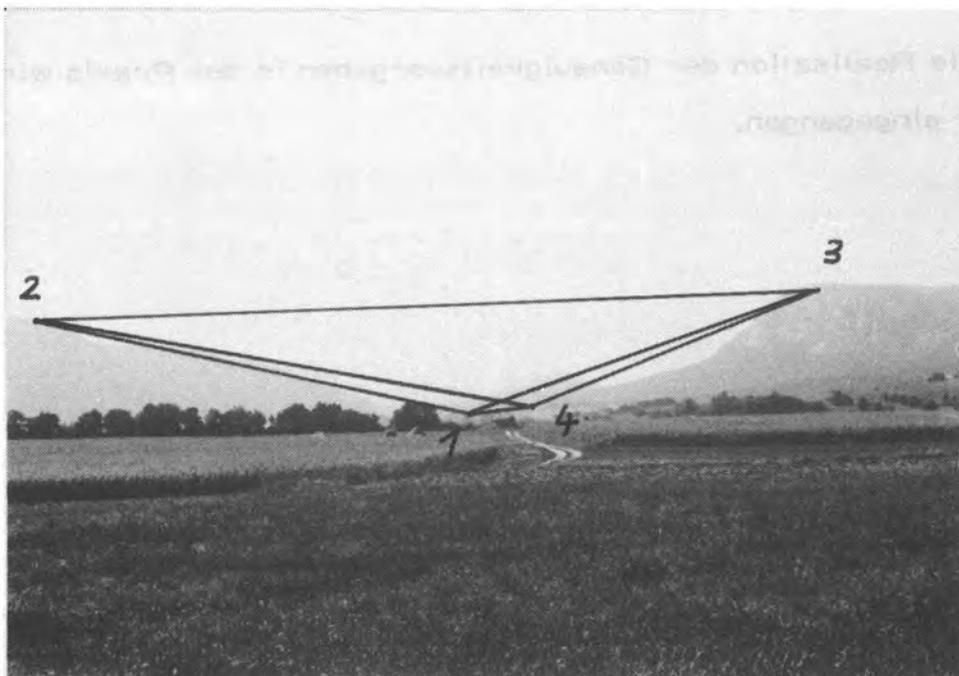


Abb. 49



Abb. 51
(Visuren 3-2, 3-1, 3-4)



Abb. 50
(Visur 4-3)

4.4.1 BESCHREIBUNG DER MESSPUNKTE

Punkt 1: Zweiersdorf Feld (H = 448 m)

Der Punkt liegt etwa in Talmitte auf einem, einem Feldweg folgenden, Rain. Das umgebende Terrain ist durchwegs eben bis leicht ansteigend. Im Bewuchs herrschen Wiesen und Weizenfelder vor. Die Stabilisierung besteht aus einem massiv einbetonierten Bolzen, der in der Mitte mit einer feinen Körnung versehen worden ist.

Punkt 2: Kienberg Irmafelsen (H= 643m)

Der Irmafelsen ist eine, wenige Meter unterhalb des Kienberggipfels aus dem Hang hervortretende, Felsnase mit etwa $2 \times 2 \text{ m}^2$ Fläche. In den Felsen ist ein Gasrohr ($\varnothing = 2 \text{ cm}$) einbetoniert, in dessen Zentrum eine Körnung in den Beton geschlagen worden ist. Der Kienberg ist, von einigen Felswänden abgesehen, vom Fuß bis zum Gipfel dicht bewaldet (Mischwald).

Punkt 3: Hubertushaus Pfeiler (H= 926 m)

Der Meßpunkt, ein Beobachtungspfeiler des Instituts für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abt. Landesvermessung, der TU Wien steht am Rande des Steilabfalls der Hohen Wand unweit der Schutzhütte Hubertushaus. Der Bereich hinter dem Pfeiler ist stark bewaldet; die Felswand selbst, die etwa 5-7 m vor dem Pfeiler scharf abbricht, ist wegen ihrer Steilheit fast vegetationslos. Erst ihr etwas sanfter abfallender Fuß trägt dann wieder starken Nadelbaumbewuchs.

Punkt 4: Zweiersdorf Straße (H= 486 m)

In der gleichen Art und Weise stabilisiert wie Punkt 1, liegt der Punkt 4 unmittelbar neben der Landesstraße durch Zweiersdorf. Die engere Umgebung zeigt ein unterschiedliches Bild. In Richtung Hohe Wand beginnt sofort nach der Asphaltstraße dichter Wald, in Richtung Kienberg wechseln einander Wiesen und Felder ab. Bedingt durch dieses uneinheitliche Umfeld ist bei diesem Punkt ein anomales Refraktionsverhalten erwartet worden.

4. 4. 2 BESCHREIBUNG DER VISUREN

Profile 1 - 6 (Abb. 52-57)

Bei der im Testnetz "Hohe Wand" gefundenen Konfiguration des vertikalen Vierecks bieten sich die sechs Visuren in fast idealer Weise zu Refraktionsuntersuchungen an:

- 1^o Die Visuren 1-2, 1-3, 4-2, 4-3 sind, mehrere Hauptschichten der brechenden Atmosphäre (siehe 3. 2. 2) durchlaufende, Steilvisuren. Da sie darüber hinaus paarweise gleiche Längen aufweisen (1-2, 4-3 = 1,0 km; 1-3, 4-2 = 1,4 km), lassen sich sofort direkte Vergleiche anstellen.
- 2^o Die Visur 2-3 ist eine typische flache Gipfel-Gipfelvisur mit großem Bodenabstand über ihre gesamte Länge.
- 3^o Die Visur 1-4 schließlich ist ein markantes Beispiel für eine bodennahe Visur.

Es besteht also im vertikalen Viereck die Möglichkeit gleichzeitig und azimutunabhängig das Refraktionsverhalten aller drei Grundtypen von Visuren zu studieren. Dies ist umsomehr von Bedeutung, als nicht nur die relativen Winkeländerungen der einzelnen Sichten während einer bestimmten Zeitspanne verglichen werden können, sondern sich auch die (nach (4,18) ermittelten) absoluten Größen der einzelnen Refraktionswinkel betrachten lassen.

Da alle Visuren in beiden Richtungen beobachtet werden und alle zwölf Refraktionswinkel aus dem Formelsystem (4,18) vorliegen, können auch Aussagen über das Verhalten von gleichzeitig und gegenseitig gemessenen Zenitdistanzen getroffen werden.

Schlußendlich besteht auch noch die Gelegenheit, das Refraktionsverhalten der 3 - von jeweils einem Standpunkt in einer Vertikalebene beobachteten - Visuren untereinander zu vergleichen.

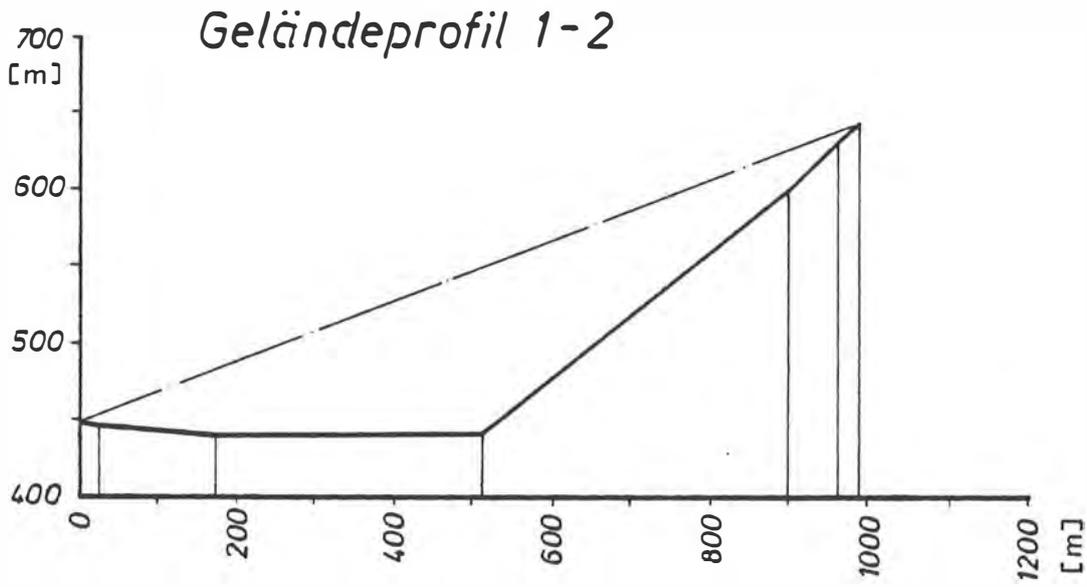


Abb. 52

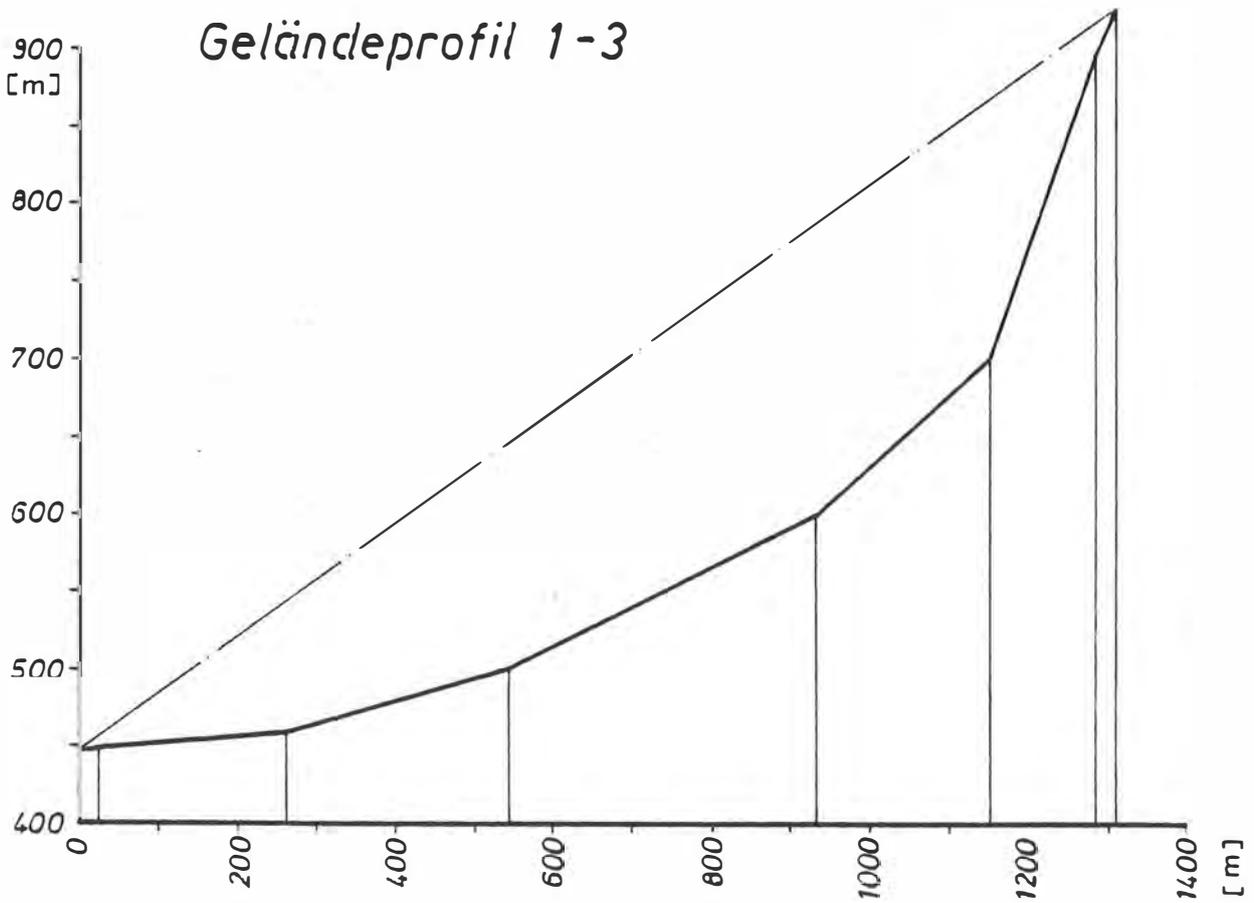


Abb. 53

Längsmaßstab = 1 : 10.000

Höhenmaßstab = 1 : 5.000

Überhöhung = 2 : 1

Geländeprofil 1 - 4

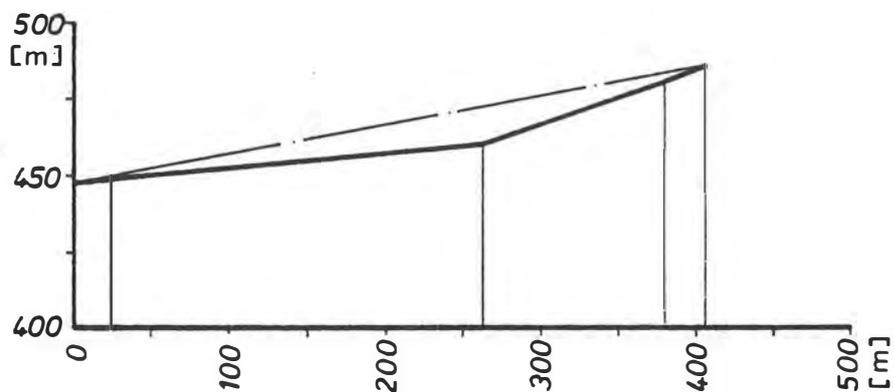


Abb. 54

Geländeprofil 2 - 3

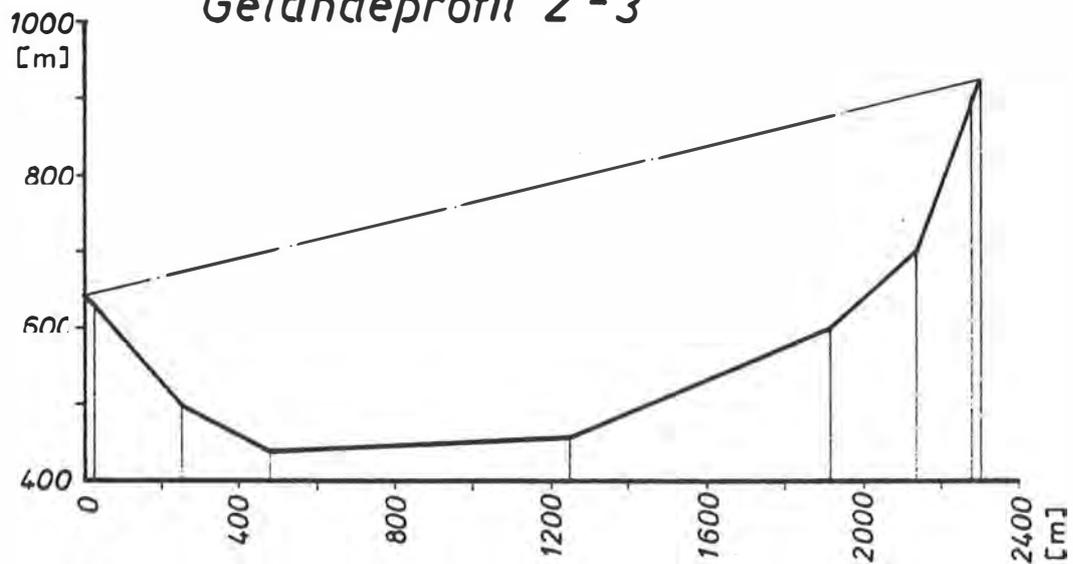


Abb. 55

Geländeprofil 2 - 4

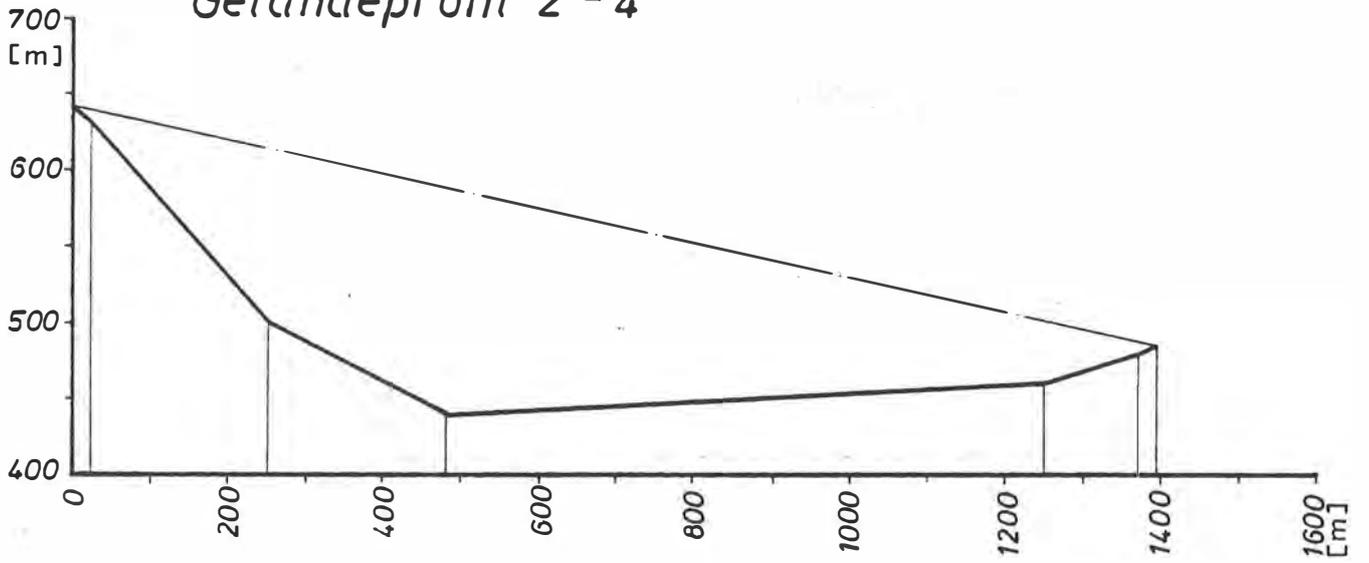


Abb. 56

Geländeprofil 3 - 4

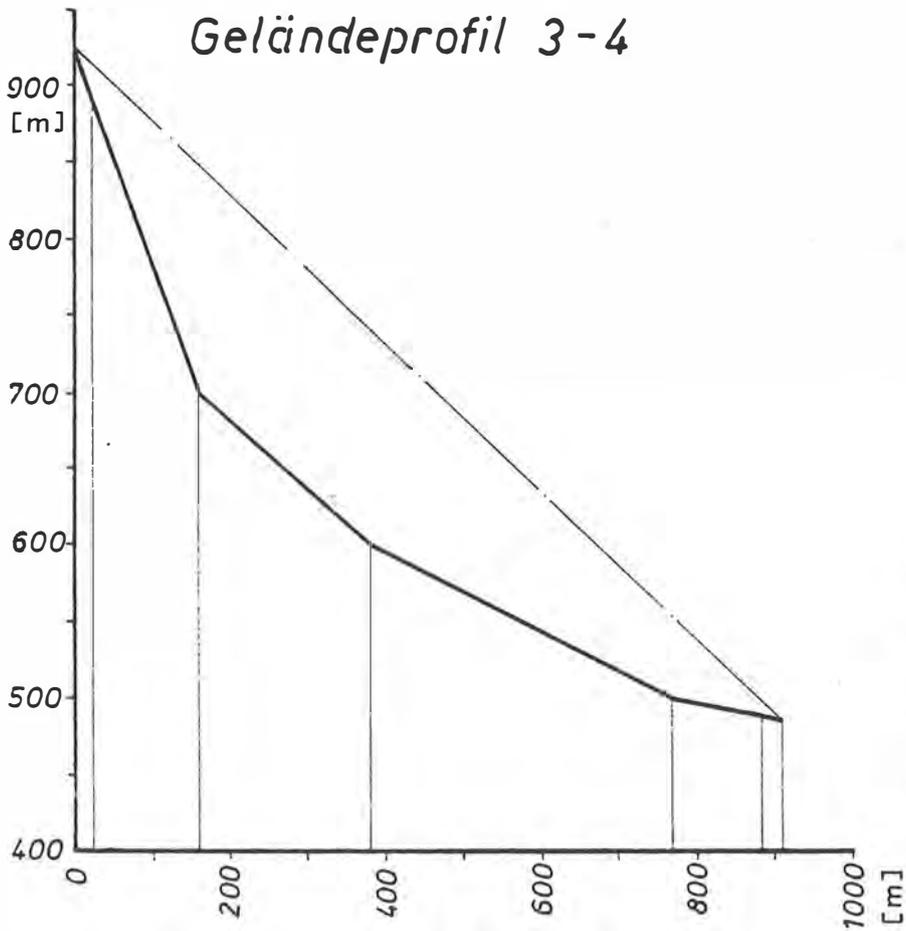


Abb. 57

4.4.3 DIE MESSUNGEN

Mit dem 3. Juli 1980, an dem die Einfluchtung des Talpunktes 1 von den beiden Bergpunkten 2 und 3 aus vorgenommen wurde, begann eine ausgedehnte Reihe von Messungen verschiedenster Art (Distanz-, Zenitdistanzmessungen, Nivellements, astronomische Beobachtungen, meteorologische Aufzeichnungen). Ein großer Teil dieser Messungen waren Datenmaterial für die Diplomarbeit "Refraktionsuntersuchungen in einem vertikalen Dreieck" von Dipl.-Ing. J. Rosenthaler, ausgeführt am Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Abt. Theoretische Geodäsie, der TU Wien, und diente gleichzeitig als Grundlage und wertvolle Erfahrungssammlung für die vorliegende Arbeit. In die Berechnungen zum vertikalen Viereck haben allerdings nur die Messungen höchster Genauigkeit Eingang gefunden. Die letzten Messungen wurden am 17. Dezember 1981 abgeschlossen.

4.4.3.1 DISTANZMESSUNGEN

Da die Genauigkeitsauflagen für die Distanzen im vertikalen Viereck enorm hoch sind (siehe 4.3), ist von Anfang an der Versuch unternommen worden, jedem nur erdenklichen Fehlereinfluß bei den Messungen wirksam zu begegnen:

1^o Zum Einsatz gelangten nur die, derzeit als die präzisesten geltenden, verfügbaren, elektronischen Entfernungsmessgeräte Tellurometer MA 100 und Mekometer ME3000.^{*)}

Innere Genauigkeit:	MA100	$m_{dl} = \pm 1,5 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm/km}$
	ME3000	$m_{dl} = \pm 0,2 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm/km}$

*) Anm.: Ein Terrameter (siehe 3.2.6.4.2), das auf Dispersionsbasis eine noch um eine Zehnerpotenz bessere Genauigkeit erreicht, ist derzeit erst in den USA im Einsatz und konnte deshalb begreiflicherweise nicht beschafft werden!



Abb. 58b

(Tellurometer MA100.
am Standpunkt Zweiersdorf Feld)



Abb. 58a

(Der Verfasser bei der
Messung mit dem MA100)

Ein Tellurometer MA100 befindet sich im Besitz des Institutes für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abt. Ingenieurgeodäsie, der TU Wien und konnte so sehr häufig zu Messungen herangezogen werden. Leider ist die Reichweite des Gerätes mit 2 km beschränkt, weshalb ein zweites MA100 mit größerer Reichweite für die Messung der Distanz 2-3 von den Österreichischen Donaukraftwerken entliehen wurde. Für eine weitere Meßkampagne konnte das ME3000 der Illkraftwerke gemietet werden, das von dem zuständigen Werksangestellten, Herrn Dipl.-Ing. Sefzik, selbst bedient wurde.

2^o Alle verwendeten Präzisionsentfernungsmeßgeräte wurden vor, manchmal auch während den jeweiligen Meßkampagnen auf Basisstrecken geeicht. Durch vermittelnden Ausgleich ergaben sich jeweils die Instrumenten/Reflektorkonstante c und ein allfälliger Maßstabsfehler m des untersuchten Gerätes.

Datum	Basis	E-Gerät	Reflektor	c [mm]	m [mm/km]
79-12-19	Linz	MA100 (DOKW)	AGA13 (DOKW)	-69,8	-7,8
80-08-06	Wien	MA100 (IG)	AGA13 (IG)	-68,5	0
			AGA19 (LV)	-67,2	0
81-05-04	Aarau	ME3000 (IKW)	KERN3 (IKW)	-0,9	+0,2
81-07-07	Neue Welt	ME3000 (IKW)	KERN3 (IKW)		-1,5 ^{*)}
81-10-08	Neue Welt	MA100 (IG)	WILD11 (ROST)	-68,7	0

3^o Zur erfolgreichen Ausschaltung von Aufstellungsfehlern wurden E-Gerät und Reflektor mit Hilfe eines WILD Nadirlotes über den Bodenpunkten zentriert. Diese Vorgangsweise sichert eine Zentriergenauigkeit im Zehntelmillimeterbereich.

*) Anm. : Persönliche Mitteilung von a. o. Prof. K. Peters, Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abt. Landesvermessung, TU Wien.

- 4° Die zur späteren Reduktion der gemessenen Schrägstrecken auf die Bodenpunkte notwendigen Instrumentenhöhen G und Reflektorhöhen R sind, entweder mit dem Nivellier oder mit dem Rollmaßstab, jeweils auf besser als ± 1 mm Genauigkeit erfaßt worden. Bei Verwendung des Rollmaßstabes war eine Zerlegung der zu bestimmenden Höhen in Teilabschnitte unvermeidlich, um nicht die vorgeschriebene Schranke von ± 1 mm zu überschreiten.

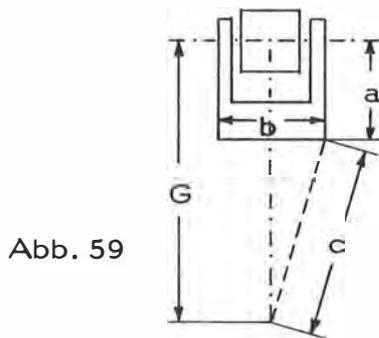


Abb. 59

$a, b \dots$ Gerätekonstanten

$c \dots$ gemessen

$$G = a + \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$$

- 5° Bei jeder Messung wurde eine Aufheizzeit des Entfernungsmessgerätes von ungefähr 30 Minuten eingehalten, um die Frequenzkonstanz wirklich sicherzustellen.
- 6° Die meteorologischen Daten zur atmosphärischen Streckenreduktion sind an den beiden Endpunkten aus Psychrometer- und Barometerablesungen gewonnen worden. Da aber das Mittel der Endpunktwerte nur selten für die tatsächlichen Verhältnisse entlang der Meßstrecke repräsentativ ist, ist von der atmosphärischen Reduktion her der stärkste Fehlereinfluß auf die Distanzmessung zu erwarten gewesen. Dieser Genauigkeitsminderung konnte durch mehrere Wiederholungsmessungen zu anderen Jahres- und Tageszeiten und zu verschiedenen Wetterverhältnissen erfolgreich begegnet werden. So konnten in den endgültigen Mitteln die Genauigkeitsvorschriften aus (3, 54) durchwegs eingehalten werden (siehe Kapitel 3. 2. 6. 4. 2).

Die Tabellen 7-11 zeigen die Ergebnisse einschließlich aller vorgenommenen

- Reduktionen: 1) Atmosphärische Reduktion nach Barrel and Sears } d¹
2) Anbringung von c und m .
3) Zentrierung auf die Bodenpunkte nach (2, 14c) → d

Reduktion der gemessenen Distanzen

Datum	Zeit	P_i	Meßwert [m]	G [m]	t_i [°C]	t_i' [°C]	p_i [Torr]	Wetterlage	EDM-Gerät	d' [m]	d [m]
		P_k		R [m]	t_k [°C]	t_k' [°C]	p_k [Torr]		Reflektor		
80-07-03	13 ⁰⁰ -13 ¹⁵	3	1397,7303	0,397	10,4	7,4	680,0	stark bewölkt	MA100 (IG)	1397,6849	1398,0862
		1		1,572	14,9	11,9	718,7	windig	AGA13 (IG)		
	13 ¹⁵ -13 ²⁵	3	1397,7310	0,397	10,6	7,6	679,8	stark bewölkt	MÄT00 (IG)	1397,6859	1398,0872
		1		1,572	15,1	12,1	718,7	windig	AGA13 (IG)		
	13 ³⁰ -13 ⁴⁰	3	1397,7326	0,397	10,7	7,7	679,8	stark bewölkt	MA100 (IG)	1397,6875	1398,0888
		1		1,572	15,0	12,0	718,7	windig	AGA13 (IG)		
17 ¹⁰ -17 ²⁰	1	1007,0870	1,606	13,6	10,6	718,2	stark bewölkt	MA100 (IG)	1007,0329	1007,0341	
	2		1,600	12,4	9,4	700,5	windig	AGA19 (LV)			
17 ²⁰ -17 ²⁵	1	1007,0870	1,606	14,1	11,1	717,9	stark bewölkt	MA100 (IG)	1007,0334	1007,0346	
	2		1,600	12,5	9,5	700,7	windig	AGA19 (LV)			
17 ²⁵ -17 ³⁰	1	1007,0877	1,606	14,1	11,1	717,6	stark bewölkt	MA100 (IG)	1007,0341	1007,0353	
	2		1,600	12,5	9,5	700,9	windig	AGA19 (LV)			
80-09-03	12 ²⁰ -12 ³⁰	3	1397,6772	0,396	15,3	9,8	691,8	sonnig	MA100 (DOKW)	1397,6162	1398,0863
		1		1,773	16,4	10,9	730,8		AGA13 (DOKW)		
	12 ³⁵ -12 ⁵⁰	3	1397,6763	0,396	15,6	10,2	691,8	sonnig	MA100 (DOKW)	1397,6157	1398,0859
		1		1,773	16,8	11,3	730,8		AGA13 (DOKW)		
	14 ¹⁰ -14 ²⁵	3	2319,1345	0,396	15,7	10,2	691,2	windig	MA100 (DOKW)	2319,0876	2319,2725
		2		1,914	16,6	10,9	713,2		AGA13 (DOKW)		
14 ³⁰ -14 ⁴⁵	3	2319,1338	0,396	15,1	10,2	691,1	windig	MA100 (DOKW)	2319,0862	2319,2711	
	2		1,914	16,5	11,0	713,3		AGA13 (DOKW)			
14 ⁵⁵ -15 ¹⁰	3	2319,1359	0,396	14,2	10,0	691,0	windig	MA100 (DOKW)	2319,0874	2319,2710	
	2		1,903	16,6	11,2	713,4		AGA13 (DOKW)			
15 ¹⁰ -15 ²⁰	3	2319,1342	0,396	14,2	10,0	691,0	windig	MA100 (DOKW)	2319,0857	2319,2692	
	2		1,903	16,6	11,0	713,3		AGA13 (DOKW)			

Tab. 7

Reduktion der gemessenen Distanzen

Datum	Zeit	P_i	Meßwert [m]	G [m]	t_i [°C]	t'_i [°C]	p_i [Torr]	Wetterlage	EDM-Gerät	d' [m]	d [m]
		P_k		R [m]	t_k [°C]	t'_k [°C]	p_k [Torr]		Reflektor		
80-09-03	15 ⁴⁵ -16 ⁰⁰	1	1007,1135	1,810	18,1	12,2	730,2	windig	MA100 (DOKW)	1007,0475	1007,0295
		2		1,903	16,2	10,9	713,1		AGA13 (DOKW)		
	16 ⁰⁰ -16 ¹⁵	1	1007,1165	1,810	17,8	12,1	730,0	windig	MA100 (DOKW)	1007,0504	1007,0268
		2		1,932	16,3	11,1	713,2		AGA13 (DOKW)		
80-10-02	10 ³⁵ -10 ⁴²	1	1007,1293	1,572	16,4	10,6	726,8	bewölkt mit Aufhellungen schwach windig	MA100 (IG)	1007,0724	1007,0331
		2		1,775	13,2	9,0	709,8		AGA13 (IG)		
	10 ⁴² -10 ⁵⁰	1	1007,1283	1,572	16,8	10,5	726,8	bewölkt mit Aufhellungen schwach windig	MA100 (IG)	1007,0718	1007,0325
		2		1,775	13,6	9,1	709,8		AGA13 (IG)		
	10 ⁵⁰ -11 ⁰⁰	1	1007,1287	1,572	16,6	10,9	726,8	bewölkt mit Aufhellungen s chwach windig	MA100 (IG)	1007,0723	1007,0330
		2		1,775	14,0	9,3	709,8		AGA13 (IG)		
	15 ⁰⁰ -15 ⁰⁵	1	1397,7156	1,579	14,6	9,8	727,0	bedeckt böiger Westwind	MA100 (IG)	1397,6662	1398,0873
		3		0,346	10,1	7,6	685,3		AGA13 (IG)		
	15 ⁰⁹ -15 ¹³	1	1397,7154	1,579	14,4	9,8	727,0	bedeckt böiger Westwind	MA100 (IG)	1397,6659	1398,0870
		3		0,346	10,0	7,6	685,0		AGA13 (IG)		
	15 ¹⁷ -15 ²⁵	1	1397,7156	1,579	14,3	9,8	727,0	bedeckt böiger Westwind	MA100 (IG)	1397,6661	1398,0872
		3		0,346	10,0	7,6	685,0		AGA13 (IG)		
81-04-22	12 ⁵⁸ -13 ⁰⁵	1	1007,0969	1,709	15,2	6,6	721,2	wolkenlos	MA100 (IG)	1007,0406	1007,0207
		2		1,812	11,6	4,6	704,4		AGA13 (IG)		
	13 ⁰⁷ -13 ¹⁵	1	1397,6600	1,709	15,0	6,4	721,0	wolkenlos	MA100 (IG)	1397,6138	1398,0867
		3		0,324	10,2	4,8	680,0		AGA13 (IG)		
81-05-19	14 ¹⁰ -14 ²⁰	4	1403,5392	1,655	22,6	15,8	724,3	sehr heiß Wolkenfetzen leichter Wind	MA100 (IG)	1403,4967	1403,4986
		2		1,638	21,7	14,0	711,5		AGA13 (IG)		
	14 ²⁰ -14 ²⁵	4	1403,5404	1,655	22,0	15,6	724,3	sehr heiß Wolkenfetzen leichter Wind	MA100 (IG)	1403,4976	1403,4995
		2		1,638	21,9	14,4	711,5		AGA13 (IG)		

Tab. 8

Reduktion der gemessenen Distanzen

Datum	Zeit	P_i	Meßwert [m]	G [m]	t_i [°C]	t'_i [°C]	p_i [Torr]	Wetterlage	EDM-Gerät	d' [m]	d [m]
		P_k		R [m]	t_k [°C]	t'_k [°C]	p_k [Torr]		Reflektor		
81-05-19	14 ²⁵ -14 ³⁰	4	1403,5390	1,655	21,4	15,4	724,3	Sonne verschwindet	MA100 (IG)	1403,4958	1403,4977
		2		1,638	21,8	14,3	711,5		AGA13 (IG)		
	14 ⁴⁵ -14 ⁵⁵	4	1403,5391	1,655	20,7	13,9	724,3	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	1403,4944	1403,4963
		2		1,638	20,2	13,9	711,5		AGA13 (IG)		
	15 ³⁰ -15 ⁴⁰	4	1403,5385	1,655	21,2	13,9	724,3	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	1403,4953	1403,4972
		2		1,638	22,0	15,6	711,5		AGA13 (IG)		
	14 ³⁵ -14 ⁴⁰	4	408,5153	1,655	20,3	14,4	724,3	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	408,4527	408,4462
		1		1,585	21,4	15,4	727,4		AGA13 (IG)		
	14 ⁴⁰ -14 ⁴⁵	4	408,5160	1,655	21,4	14,8	724,3	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	408,4534	408,4469
		1		1,585	20,0	14,5	727,4		AGA13 (IG)		
	17 ¹⁵ -17 ³⁰	4	408,4998	1,659	21,6	15,0	726,8	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	408,4373	408,4443
		1		1,584	20,2	16,6	723,7		AGA13 (IG)		
	17 ⁴⁵ -17 ⁵⁰	4	408,5009	1,659	21,2	15,3	726,8	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	408,4384	408,4451
		1		1,584	20,2	16,6	723,7		AGA13 (IG)		
	15 ⁵⁰ -15 ⁵⁵	4	1007,7131	1,655	21,8	15,4	724,3	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	1007,6650	1008,2461
		3		0,322	17,2	11,5	688,4		AGA13 (IG)		
	15 ⁵⁵ -16 ⁰⁰	4	1007,7120	1,655	21,2	14,9	724,3	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	1007,6632	1008,2443
		3		0,322	16,2	11,2	688,4		AGA13 (IG)		
16 ⁵⁰ -16 ⁵⁵	1	1007,0733	1,659	21,2	15,2	726,8	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	1007,0225	1007,0266	
	2		1,638	21,9	15,5	711,5		AGA13 (IG)			
17 ⁰⁰ -17 ⁰⁵	1	1007,0738	1,659	21,5	14,9	726,8	wechselnd bewölkt	MA100 (IG)	1007,0233	1007,0274	
	2		1,638	22,3	15,6	711,5		AGA13 (IG)			

Tab. 9

Reduktion der gemessenen Distanzen

Datum	Zeit	P_i	Meßwert [m]	G [m]	t_i [°C]	t'_i [°C]	p_i [Torr]	Wetterlage	EDM-Gerät	d' [m]	d [m]
		P_k		R [m]	t_k [°C]	t'_k [°C]	p_k [Torr]		Reflektor		
81-07-06	11 ²⁰ -11 ³⁰	3	1007,6770	0,3752	20,0	-	688,0	dunstig	ME3000 (IKW)	1007,6679	1008,2450
		4		1,6990	22,0	-	726,0		KERN3 (IKW)		
	11 ³⁰ -11 ⁴⁰	3	1397,6804	0,3752	20,0	-	688,0	dunstig	ME3000 (IKW)	1397,6682	1398,0873
		1		1,6023	24,0	-	728,0		KERN3 (IKW)		
	11 ⁴⁰ -11 ⁵⁰	3	2319,1266	0,3752	20,0	-	688,0	dunstig	ME3000 (IKW)	2319,1097	2319,2674
		2		1,6680	21,0	-	712,0		KERN3 (IKW)		
	13 ³⁰ -13 ⁴⁰	4	1007,7331	1,6248	22,0	-	725,0	Sonnen- einstrahlung	ME3000 (IKW)	1007,7365	1008,2496
		3		0,4478	20,0	-	687,0		KERN3 (IKW)		
	13 ⁴⁰ -13 ⁵⁰	4	408,4517	1,6248	22,0	-	725,0	Sonnen- einstrahlung	ME3000 (IKW)	408,4511	408,4490
		1		1,6017	24,0	-	727,0		KERN3 (IKW)		
	13 ⁵⁰ -14 ⁰⁰	4	1403,5042	1,6248	22,0	-	725,0	Sonnen- einstrahlung	ME3000 (IKW)	1403,5021	1403,4973
		2		1,6680	21,0	-	712,0		KERN3 (IKW)		
	15 ⁰⁰ -15 ¹⁰	1	1397,7211	1,5221	25,0	-	727,0	Quellwolken	ME3000 (IKW)	1397,7255	1398,0923
		3		0,4478	23,0	-	686,0		KERN3 (IKW)		
	15 ¹⁰ -15 ²⁰	1	408,4673	1,5221	25,0	-	727,0	Quellwolken	ME3000 (IKW)	408,4660	408,4496
		4		1,6988	23,0	-	725,0		KERN3 (IKW)		
15 ²⁰ -15 ³⁰	1	1007,0567	1,5221	25,0	-	727,0	Quellwolken	ME3000 (IKW)	1007,0548	1007,0266	
	2		1,6680	23,0	-	712,0		KERN3 (IKW)			
16 ³⁰ -16 ⁴⁰	2	2319,1367	1,5951	23,0	-	711,0	zunehmende Bewölkung leichter Wind	ME3000 (IKW)	2319,1411	2319,2808	
	3		0,4478	24,0	-	686,0		KERN3 (IKW)			
16 ⁴⁰ -16 ⁵⁰	2	1403,4936	1,5951	23,0	-	711,0	zunehmende Bewölkung leichter Wind	ME3000 (IKW)	1403,4858	1403,4973	
	4		1,6980	24,0	-	724,0		KERN3 (IKW)			
16 ⁵⁰ -17 ⁰⁰	2	1007,0314	1,5951	23,0	-	711,0	zunehmende Bewölkung leichter Wind	ME3000 (IKW)	1007,0269	1007,0282	
	1		1,6018	27,0	-	727,0		KERN3 (IKW)			

Tab. 10

Reduktion der gemessenen Distanzen

Datum	Zeit	P_i	Meßwert [m]	G [m]	t_i [°C]	t'_i [°C]	p_i [Torr]	Wetterlage	EDM-Gerät	d' [m]	d [m]
		P_k		R [m]	t_k [°C]	t'_k [°C]	p_k [Torr]		Reflektor		
81-10-07	15 ¹⁵ -15 ²⁵	1	1007,1074	1,601	19,2	15,6	720,0	bewölkt klar leichter Westwind	MA100 (IG)	1007,0563	1007,0286
		2		1,744	17,6	13,8	702,8		WILD11 (ROST)		
	15 ³⁰ -15 ⁴⁰	1	1007,1072	1,601	20,4	16,4	720,0	Sonne verschleiert	MA100 (IG)	1007,0567	1007,0290
		2		1,744	17,7	13,7	702,8		WILD11 (ROST)		
	15 ⁵⁵ -16 ⁰⁵	4	1403,5399	1,761	17,9	14,5	717,0	Sonne weg, fast windstill	MA100 (IG)	1403,4951	1403,4970
		2		1,744	16,7	13,7	702,5		WILD11 (ROST)		
	16 ⁰⁵ -16 ¹⁵	4	1403,5401	1,761	17,5	14,5	717,0	Sonne weg, fast windstill	MA100 (IG)	1403,4949	1403,4968
		2		1,744	16,5	13,6	702,5		WILD11 (ROST)		
81-10-08	14 ⁰⁰ -14 ¹⁰	4	408,5414	1,663	17,4	13,0	723,0	Sonne wolkenlos, leichter Nordwind	MA100 (IG)	408,4775	408,4524
		1		1,394	17,2	12,8	726,2		WILD11 (ROST)		
	15 ⁰⁰ -15 ¹⁰	1	408,5110	1,552	17,0	12,8	726,3	Sonne wolkenlos leichter Nordwind	MA100 (IG)	408,4468	408,4512
		4		1,505	16,3	12,8	723,0		WILD11 (ROST)		

Tab. 11

4. 4. 3. 2 ZENITDISTANZMESSUNGEN

Die geometrische Refraktionswinkelbestimmung nach der Methode des vertikalen Vierecks bedingt eine äußerst genaue und möglichst gleichzeitige Beobachtung der zwölf, in der Meßanordnung auftretenden, Zenitdistanzen. Die Bewältigung dieser Erfordernisse stellt sehr hohe Anforderungen - sowohl an die verwendeten Theodolite und Zieleinrichtungen als auch an die Operateure^{*)} - und mußte deshalb reiflich überlegt werden.

Sollen gegenseitig-gleichzeitige Zenitdistanzen beobachtet werden, so müssen die Zieleinrichtungen (zur Vermeidung jeglicher Umbauten) am Theodolit selbst angebracht sein. Sie müssen so weit über der Kippachse liegen, daß (vor allem für die Visuren von den Berg- zu den Talpunkten) zu keiner Zeit der Beobachter das Ziel mit seinem Kopf verdecken kann. Darüber hinaus muß eine solche Zieleinrichtung symmetrisch zur Kippachse gefertigt sein, damit sie, wenn das Fernrohr durchgeschlagen wird, in gleicher Weise weiter am Ziel bleibt. Schließlich besteht noch die Forderung nach einer wirksamen inneren Beleuchtung, um auch die Beobachtung bei Nacht oder schlechter Sicht zu ermöglichen. Ein Satz von vier identen Zieltafeln, die den vermehrten Forderungen gerecht werden, wurde von einer Wiener Feinmechanikwerkstätte (Fa. Mirna) nach Angaben des Autors angefertigt. Diese Zieltafeln lassen sich wie Reiterlibellen direkt auf die Verkleidung der Kippachse aufsetzen. Für die Beobachtung bei Tageslicht sind sie durch grellgelben Anstrich mit je einem dicken roten Streifen am oberen und unteren Rand sehr gut anzielbar; bei Nachtmessungen läßt sich ein mit Mattglas abgedeckter

*) Anm.: Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, daß die im folgenden beschriebenen Lösungen und Vorgangsweisen erst im Zuge der zahlreichen Beobachtungen zu der Diplomarbeit von Rosenthaler (1982) in mühsamem Erfahrungszuwachs gefunden werden konnten.

Schlitz in der Mitte von innen mit zwei Halogenlämpchen beleuchten (Abb. 60). Bei der Reduktion der gemessenen Zenitdistanzen auf die Bodenpunkte muß natürlich die horizontale Exzentrizität E der Zieltafel­fläche vor der Kippachse in der Art von (2, 20) berücksichtigt werden. Ein weiterer wesentlicher Vorteil der Spezialziel­tafeln ist, daß die Differenz Zielhöhe-Instrumentenhöhe jetzt eine im Labor bestimm­bare Konstante ist.

Das Problem der gegenseitig-­gleichzeitigen Messungen ist aber trotz dieser Zieleinrichtungen noch nicht vollständig gelöst, denn es müßten ja eigentlich pro Standpunkt je 3 derartige Beobachtungen gleichzeitig durchgeführt werden, was natürlich nicht möglich ist. Das ist einer der beiden Gründe, warum ein "momentaner" Refraktionswinkel bei der Methode des vertikalen Vierecks nur aus Zenitdistanzbeobachtungen "endlicher Zeitdauer" abgeleitet werden kann. Der zweite Grund ergibt sich aus der Tatsache, daß die Genauigkeit eines Satzes (Zenitdistanz in beiden Kreislagen) nicht ausreichend ist, also mehrere Sätze zur Gewinnung eines sicheren Mittels gemessen werden müssen. Damit werden zwei Fragen aufgeworfen:

- 1) Über welchen Zeitraum hinweg kann die Refraktion als unverändert angenommen werden?
- 2) Wie viele Sätze sind zur Erzielung eines mittleren Fehlers des Satzmittels von $\pm 1^{\text{cc}} - 2^{\text{cc}}$ nötig?

Auf beide Fragen gibt es in der Literatur Antworten (Bahner t, 1970; Ramsayer, 1971; Hradilek, 1968), die mit den Erfahrungen aus früheren Arbeiten (Wunderlich, 1979) und den Ergebnissen dieser Arbeit recht gut übereinstimmen:

Von den beiden Zeitpunkten der schnellsten Änderung der Brechungsverhältnisse - frühmorgens und abends (siehe Kapitel 3.2.2) - abgesehen, kann durchaus mit einer Refraktionskonstanz von 20-30 Minuten an Tagen mit nicht ununterbrochen wechselnden Sonne/Wolke/Verhältnissen gerechnet werden. Zur Erzielung eines mittleren Fehlers von $\pm 1^{\text{cc}} - 2^{\text{cc}}$

im Satzmittel werden im allgemeinen 6 Sätze ausreichen, wenn man zudem die Ablesefehler durch zweimaliges Koinzidieren und Ablesen vermindert.

Durch Einsatz immer des gleichen Operateurs auf jedem der Standpunkte konnte im Laufe mehrerer Meßreihen die Übung so weit gesteigert werden, daß in der erwähnten Zeitspanne von 20–30 Minuten 6 Sätze mit zweimaliger Ablesung zu je drei Zielen tatsächlich laufend erreicht wurden (das entspricht 36 Zielungen und 72 Ablesungen!).

Operateure:	Punkt 1	W. Schrutka
	2	Th. Wunderlich
	3	J. Rosenthaler
	4	P. Stix

Als Meßgeräte kamen vier Theodolite der Type KERN DKM2A zum Einsatz, die mit ihren ausgezeichneten automatischen Höhenkreiskompensatoren einen hohen Beitrag zu der erreichten Meßgenauigkeit geliefert haben. Die Zentrierung erfolgte mittels des optischen Lotes im Oberbau mit hoher Genauigkeit. Dazu wurde nach dem genäherten Aufstellen des Gerätes der Lotstock aus dem Stativ herausgeschraubt. Die Ziel- und damit Instrumentenhöhen wurden mit einem Nivellier auf besser als ± 1 mm bestimmt.

Um Aussagen über den Refraktionszyklus treffen zu können und um Vergleiche mit den Ergebnissen aus dem TGREFR-Programm von Wunderlin (1979) anstellen zu vermögen, sind Zenitdistanzmessungen über 24 Stunden etwa alle zwei Stunden durchgeführt worden.

Um ein Einsinken der Stativbeine zu verhindern, wurden bei den Talpunkten massive Holzpflocke eingeschlagen, auf denen die Stative aufzustellen waren. Mit Hilfe des Nivelliers konnte die Zielhöhe vor und nach jedem Durchgang kontrolliert werden, wobei durch zusätzliche Beobachtung eines Referenzpunktes der Instrumentenhorizont des Nivelliers regelmäßig überprüft wurde.

In den Tabellen 12 - 15 sind die Zenitdistanzbeobachtungen (Mittel der einzelnen Durchgänge) der 24 Stundenmessung von 81-11-04/05 mit ihren mittleren Fehlern aufgeführt. Die Tabellen 16 - 19 zeigen dann die auf die Bodenpunkte zentrierten Werte. *)

Die Diagramme 6 - 9 geben ein anschauliches Bild von den Zenitdistanzänderungen über die 24 Stunden und erlauben zusätzlich, durch die standpunktweise Auftragung, das Verhalten der drei, von einem Standpunkt ausgehenden, Visuren zu studieren.

4.4.3.3 DIE METEOROLOGISCHEN BEOBACHTUNGEN

Zum Zwecke der annähernden Beschreibung der atmosphärischen Zustände während der 24-Stundenmessung wurden laufend meteorologische Beobachtungen durchgeführt. Auf jedem Standpunkt wurden Trocken- und Feuchttemperatur (Psychrometer, $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$) und Luftdruck (Barometer ± 2 Torr) abgelesen, sowie Windgeschwindigkeit und Bewölkungsgrad geschätzt.

Unter Benutzung dieses meteorologischen Datenmaterials war es dann Herrn cand. ing. Wallnöfer im Rahmen seiner Diplomarbeit (1983) möglich, mit dem Programm TGREFR von Wunderlin Modellatmosphären-Refraktionswinkel zu berechnen (siehe auch Kapitel 3.2.3).

In den unteren Teilen der Diagramme 6 - 9 ist der Verlauf der Trocken- und Feuchttemperatur und des Luftdrucks für jeden Standpunkt aufgetragen.

*) Anm: Wegen zu schneller Änderung der Brechungsverhältnisse wurde der Meßdurchgang 6⁵⁵ für den Standpunkt 4 in zwei Durchgänge mit je 3 Sätzen aufgeteilt!



Abb. 60
(KERN DKM2A mit auf-
gesetzter Spezialzieltafel)



Abb. 61
(Standpunkt Irmafelsen
auf dem Kienberg)



Abb. 62

(Visuren 2-1, 2-4, 2-3)

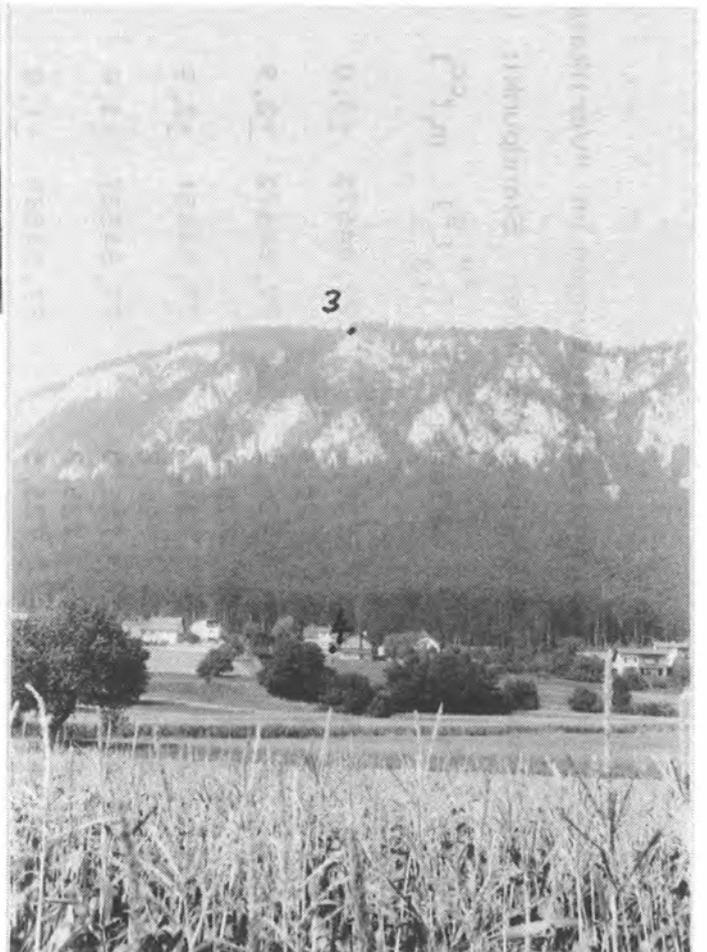


Abb. 63

(Visuren 1-4, 1-3)

Zenitdistanzmessungen im "Vertikalen Viereck" 1981-11-04/05

Beobachter: Schrutka Schreiber: Wallnöfer Standpunkt: 1 I = 1,6365 m Z = 1,8065 m E = 2,25 cm

Zeit	t [°]	t' [°]	p [Torr]	ζ_{13}^{*11} [g]	m_{ζ} [CC]	ζ_{14}^{*11} [g]	m_{ζ} [CC]	ζ_{12}^{*11} [g]	m_{ζ} [CC]
19 ²⁰ -20 ⁰⁰	6,5	6,2	726,4	77,84572	<u>+3,0</u>	94,05762	<u>+6,6</u>	87,60565	<u>+4,5</u>
21 ¹⁰ -21 ⁴⁰	9,0	8,5	726,4	77,84572	<u>+2,9</u>	94,05660	<u>+4,3</u>	87,60606	<u>+3,6</u>
23 ⁰³ -23 ⁴⁰	11,0	9,0	726,6	77,84551	<u>+2,9</u>	94,05678	<u>+2,9</u>	87,60590	<u>+1,7</u>
3 ¹² -3 ⁴³	6,6	6,2	726,8	77,84537	<u>+3,9</u>	94,05707	<u>+3,3</u>	87,60551	<u>+3,2</u>
5 ⁰⁵ -5 ³⁵	4,8	4,7	726,0	77,84588	<u>+1,8</u>	94,05825	<u>+2,6</u>	87,60619	<u>+3,9</u>
6 ⁴⁵ -7 ²⁰	5,2	5,0	725,8	77,84572	<u>+3,6</u>	94,05804	<u>+4,8</u>	87,60652	<u>+4,2</u>
8 ¹⁵ -8 ³⁰	4,2	3,9	725,5	77,84607	<u>+1,6</u>	94,05897	<u>+1,9</u>	87,60727	<u>+2,3</u>
10 ⁰⁰ -10 ³⁰	4,5	4,4	725,6	77,84590	<u>+1,3</u>	94,05900	<u>+0,9</u>	87,60714	<u>+1,5</u>
12 ⁰⁰ -12 ³⁰	9,0	8,4	725,8	77,84613	<u>+1,9</u>	94,05906	<u>+1,1</u>	87,60670	<u>+2,4</u>
14 ³⁰ -15 ⁰⁰	11,0	8,9	725,9	77,84648	<u>+2,5</u>	94,05875	<u>+2,1</u>	87,60723	<u>+2,1</u>
16 ²⁰ -16 ³⁵	11,0	9,0	726,1	77,84649	<u>+1,4</u>	94,05950	<u>+4,6</u>	87,60678	<u>+3,6</u>

Tab. 12

Zenitdistanzmessungen im "Vertikalen Viereck" 1981-11-04/05

Beobachter: Wunderlich Schreiber: Taubenschuss Standpunkt: 2 I = 1,5510m Z = 1,7210m E = 2,25 cm

Zeit	t [°]	t' [°]	p [Torr]	$\zeta_{21}^{*II} [g]$	m_{ζ}^{CC}	$\zeta_{24}^{*II} [g]$	m_{ζ}^{CC}	$\zeta_{23}^{*II} [g]$	m_{ζ}^{CC}
19 ²⁰ -19 ⁵⁶	13,2	10,0	714,0	112,37777	±2,1	107,12281	±3,0	92,24809	±1,9
21 ⁰⁰ -21 ²³	13,8	9,5	713,0	112,37857	±1,4	107,12386	±1,3	92,24812	±1,8
23 ⁰⁰ -23 ³⁹	13,5	8,9	712,0	112,37845	±1,4	107,12374	±1,9	92,24826	±0,5
3 ¹⁰ -3 ³⁸	12,9	7,9	711,5	112,37818	±1,5	107,12341	±1,4	92,24788	±1,1
5 ⁰⁶ -5 ³⁵	11,1	7,7	711,5	112,37789	±1,1	107,12279	±1,5	92,24738	±1,3
6 ³⁰ -7 ⁰²	11,1	8,3	711,5	112,37856	±1,2	107,12368	±1,7	92,24826	±1,8
8 ¹⁵ -8 ⁴⁷	11,1	8,2	711,0	112,37867	±0,4	107,12425	±1,0	92,24786	±0,6
9 ⁵⁵ -10 ³⁰	11,0	8,7	711,0	112,37853	±1,1	107,12424	±1,2	92,24811	±1,0
12 ⁰⁰ -12 ³⁰	11,3	8,4	710,0	112,37840	±1,2	107,12413	±0,6	92,24805	±1,0
14 ³⁰ -15 ⁰²	11,5	8,4	709,0	112,37883	±0,7	107,12416	±0,6	92,24806	±1,4
16 ²⁰ -16 ³⁰	10,3	8,3	709,0	112,37883	±1,9	107,12399	±1,9	92,24764	±0,9

Tab. 13

Zenitdistanzmessungen im "Vertikalen Viereck" 1981-11-04/06

Beobachter: Rosenthaler Schreiber: Obex Standpunkt: 3 l = 0,2150 m Z = 0,3850 m E = 2,25 cm

Zeit	t [°]	t' [°]	p [Torr]	ζ_{32}^{*II} [g]	m_{ζ}^{CC}	ζ_{31}^{*II} [g]	m_{ζ}^{CC}	ζ_{34}^{*II} [g]	m_{ζ}^{CC}
19 ¹⁵ -20 ¹⁵	11,0	8,6	689,0	107,76006	$\pm 2,0$	122,14799	$\pm 1,4$	128,66620	$\pm 0,7$
21 ⁰⁰ -22 ⁰⁰	10,3	7,6	689,3	107,76058	$\pm 2,4$	122,14925	$\pm 1,6$	128,66589	$\pm 1,2$
23 ⁰⁰ -23 ⁴⁰	9,4	7,3	688,7	107,76011	$\pm 0,7$	122,14859	$\pm 0,7$	128,66593	$\pm 0,7$
3 ⁰⁹ -3 ⁵⁰	8,9	6,2	688,2	107,76018	$\pm 0,7$	122,14854	$\pm 1,5$	128,66618	$\pm 1,1$
5 ⁰⁵ -5 ⁵⁰	8,8	6,5	688,1	107,76019	$\pm 1,3$	122,14838	$\pm 1,2$	128,66620	$\pm 1,1$
6 ²⁰ -7 ²⁰	7,8	7,2	688,1	107,76056	$\pm 0,7$	122,14846	$\pm 2,4$	128,66636	$\pm 1,1$
8 ³⁰ -8 ⁵⁵	7,6	6,9	688,1	107,76040	$\pm 0,8$	122,14891	$\pm 0,6$	128,66659	$\pm 1,0$
10 ⁰⁰ -10 ³⁵	8,7	7,3	687,8	107,76051	$\pm 1,0$	122,14894	$\pm 1,5$	128,66640	$\pm 0,7$
12 ⁰⁰ -12 ³⁵	8,3	6,7	687,1	107,76073	$\pm 0,8$	122,14869	$\pm 1,4$	128,66666	$\pm 1,7$
14 ³⁰ -15 ⁰⁵	7,8	6,8	685,8	107,76048	$\pm 0,8$	122,14901	$\pm 1,6$	128,66632	$\pm 1,4$
16 ³⁰ -16 ³⁵	6,8	6,4	685,5	107,76003	$\pm 9,0$	122,14847	$\pm 9,0$	128,66665	$\pm 9,0$

Tab. 14

Zenitdistanzmessungen im "Vertikalen Viereck" 1981-11-04/05

Beobachter: Stix		Schreiber: Isep		Standpunkt: 4		I = 1,6140 m		Z = 1,7840 m		e = 2,25 cm	
Zeit	t ⁰ [°]	t ¹ [°]	p [Torr]	ζ_{42}^{*II} [g]	m _γ [CC]	ζ_{41}^{*II} [g]	m _γ [CC]	ζ_{43}^{*II} [g]	m _γ [CC]		
19 ²⁰ -20 ¹²	9,1	8,9	725,0	92,86885	±2,8	105,88958	±5,2	71,31991	±2,0		
21 ¹² -22 ⁰⁰	11,4	10,0	725,0								
	11,4	9,5	724,1	92,86974	±2,7	105,88881	±2,8	71,31961	±1,0		
23 ⁰⁰ -23 ⁴⁰	10,7	8,6	724,0	92,86926	±2,1	105,88962	±2,4	71,32002	±1,1		
3 ¹² -3 ⁵⁵	8,8	7,1	723,1	92,86964	±4,2	105,88904	±1,9	71,32020	±1,1		
5 ⁰⁰ -5 ⁴²	8,0	7,0	723,2	92,86989	±2,2	105,89009	±1,4	71,32056	±1,6		
6 ³⁵ -6 ⁵⁵	7,8	7,2	723,2	92,86922	±3,0	105,88983	±5,7	71,32019	±3,1		
6 ⁵⁵ -7 ²⁰	11,3	8,9	723,1	92,87124	±2,7	105,89040	±3,6	71,32056	±1,8		
8 ²⁰ -8 ⁵⁵	12,3	9,0	723,3	92,87177	±1,2	105,89099	±1,4	71,32179	±1,7		
10 ⁰⁵ -10 ⁴⁷	13,0	9,7	723,3	92,87156	±1,5	105,89159	±2,2	71,32163	±1,5		
12 ⁰³ -12 ⁴⁵	12,6	9,2	722,3	92,87202	±1,7	105,89125	±1,1	71,32165	±1,1		
14 ³⁰ -15 ⁰⁰	12,9	9,3	721,2	92,87122	±0,9	105,89107	±1,1	71,32151	±0,7		
16 ³⁰ -16 ³⁵	11,2	9,0	721,2	92,86985	±9,0	105,89093	±9,0	71,32090	±9,0		

Tab. 15

Auf die Bodenpunkte zentrierte Zenitdistanzen

$\bar{T} [^{\circ}h]$	$\zeta_{12}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{21}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{13}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{31}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{14}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{41}^* [^{\circ}g]$
19 ⁴⁵	87,61117	112,39334	77,79250	122,21577	94,08084	105,91913
21 ³⁰	158	414	250	703	7982	1836
23 ²⁰	142	402	229	637	8000	1917
3 ³⁰	103	375	215	632	8029	1859
5 ²⁰	171	346	266	616	8147	1964
6 ⁵⁵	204	413	250	624	8126	1938
8 ³⁵	279	424	285	669	8219	2054
10 ²⁰	266	410	268	672	8222	2114
12 ¹⁵	222	397	291	647	8228	2080
14 ⁴⁵	275	440	326	647	8197	2062
16 ³⁰	230	440	327	625	8272	2048

$\bar{T} [^{\circ}h]$	$\zeta_{23}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{32}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{24}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{42}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{34}^* [^{\circ}g]$	$\zeta_{43}^* [^{\circ}g]$
19 ⁴⁵	92,21640	107,80102	107,13320	92,87379	128,75478	71,25067
21 ³⁰	643	154	425	468	447	037
23 ²⁰	657	107	413	420	451	078
3 ³⁰	619	114	380	458	476	096
5 ²⁰	569	115	318	483	478	132
6 ⁵⁵	657	152	407	416 618	494	095 132
8 ³⁵	617	136	464	671	517	255
10 ²⁰	642	147	463	650	498	239
12 ¹⁵	636	169	452	696	524	241
14 ⁴⁵	637	144	455	616	490	227
16 ³⁰	595	099	438	479	523	166

Tab. 16 - 19

Zenitdistanzänderungen
im V4 "Hohe Wand"
1981 - 11 - 04/05

Standpunkt 1

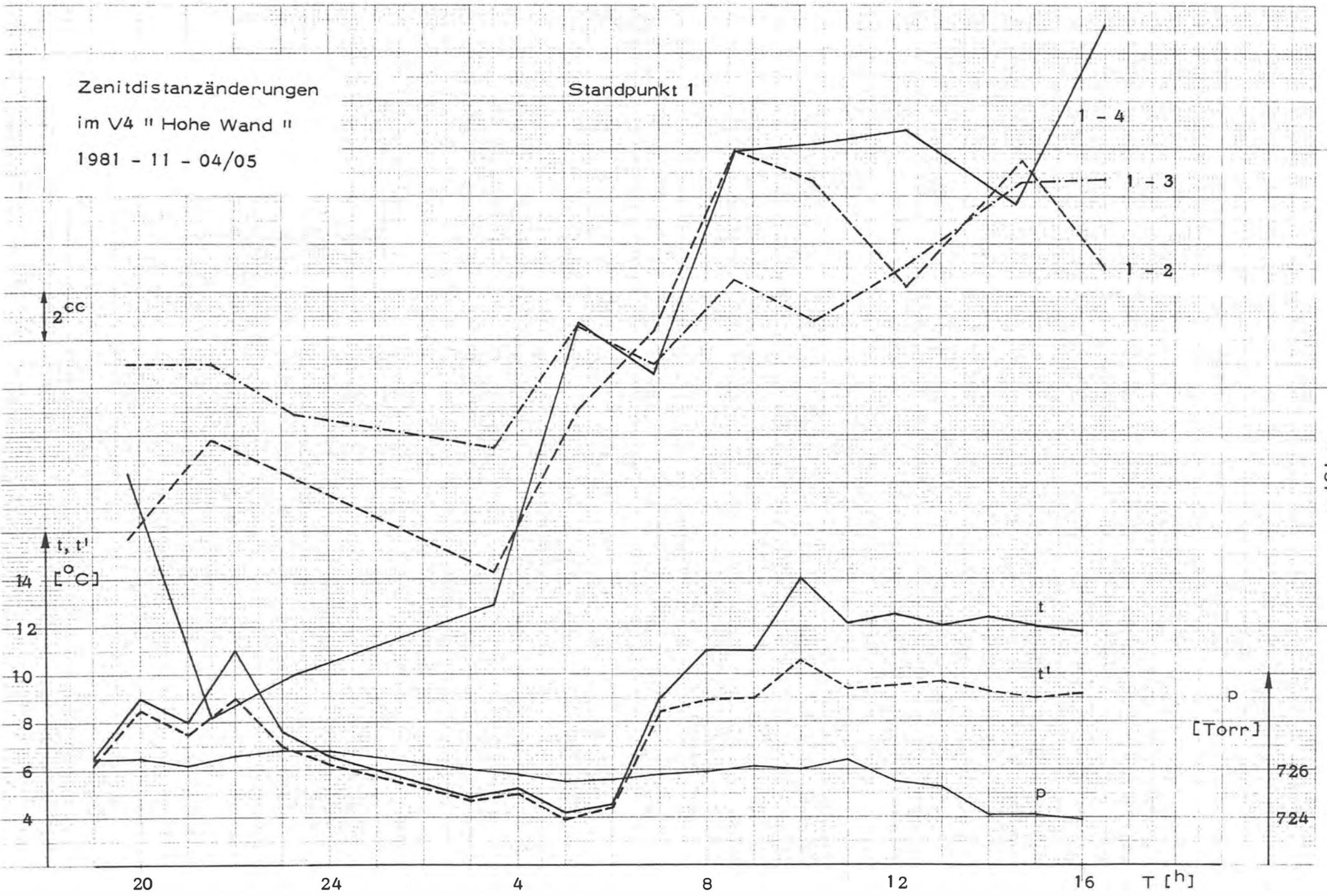


Diagramm 6

Zenitdistanzänderungen

im V4 "Hohe Wand "

1981 - 11 - 04/05

Standpunkt 2

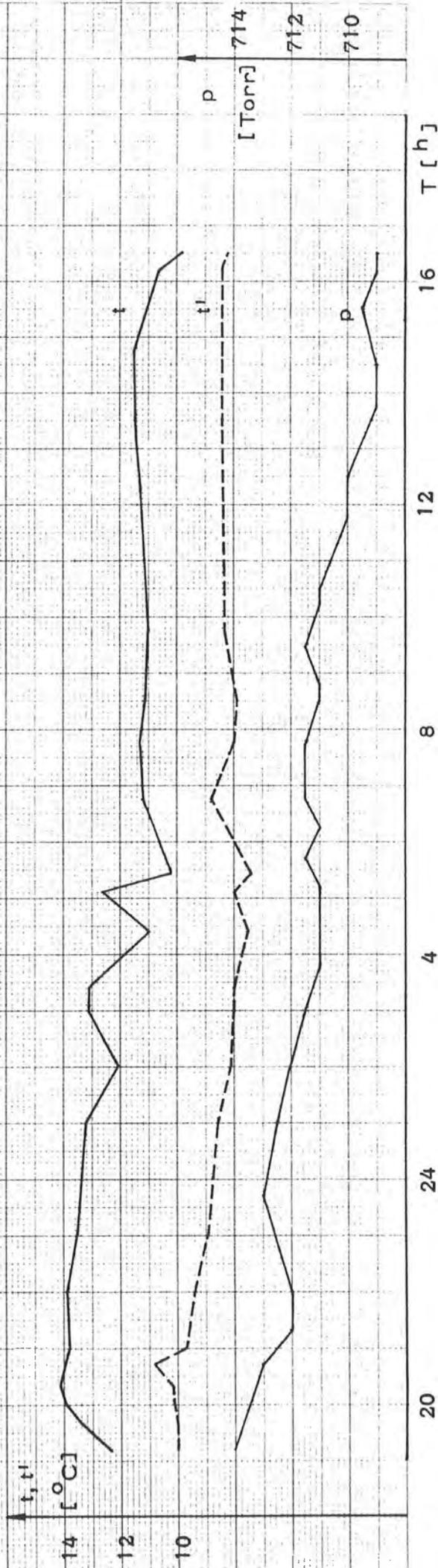
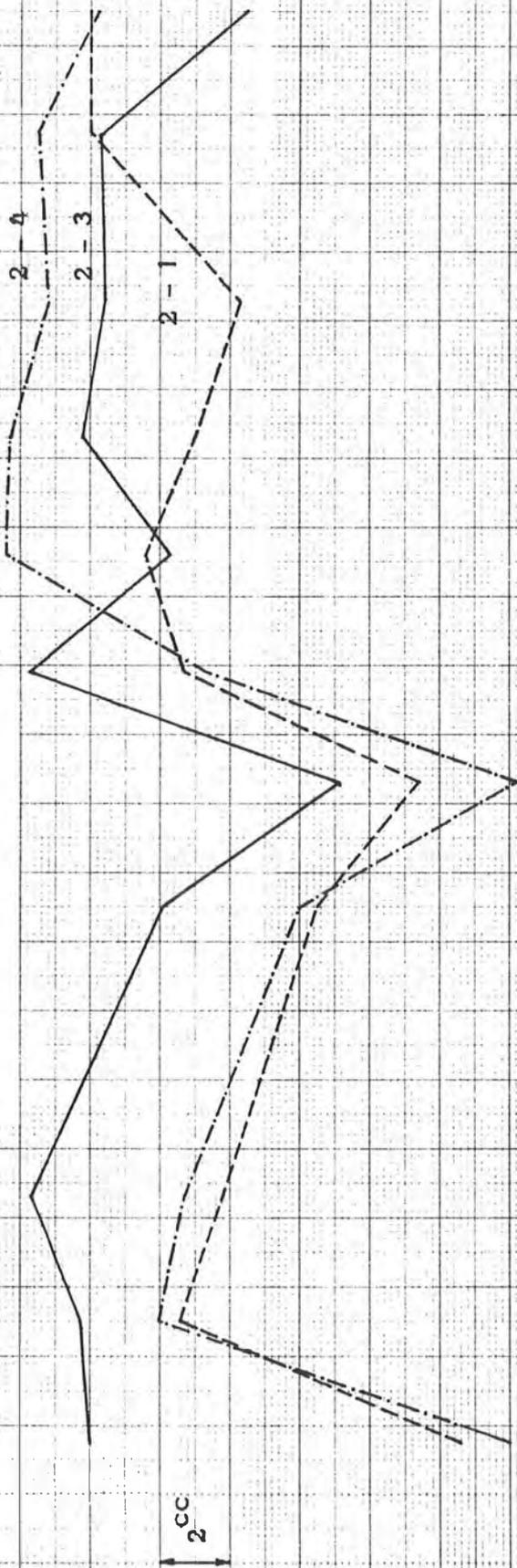


Diagramm 7

Zenitdistanzänderungen
im V4 "Hohe Wand"
1981 - 11 - 04/05

Standpunkt 3

3-4
3-1
3-2

Δ_{cc}
2

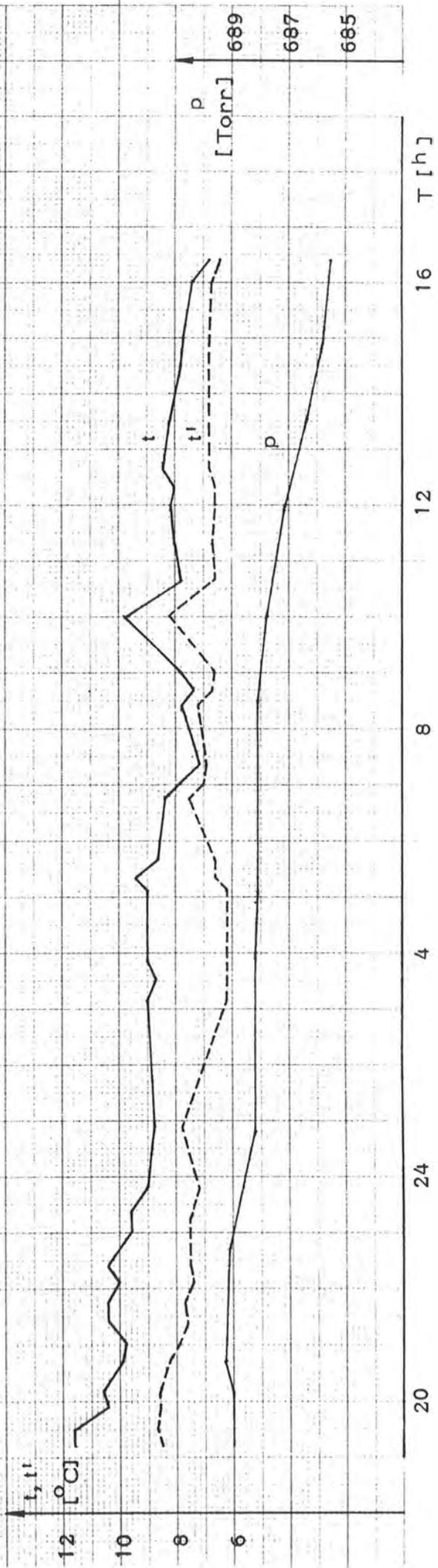


Diagramm 8

Zenitdistanzänderungen
im V4 "Hohe Wand"
1981 - 11 - 04/05

Standpunkt 4

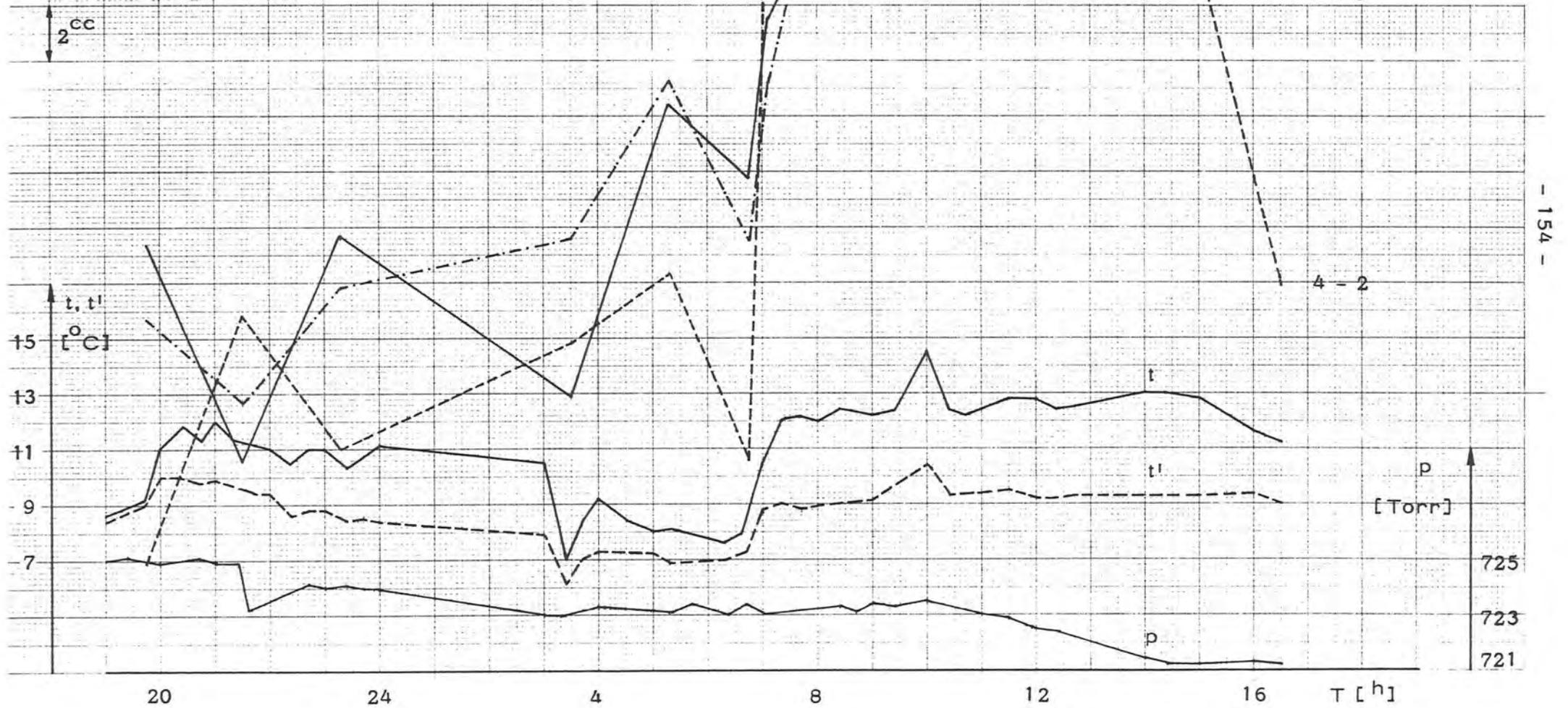


Diagramm 9

4.4.3.4 DIE ASTRONOMISCHEN MESSUNGEN

Die Messungen zur Festlegung der natürlichen Lotrichtungen (φ^* , λ^*) in den Punkten 1, 2 und 3 wurden im Herbst 1980 von den Diplomingenieuren E. Flicker und H. Ronacher mit einem Zeiss NI2-Astrolab ausgeführt. Die Beobachtungen auf dem Punkt 4 folgten dann im Herbst 1981, durchgeführt von cand. ing. T. Matausch. Zur Auswertung nach der Methode der gleichen Höhen lag dann folgende Anzahl von Sätzen zu je 16 Sternen vor.

Punkt	Anz. d. Sätze
1	2
2	3
3	2
4	1

Die Ergebnisse dieser Auswertung finden sich in den Tabellen 20 und 21, ebenso die Komponenten ξ , η der Lotabweichung in den 4 Punkten. Die Lotabweichungen beziehen sich auf das Bessel - Ellipsoid. Zur Berechnung der ellipsoidischen Koordinaten φ, λ aus den Gauß-Krüger Koordinaten x, y des österreichischen Gebrauchsnetzes wurde als Längenunterschied Ferro - Greenwich $\Delta\lambda = 17^{\circ}40'00,0''$ verwendet. In Abb. 58 sind zur Anschauung die Lotabweichungen ν^{\wedge} im vertikalen Viereck nach Richtung und Betrag aufgetragen; Maßstab: $1 \text{ cm} \hat{=} 10^{\text{cc}}$.

Astrolabmessungen 1980-09-05/06 (inkl. pers. Gleichung)

Beobachter	Flicker	Ronacher
Punkt 1:	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 29'' 56 \pm 0'' 39$ $\lambda^* = 16^{\circ} 03' 02'' 97 \pm 0'' 62$	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 29'' 74 \pm 0'' 52$ $\lambda^* = 16^{\circ} 03' 03'' 59 \pm 0'' 65$
pond. Mittel	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 29'' 62 \pm 0'' 09$ $\xi = - 1'' 53 = - 4,^{CC} 72$ $\vartheta = 38,^{CC} 07$	$\lambda^* = 16^{\circ} 03' 03'' 27 \pm 0'' 31$ $\eta = + 12'' 24 = + 37,^{CC} 78$ $\alpha_{\vartheta} = 107,^G 91$
Punkt 2:	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 17'' 92 \pm 0'' 52$ $\lambda^* = 16^{\circ} 03' 44'' 34 \pm 0'' 77$	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 18'' 11 \pm 0'' 24$ $\lambda^* = 16^{\circ} 03' 44'' 30 \pm 0'' 41$
Punkt 3:	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 43'' 97 \pm 0'' 24$ $\lambda^* = 16^{\circ} 02' 09'' 86 \pm 0'' 36$	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 43'' 88 \pm 0'' 17$ $\lambda^* = 16^{\circ} 02' 09'' 65 \pm 0'' 27$
pond. Mittel	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 43'' 91 \pm 0'' 04$ $\xi = - 4'' 58 = - 14,^{CC} 14$ $\vartheta = 48,^{CC} 47$	$\lambda^* = 16^{\circ} 02' 09'' 73 \pm 0'' 10$ $\eta = + 15'' 02 = + 46,^{CC} 36$ $\alpha_{\vartheta} = 118,^G 85$

Tab. 20

Astrolabmessungen 1981-10-08 (inkl. pers. Gleichung)

Beobachter	Matausch
Punkt 2:	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 18'' 25 \pm 0'' 22$ $\lambda^* = 16^{\circ} 03' 45'' 83 \pm 0'' 30$
pond. Mittel (Fli/Ron/Mat)	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 18'' 16 \pm 0'' 07$ $\xi = + 0'' 05 = + 0,^{CC} 15$ $\vartheta = 34,^{CC} 82$
Punkt 4:	$\lambda^* = 16^{\circ} 03' 45'' 21 \pm 0'' 53$ $\eta = + 11'' 28 = + 34,^{CC} 82$ $\alpha_{\vartheta} = 99,^G 73$
Punkt 4:	$\varphi^* = 47^{\circ} 48' 33'' 86 \pm 0'' 21$ $\xi = - 2'' 66 = - 8,^{CC} 21$ $\vartheta = 45,^{CC} 19$
	$\lambda^* = 16^{\circ} 02' 48'' 63 \pm 0'' 32$ $\eta = + 14'' 40 = + 44,^{CC} 44$ $\alpha_{\vartheta} = 111,^G 63$

Tab. 21

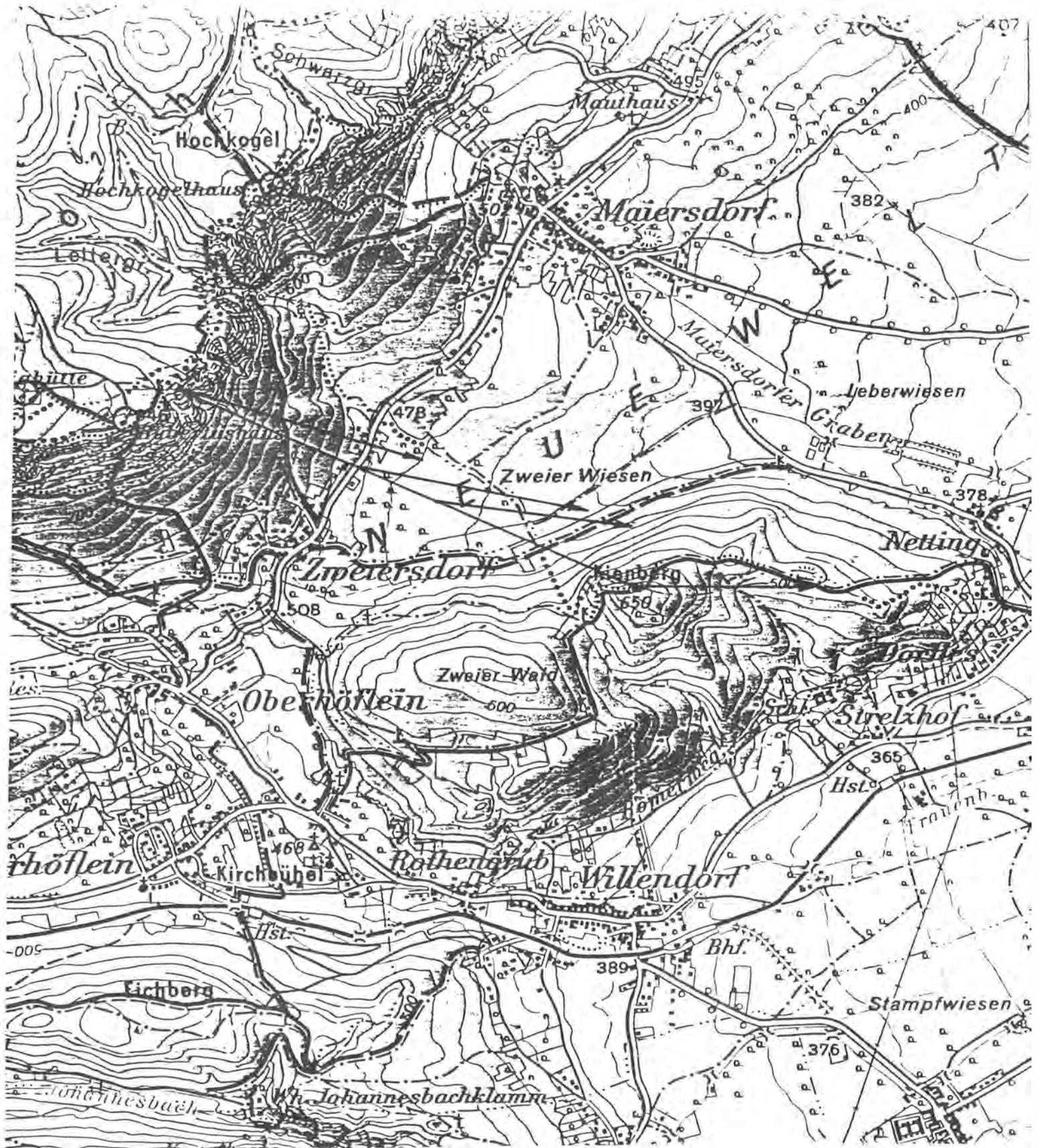


Abb. 64

4. 4. 3. 5 DIE PRÄZISIONSNIVELLEMENTS

Die Methode des vertikalen Vierecks verlangt die hochgenaue Bestimmung des Nivellementhöhenunterschiedes zwischen den beiden Talpunkten 1 und 4. Dazu wurde am 17. 12. 1981 ein Präzisionsnivellement mit dem Koni 007 von Zeiss Jena und 3m-Präzisionsnivellierlatten ausgeführt. Da der Boden schon gefroren war, konnten, um ein Einsinken zu vermeiden, als Umsteller keine Frösche verwendet werden. Statt dessen wurden stabile Holzpflocke eingeschlagen, in deren Hirnholz Torstahlschrauben mit kalottenförmigem Kopf eingeschraubt waren. Die Ablesungen auf jedem Stand erfolgten nach der bekannten Methode:

rück - linke Teilung
vor - linke Teilung
vor - rechte Teilung
rück - rechte Teilung,

um ein allfälliges Einsinken des Nivellierstatives erfassen zu können. Das Hinnivellement wurde von cand. ing. Stix, das Rücknivellement vom Verfasser selbst beobachtet.

$$\Delta H_{41}(\text{Niv}) = - 37,92540 \text{ m}$$

$$\Delta H_{14}(\text{Niv}) = + 37,92410 \text{ m}$$

$$\text{Mittel } \overline{\Delta H}_{14}(\text{Niv}) = + 37,92475 \text{ m} \quad \pm 0,65 \text{ mm}$$

Die genäherte Meereshöhe des Punktes 1 wurde von cand. ing. Rosenthaler mittels Präzisionsnivellement zu 447,9480 m ermittelt.

4.4.4 BERECHNUNG

4.4.4.1 DISTANZMITTEL

Aus den zentrierten und reduzierten Meßergebnissen der Tab. 7-11 werden jetzt die Mittel für jede der sechs Strecken berechnet. Dabei wird eine Gewichtung der Messungen nach den Fehlergesetzen der Präzisionsdistanzmeßgeräte unter Beachtung von (2, 19) vorgenommen:

Mittlere Fehler der auf die Bodenpunkte zentrierten Schrägdistanzen:

Distanz fkm]	$\zeta [^{\circ}]$	$m_d(\text{MA100}) [\text{mm}]$	$m_d(\text{ME3000}) [\text{mm}]$	
1-4	(0, 4)	94, 1	$\pm 2, 3$	$\pm 0, 6$
1-2	(1, 0)	87, 6	$\pm 3, 5$	$\pm 1, 2$
4-3	(1, 0)	71, 3	$\pm 3, 6$	$\pm 1, 3$
1-3	(1, 4)	77, 8	$\pm 4, 3$	$\pm 1, 7$
4-2	(1, 4)	92, 9	$\pm 4, 3$	$\pm 1, 6$
2-3	(2, 3)	92, 2	$\pm 6, 1$	$\pm 2, 5$

($m_G = m_R = \pm 1 \text{ mm}$)

Tab. 23

Gewichte der zentrierten Schrägdistanzen:

$$p = \frac{m_o^2}{m_d^2} \quad m_o = \pm 3 \text{ mm}$$

Distanz	$p(\text{MA100})$	$p(\text{ME3000})$
1-4	1, 70	25, 00
1-2	0, 73	6, 25
4-3	0, 69	5, 33
1-3	0, 49	3, 11
4-2	0, 49	3, 52
2-3	0, 24	1, 44

Tab. 24

Zusammenstellung der zur Mittelung herangezogenen Distanzmessungen:

Distanz: 1-4 = 408,4490 m $\pm 0,5$ mm

Datum:	p	d
81-05-19	1,70	408,4462
	1,70	,4469
	1,70	,4443
	1,70	,4451
81-07-06	25,00	,4490
	25,00	,4496
81-10-08	1,70	,4524
	1,70	,4512

Distanz: 1-2 = 1007,0286 m $\pm 0,8$ mm

Datum:	p	d
80-07-03	0,73	1007,0341
	0,73	,0346
	0,73	,0353
80-09-03	0,73	,0295
	0,73	,0268
80-10-02	0,73	,0331
	0,73	,0325
	0,73	,0330
81-04-22	0,73	,0207
81-05-19	0,73	,0266
	0,73	,0274
81-07-06	6,25	,0266
	6,25	,0282
81-10-07	0,73	,0286
	0,73	,0290

Distanz: 4-3 = 1008,2471 m $\pm 1,3$ mm

Datum:	p	d
81-05-19	0,69	1008,2461
	0,69	,2443
81-07-06	5,33	,2450
	5,33	,2496

Distanz: 1-3 = 1398,0886 m \pm 0,8 mm

Datum:	p	d
80-07-03	0,49	1398,0862
	0,49	,0872
	0,49	,0888
80-09-03	0,49	,0863
	0,49	,0859
80-10-02	0,49	,0873
	0,49	,0870
	0,49	,0872
81-04-22	0,49	,0867
81-07-06	3,11	,0873
	3,11	,0923

Distanz: 4-2 = 1403,4974 m \pm 0,2 mm

Datum:	p	d
81-05-19	0,49	1403,4986
	0,49	,4995
	0,49	,4977
	0,49	,4963
	0,49	,4972
81-07-06	3,52	,4973
	3,52	,4973
81-10-07	0,49	,4970
	0,49	,4968

Distanz: 2-3 = 2319,2733 m \pm 2,7 mm

Datum:	p	d
80-09-03	0,24	2319,2725
	0,24	,2711
	0,24	,2710
	0,24	,2692
81-07-06	1,44	,2674
	1,44	,2808

<u>Ponderierte Distanzmittel:</u>		mittlere Fehler der Mittel	Gewichte aus den mittl. Fehlern d. Mittel mit $m_o = \pm 1 \text{ mm}$
	d [m]	m_d [mm]	p
1-4	408,4490	$\pm 0,5$	4,000
1-2	1007,0286	$\pm 0,8$	1,563
4-3	1008,2471	$\pm 1,3$	0,592
1-3	1398,0886	$\pm 0,8$	1,563
4-2	1403,4974	$\pm 0,2$	25,000
2-3	2319,2733	$\pm 2,7$	0,137

Tab. 25

4. 4. 4. 2 BEDINGTER AUSGLEICH DES VERTIKALEN DISTANZNETZES

Unter Verwendung der Bezeichnungen und Ausdrücke aus 4. 1. 1:

$$\begin{array}{ll} r_1 = 1398,0886 \text{ m} & s_1 = 1007,0286 \text{ m} \\ r_2 = 1008,2471 \text{ m} & s_2 = 408,4490 \text{ m} \\ r_3 = 2319,2733 \text{ m} & s_3 = 1403,4974 \text{ m} \end{array}$$

$w = +0,^{cc}726$	P^{-1}	0,640	0	0	0	0	0	-0,987	A
		0	1,690	0	0	0	0	+0,685	
		0	0	7,290	0	0	0	+0,313	
		0	0	0	0,640	0	0	+0,881	
		0	0	0	0	0,250	0	+1,799	
		0	0	0	0	0	0,040	-1,182	
A^T		-0,987	+0,685	+0,313	+0,881	+1,799	-1,182		
		$A^T P^{-1}$						$A^T P^{-1} A = N$	
		-0,632	+1,158	+2,282	+0,564	+0,450	-0,047	+3,492	

$$3,492 \cdot k + 0,726 = 0 \quad \Rightarrow k = -0,208 \text{ [mm}^2/\text{cc]}$$

Distanzverbesserungen und mittlere Fehler:

$$v \text{ [mm]} = \begin{pmatrix} +0,131 \\ -0,241 \\ -0,474 \\ -0,117 \\ -0,094 \\ +0,010 \end{pmatrix} \quad m_o = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm 0,389$$

$$v^T P v = +0,151 \quad m_d \text{ [mm]} = \pm \begin{pmatrix} 0,311 \\ 0,505 \\ 1,051 \\ 0,311 \\ 0,194 \\ 0,078 \end{pmatrix}$$

$$m_i = \pm \frac{m_o}{\sqrt{p_i}}$$

Mittlere Fehler der ausgeglichenen Distanzen:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 0,525 & 0,210 & 0,415 & 0,102 & 0,082 & 0,009 \\ 0,210 & 1,306 & -0,757 & -0,188 & -0,150 & 0,016 \\ 0,415 & -0,757 & 5,799 & -0,370 & -0,293 & 0,030 \\ 0,102 & -0,188 & -0,370 & 0,549 & -0,073 & 0,008 \\ 0,082 & -0,150 & -0,293 & -0,073 & 0,192 & 0,006 \\ 0,009 & 0,016 & 0,030 & 0,008 & 0,006 & 0,039 \end{pmatrix} \quad m_d [\text{mm}] = \pm \begin{pmatrix} 0,282 \\ 0,444 \\ 0,936 \\ 0,288 \\ 0,170 \\ 0,077 \end{pmatrix}$$

Ausgeglichene Distanzen und ihre mittleren Fehler:

$d_{13} = 1398,0887 \text{ m} \pm 0,3 \text{ mm}$
$d_{24} = 1008,2469 \text{ m} \pm 0,4 \text{ mm}$
$d_{23} = 2319,2728 \text{ m} \pm 0,9 \text{ mm}$
$d_{12} = 1007,0285 \text{ m} \pm 0,3 \text{ mm}$
$d_{14} = 408,4489 \text{ m} \pm 0,2 \text{ mm}$
$d_{24} = 1403,4974 \text{ m} \pm 0,1 \text{ mm}$

Tab. 26

Es ist also bei allen sechs Distanzen gelungen, die zur Anwendung der Methode vorauszusetzende Genauigkeit von $m_d \leq \pm 1 \text{ mm}$ zu erreichen.

4.4.4.3 BERECHNUNG DER WINKEL α IM DIAGONALVIERECK

Aus den ausgeglichenen Distanzen werden mit dem Cosinussatz die in (4, 18) benötigten Winkel im Diagonalviereck errechnet:

α_{312}	=	165,9	40792	
α_{413}	=	16,28745		
α_{124}	=	5,25994		
α_{423}	=	14,91768		Tab. 27
α_{231}	=	14,41446		
α_{134}	=	6,53792		
α_{342}	=	164,12994		
α_{241}	=	13,04469		
Σ	=	400,00000		

4.4.4.4 DIE BERECHNUNG DER ZENTRIWINKEL δ_{ik}^*

Mit (3, 55) und den Werten φ_i^* , λ_i^* aus 4.4.3.4. ergeben sich die Zentriwinkel δ_{ik}^* zwischen den natürlichen Lotrichtungen zu:

$\delta_{12}^* = 93,^{CC}86$	$\delta_{23}^* = 213,^{CC}28$	Tab. 28
$\delta_{13}^* = 119, 42$	$\delta_{24}^* = 126, 90$	
$\delta_{14}^* = 33, 05$	$\delta_{34}^* = 86, 39$	

Kombiniert man die δ_{ik}^* nach der Form: $\delta_{ik}^* + \delta_{kl}^* - \delta_{il}^* = w$, so bleiben die Widersprüche w durch Verkantung (siehe 3.2.6.4.1) der Ebenen, in denen die δ^* gezählt werden, stets $\leq \pm 0,^{CC}1$ und werden bei den weiteren Berechnungen ignoriert! Die Winkel χ zwischen Normal- und Gegen normalschnittsebenen bleiben – wie in 3.2.6.4.4.1 und 3.2.6.4.4.2 angekündigt – stets so klein, daß bei den Differenzen $\delta_{ik}^* - \delta_{ik}^{*I} \pm 0,^{CC}2$ nicht überschritten wird.

Bsp.: $\chi_{23} = 9,^{CC}0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{23}^* - \delta_{23}^{*I} = 0,^{CC}2$

4.4.4.5 DIE LOTABWEICHUNGSKOMPONENTEN ε_i IM AZIMUT A^* DES VERTIKALEN VIERECKS

Für das Nordazimut $A^* = 327^g$ (Punktreihenfolge 2-1-4-3) lauten die ε_i nach Formel 2.4:

$\varepsilon_2 = -31,^{cc}67$	$\varepsilon_1 = -36,^{cc}38$	$\varepsilon_4 = -43,^{cc}88$	$\varepsilon_3 = -48,^{cc}07$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Tab. 29

Die mittleren Fehler m_{ε_i} ergeben sich aus Formel (2,4a):

$$m_{\varepsilon_2} = \pm 1,^{cc}01 \quad m_{\varepsilon_1} = \pm 0,^{cc}60 \quad m_{\varepsilon_4} = \pm 0,^{cc}66 \quad m_{\varepsilon_3} = \pm 0,^{cc}20$$

Tab. 29a

4.4.4.6 DIE DIFFERENZEN $\Delta N'_{i,k}$ DER NIVEAUFLÄCHENUNDULATIONEN IM VERTIKALEN VIERECK

Unter Anwendung der Formeln (1,3a,b) finden wir den mittleren Anstieg der Niveaufläche vom Kienberg zur Hohen Wand:

$\Delta N'_{21} = +5,30 \text{ cm}$	
$\Delta N'_{14} = +2,56 \text{ cm}$	Tab. 30
$\Delta N'_{43} = +6,55 \text{ cm}$	
<hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/>	
$\sum_2^3 \Delta N' = +14,41 \text{ cm}$	$\Delta N'_{23} = +14,42 \text{ cm}$

Die bemerkenswert gute Übereinstimmung der Summe der Einzelundulationen von Punkt 2 nach Punkt 3 mit der direkt zwischen den beiden Punkten berechneten Undulation beweist die berechnete Anwendung der Näherungsformel (1,3a).

Refraktionswinkel δ_{ik} im vertikalen Viereck "Hohe Wand" während der 24^h-Zenitdistanzmessung 1981-11-04/05 [°C]

	19 ⁴⁵	21 ³⁰	23 ²⁰	3 ³⁰	5 ²⁰	6 ⁵⁵	8 ³⁵	10 ²⁰	12 ¹⁵	14 ⁴⁵	16 ³⁰
δ_{12}	+21,3 ±5,2	+17,2 ±4,4	+18,8 ±3,1	+22,7 ±4,1	+15,9 ±4,7	+12,6 ±4,9	+ 5,1 ±3,4	+ 6,4 ±3,0	+10,8 ±3,5	+ 5,5 ±3,3	+10,0 ±4,4
δ_{21}	+27,5 ±3,5	+19,5 ±3,1	+20,7 ±3,1	+23,4 ±3,1	+26,3 ±3,0	+19,6 ±3,0	+18,5 ±2,8	+19,9 ±3,0	+21,2 ±3,0	+16,9 ±2,8	+16,9 ±3,3
δ_{13}	+21,2 ±3,7	+21,2 ±3,6	+23,3 ±3,6	+24,7 ±4,5	+19,7 ±2,8	+21,2 ±4,2	+17,7 ±2,7	+19,4 ±2,5	+17,1 ±2,9	+13,6 ±3,3	+13,5 ±2,6
δ_{31}	+15,5 ±2,6	+ 2,9 ±2,7	+ 9,5 ±2,3	+10,0 ±2,6	+11,6 ±2,5	+10,8 ±3,2	+ 6,3 ±2,2	+ 6,0 ±2,6	+ 8,5 ±2,6	+ 8,5 ±2,7	+10,7 ±9,3
δ_{14}	+12,3 ±6,7	+22,5 ±4,4	+20,7 ±3,1	+17,8 ±3,5	+ 6,0 ±2,8	+ 8,1 ±4,9	- 1,2 ±2,2	- 1,5 ±1,4	- 2,1 ±1,6	+ 1,0 ±2,4	- 6,5 ±4,7
δ_{41}	+21,0 ±5,3	+28,7 ±3,0	+10,6 ±2,6	+26,4 ±2,2	+15,9 ±1,8	+18,5 ±5,8 +12,8 ±3,8	+ 6,9 ±1,8	+ 0,9 ±2,5	+ 4,3 ±1,6	+ 6,1 ±1,6	+ 7,5 ±9,1
δ_{23}	+20,7 ±3,0	+20,4 ±3,0	+19,0 ±2,4	+22,8 ±2,6	+27,8 ±2,7	+19,0 ±3,0	+23,0 ±2,4	+20,5 ±2,6	+21,1 ±2,6	+21,0 ±2,7	+25,2 ±2,5
δ_{32}	+18,4 ±2,9	+13,2 ±3,2	+17,9 ±2,2	+17,2 ±2,2	+17,1 ±2,5	+13,4 ±2,2	+15,0 ±2,3	+13,9 ±2,3	+11,7 ±2,3	+14,2 ±2,3	+18,7 ±9,2
δ_{24}	+29,5 ±3,7	+19,0 ±2,6	+20,2 ±2,9	+23,5 ±2,6	+29,7 ±2,7	+20,8 ±2,8	+15,1 ±2,5	+15,2 ±2,5	+16,3 ±2,3	+16,2 ±2,3	+17,7 ±2,9
δ_{42}	+27,5 ±3,4	+18,6 ±3,4	+23,4 ±2,9	+19,6 ±4,7	+17,0 ±3,0	+23,8 ±3,6 + 3,6 ±3,4	- 1,7 ±2,3	+ 0,4 ±2,5	- 4,2 ±2,6	+ 3,8 ±2,2	+17,5 ±9,2
δ_{34}	+ 4,6 ±2,9	+ 7,7 ±3,0	+ 7,3 ±2,9	+ 4,8 ±3,0	+ 4,6 ±3,0	+ 3,0 ±3,0	+ 0,7 ±3,0	+ 2,6 ±2,9	0 ±3,3	+ 3,4 ±3,1	+ 0,1 ±9,4
δ_{43}	+27,3 ±3,4	+30,3 ±3,0	+26,2 ±3,0	+24,4 ±3,0	+20,8 ±3,2	+24,5 ±4,2 +20,8 ±3,3	+ 8,5 ±3,3	+10,1 ±3,2	+ 9,9 ±3,0	+11,3 ±2,9	+17,3 ±9,4

Tab. 31

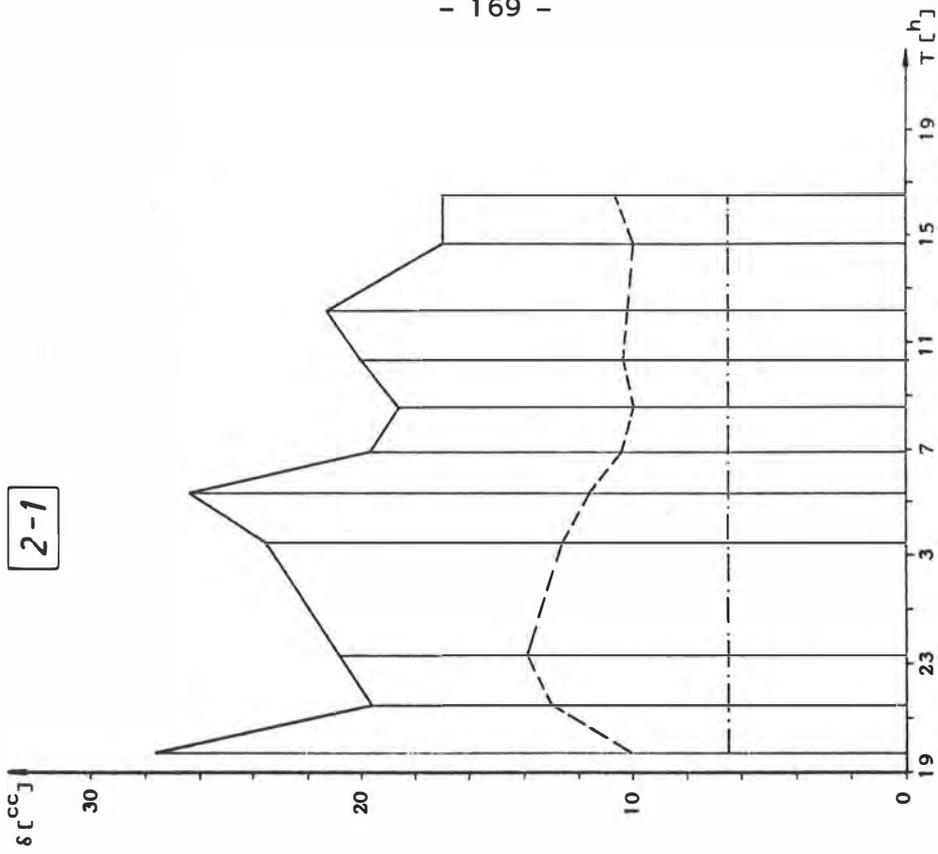


Diagramm 11

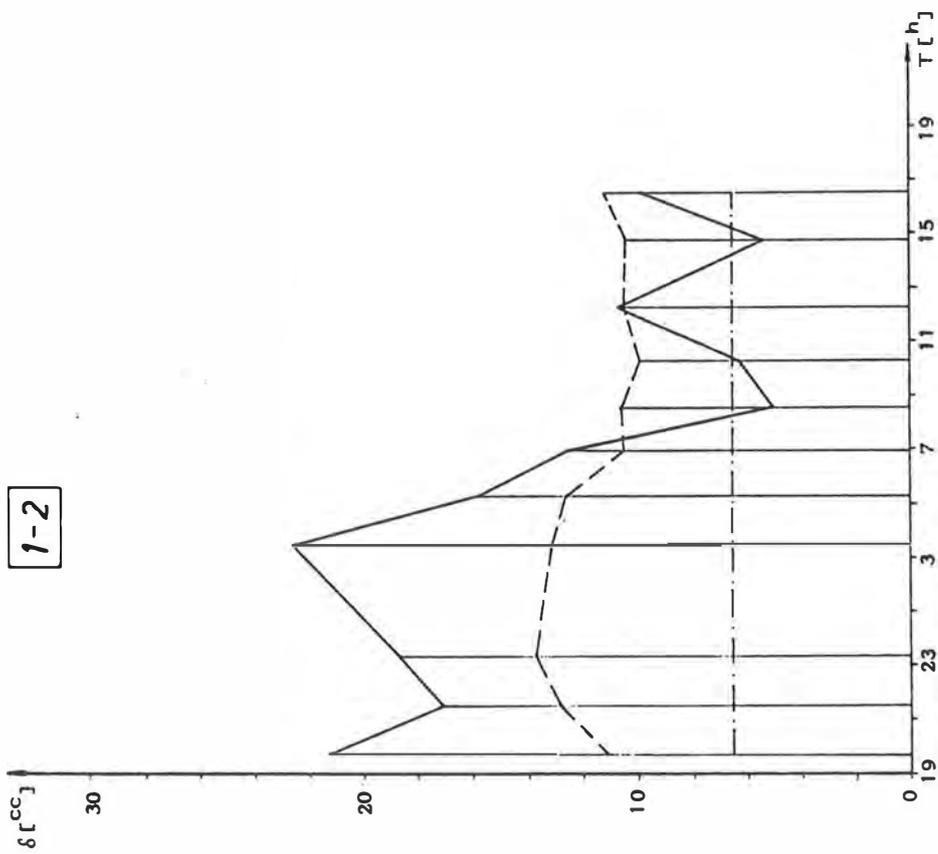


Diagramm 10

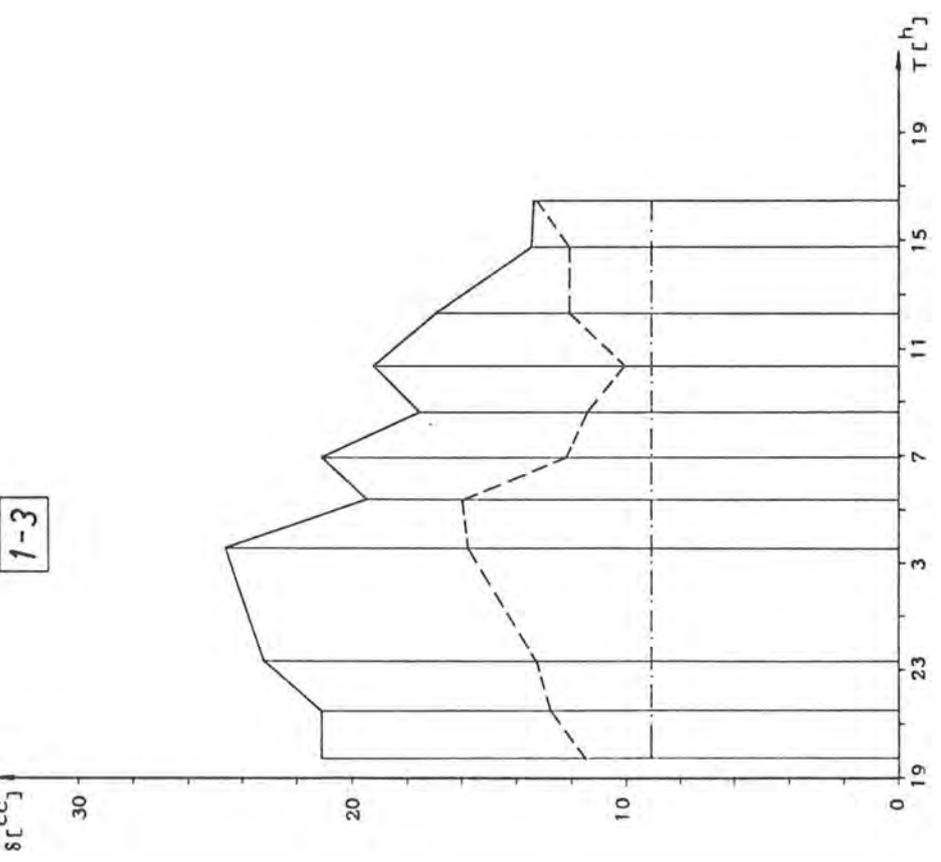


Diagramm 12

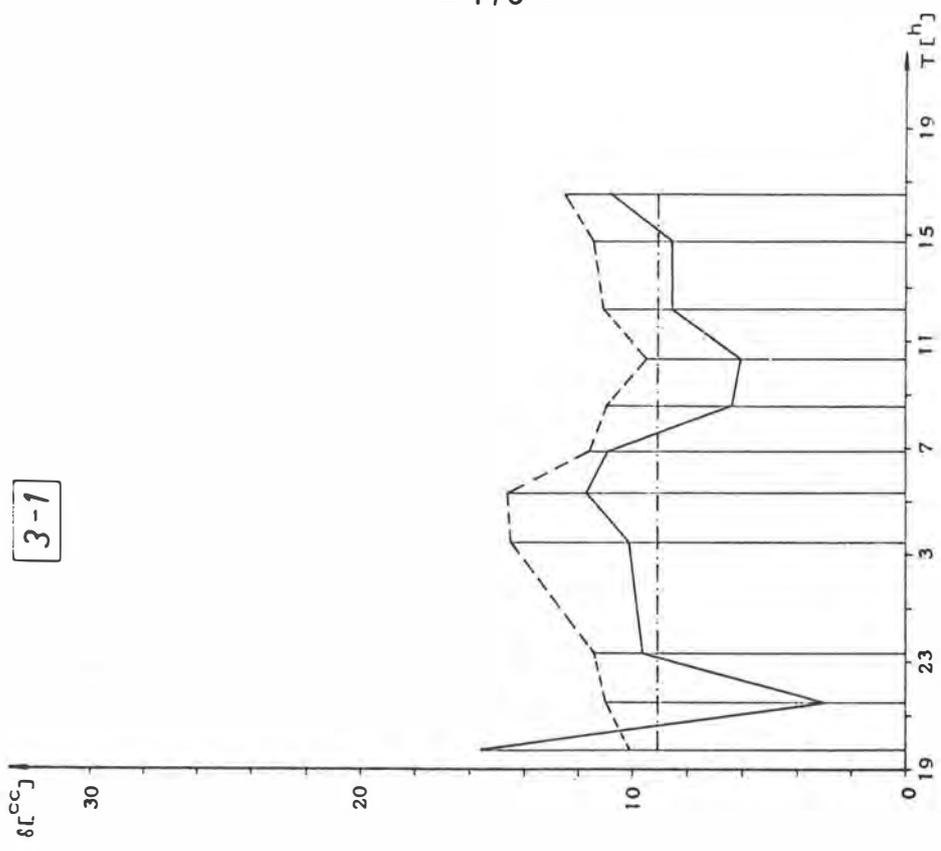


Diagramm 13

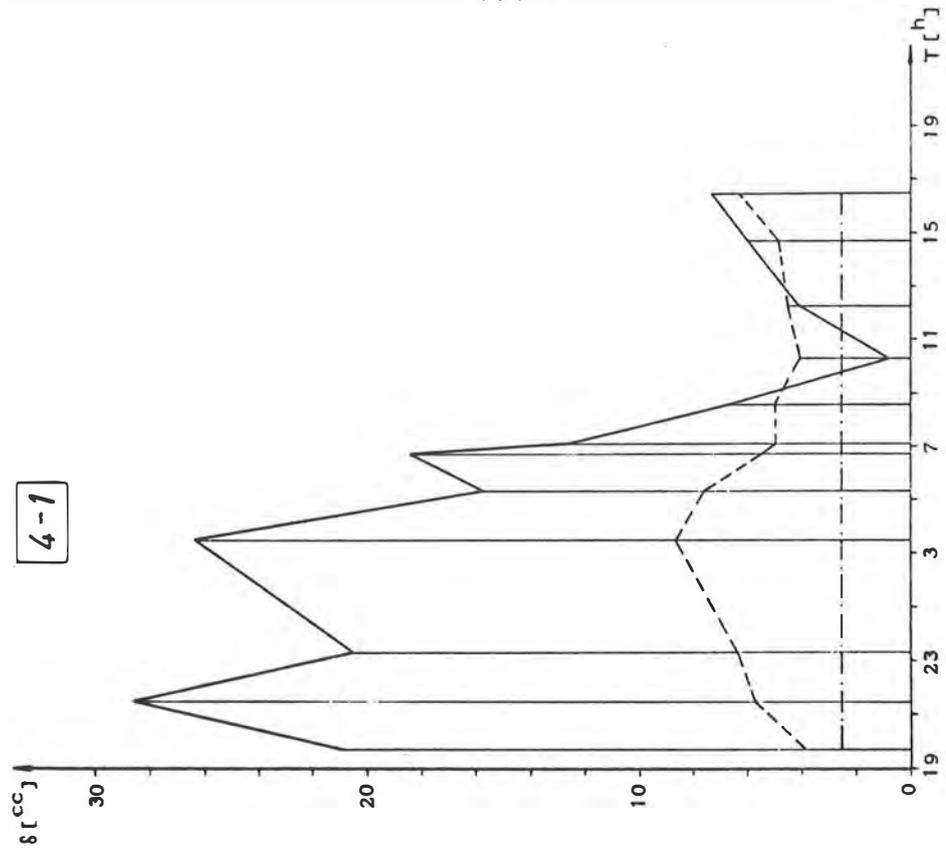


Diagramm 15

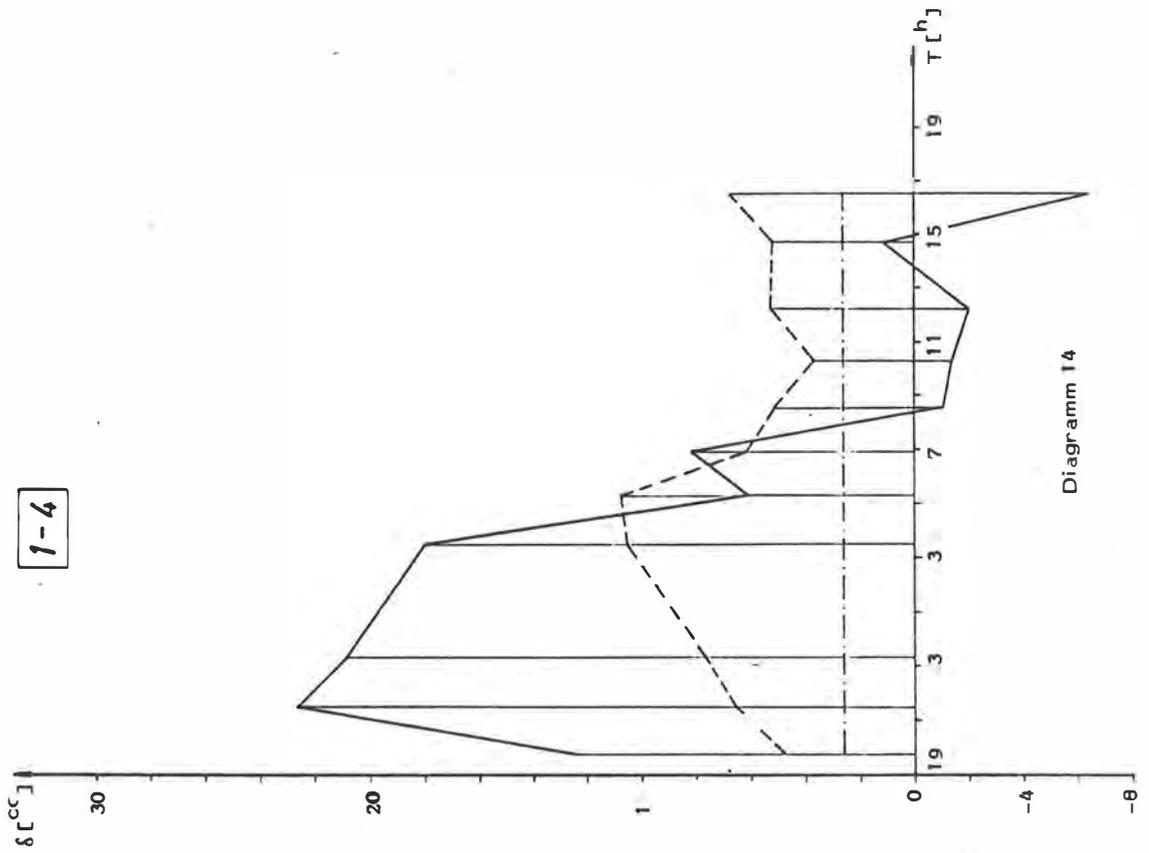


Diagramm 14

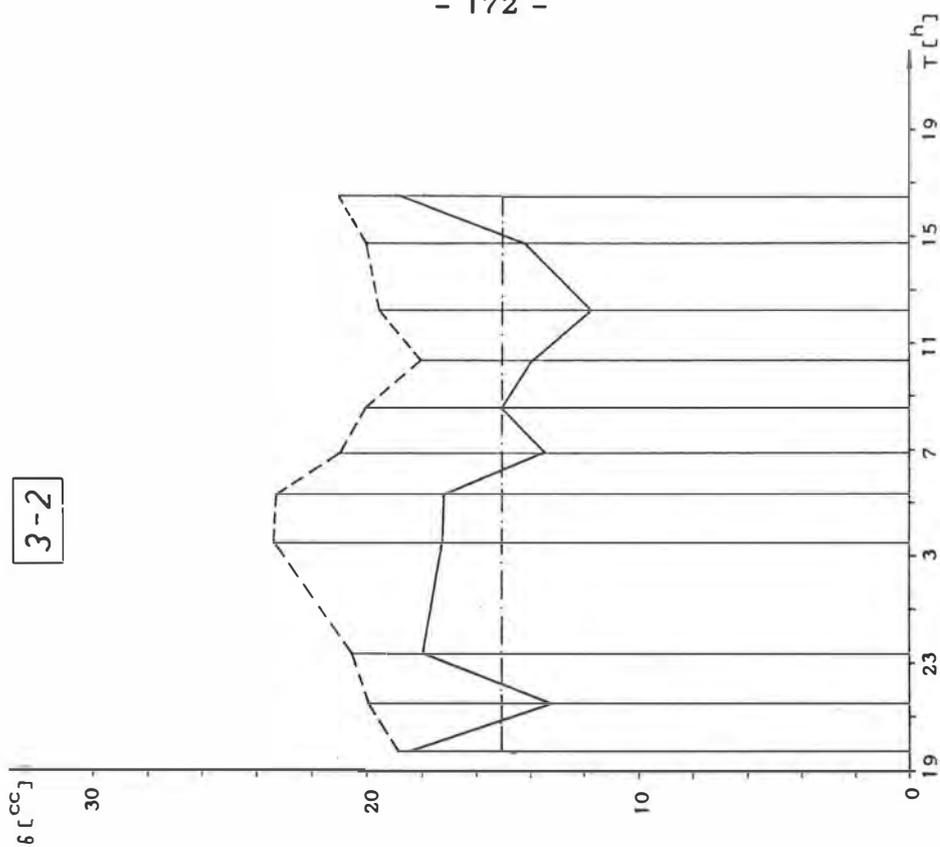


Diagramm 17

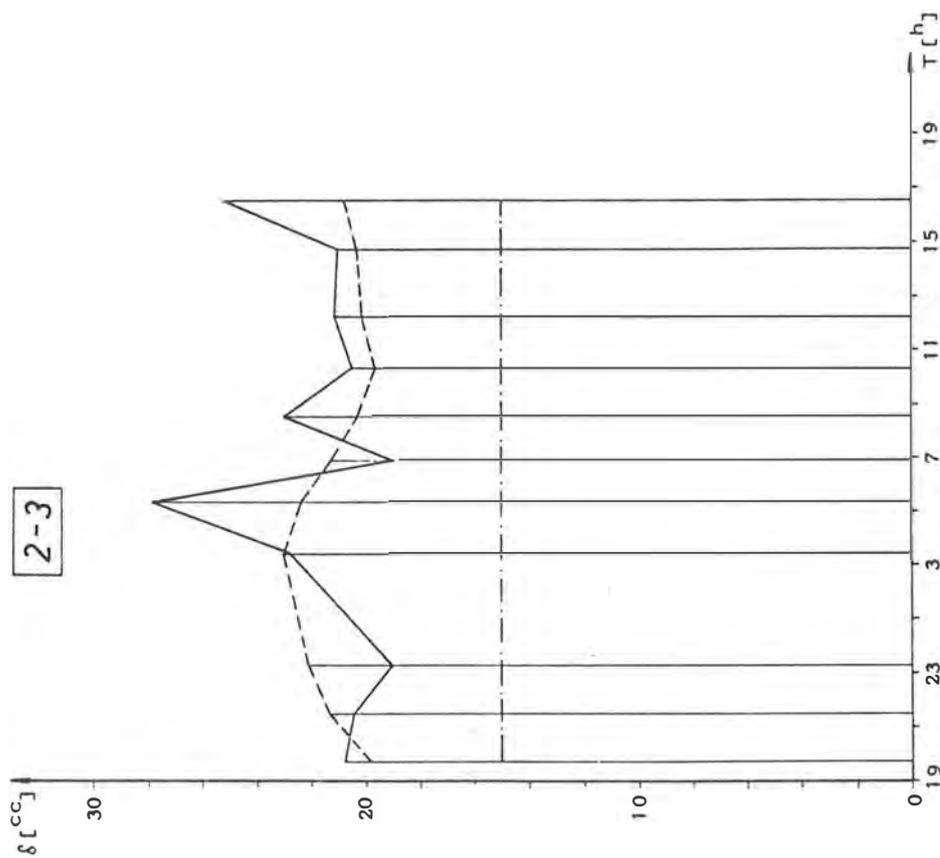
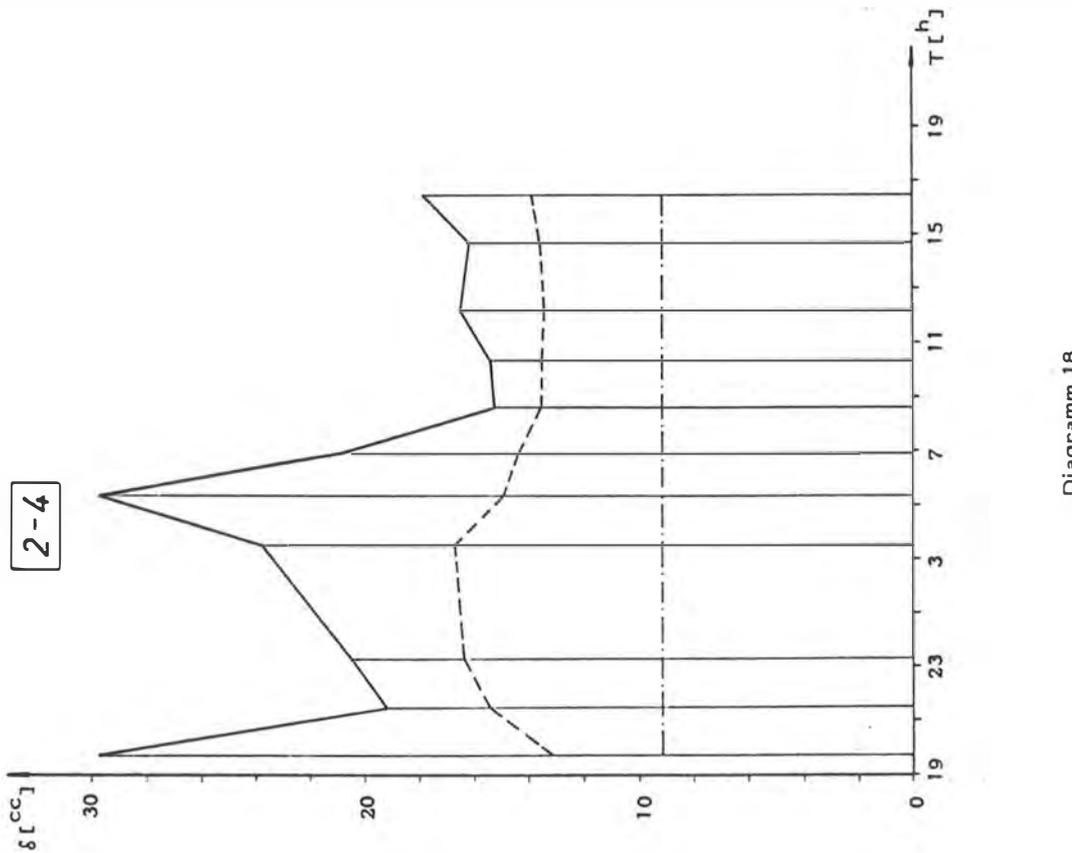
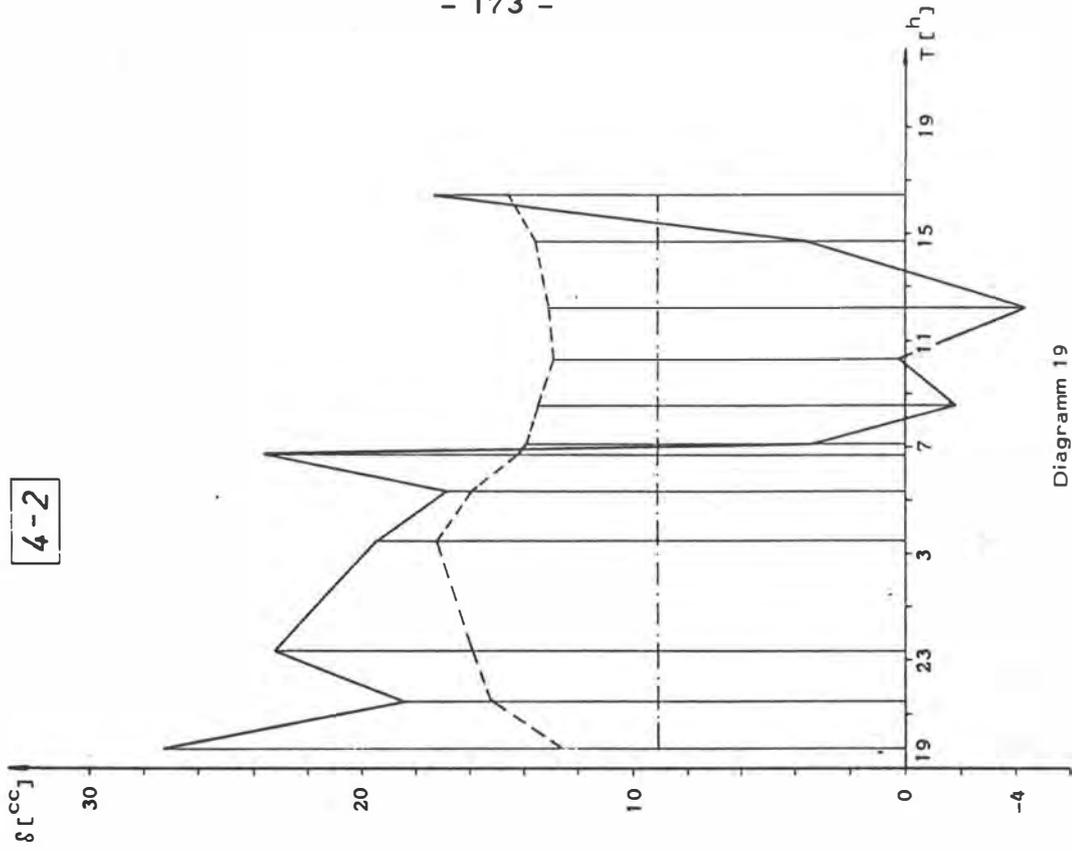


Diagramm 16



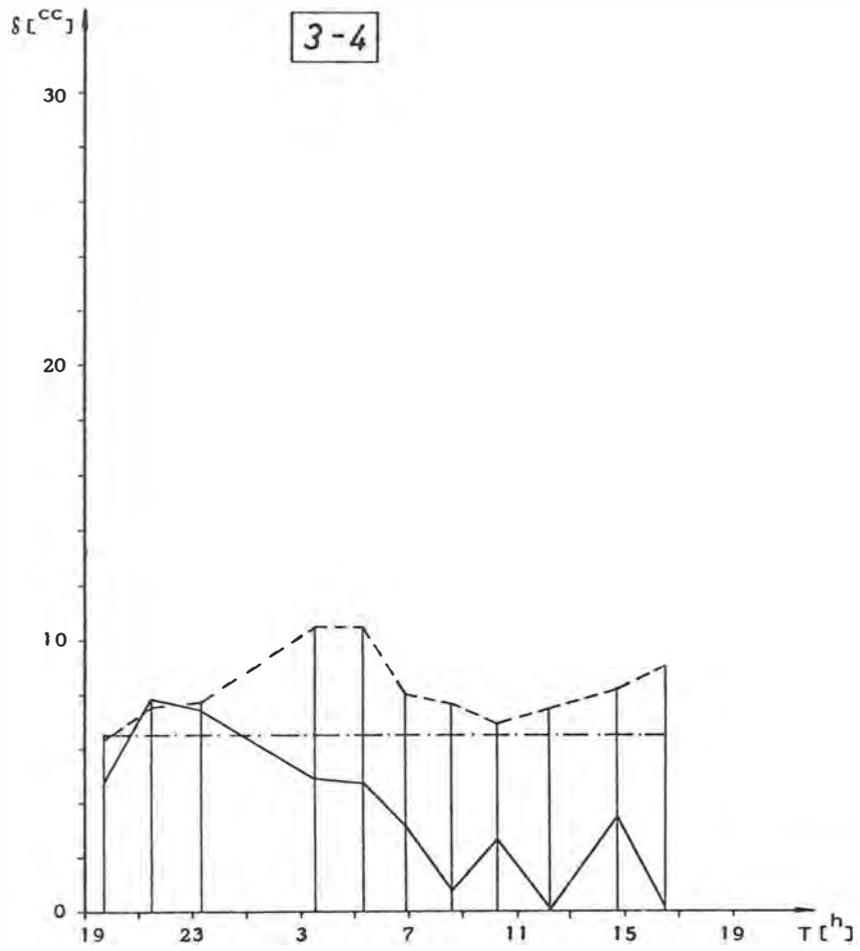


Diagramm 20

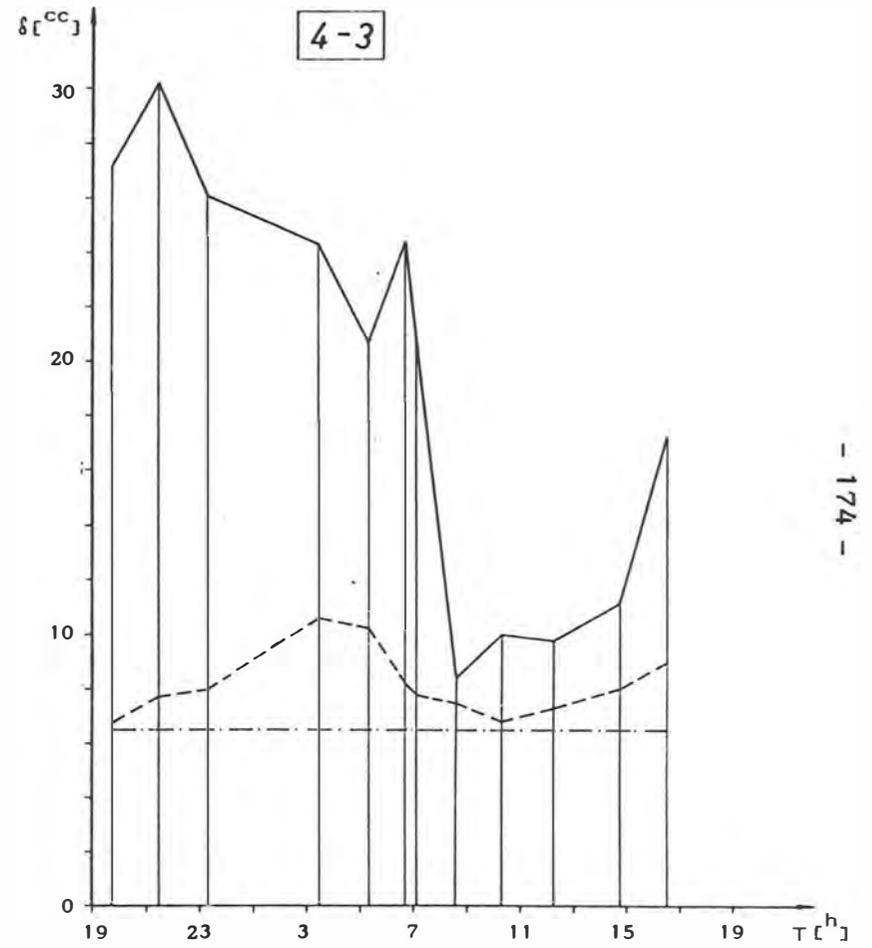
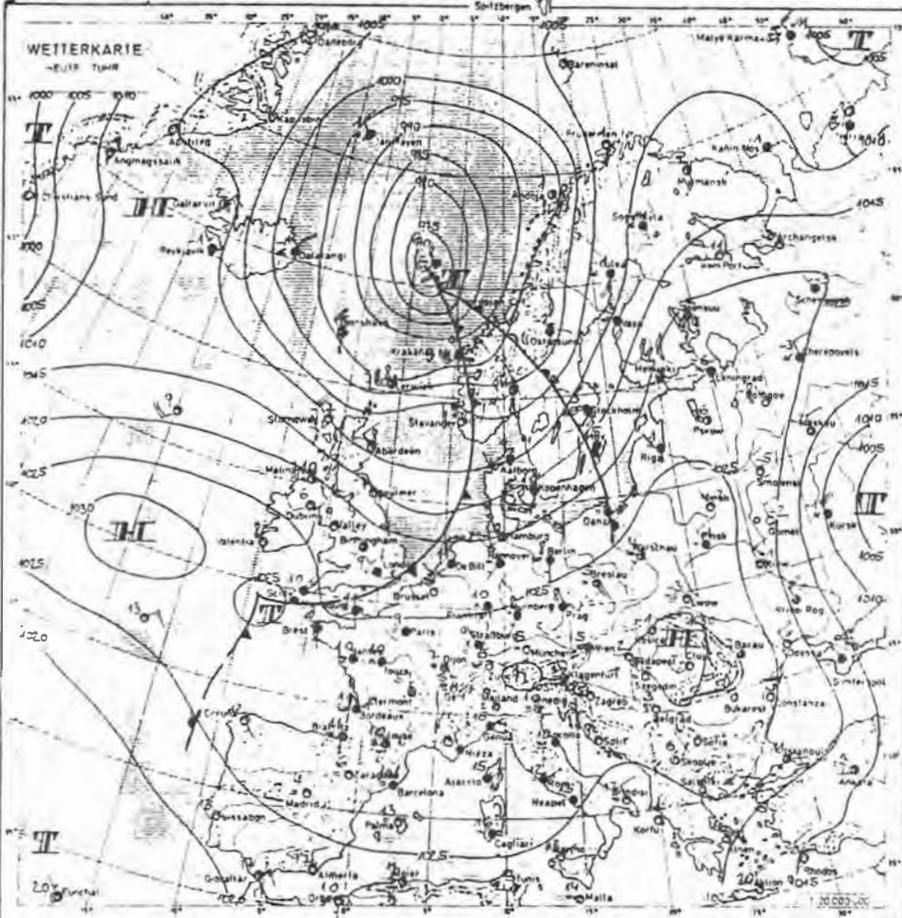


Diagramm 21

Wetterbericht der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik

38. JAHRGANG NR 301 Mittwoch den 4. November 1981



RADIOSONDENAUFSTIEG

Wien	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Temperatur °C	10	9	7	4	1	-1	-3	-4	-5	-5	-4
Rel. Feuchte %	75	70	62	50	35	20	13	10	10	10	10
Windrichtung	WSW										
Windgeschw. in m/sec	3	5	4	22	36	34	32	29	29	20	13

SIOWETTER heute: A = Hochdrucklage (Raum WIEN)

Wetterlage und Vorhersage:

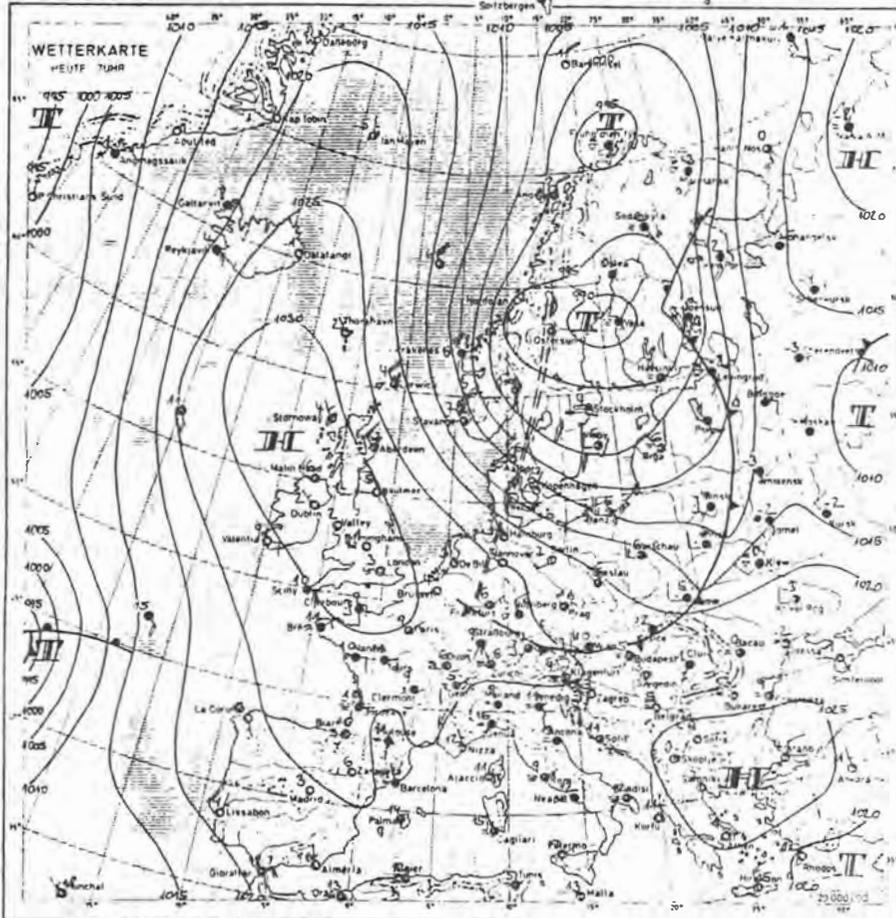
Die Großwetterlage stellt sich entscheidend um. An der Rückseite eines über dem Nordmeer liegenden Sturmtiefs stößt Kaltluft gegen den Kontinent vor. Bereits morgen wird im Gebirge ein Temperatursturz erfolgen, ab Freitag wird dann auch im Flachland kaltes Wetter herrschen.

Wetteraussichten für Donnerstag, den 5. November 1981:

Bei veränderlicher Bewölkung an Alpennordrand häufig, sonst örtlich Regenschauer. Schneefallgrenze an der Alpennordseite unter 1000 m sinkend. Im Osten und Süden auch einige sonnige Abschnitte. Lebhafter, am Alpenostrand auch stürmischer Nordwestwind. Frühtemperaturen 5 bis 12 Grad, infolge Kaltluftzufuhr keine nennenswerte Tageserwärmung.

Wetterbericht der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik

38. JAHRGANG NR 301 Donnerstag den 5. November 1981



RADIOSONDENAUFSTIEG

Wien	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Temperatur °C	10	9	7	4	1	-1	-3	-4	-5	-5	-4
Rel. Feuchte %	75	70	62	50	35	20	13	10	10	10	10
Windrichtung	WSW										
Windgeschw. in m/sec	3	5	4	22	36	34	32	29	29	20	13

SIOWETTER heute: D 2 = Nordwestlage mit Frontdurchgang (Raum WIEN)

Wetterlage und Vorhersage:

Die milde Wetterperiode ist abgeschlossen. Über Skandinavien liegt ein Tiefdruckgebiet. Seine Front hat Österreich bereits erfaßt. An ihrer Rückseite gelangt nun wesentlich kühlere Luft als zuletzt in unser Land.

Wetteraussichten für Freitag, den 6. November 1981:

Veränderlich bewölkt, an der Alpennordseite lokale Schneeschauer. Auflebende Winde aus West bis Nord. Frühtemperaturen minus 2 bis plus 5, Tageshöchsttemperaturen 5 bis 9 Grad.

Führt man eine Mittelung der erreichten mittleren Fehler für jede Visur über 24 Stunden hinweg oder für jeden Beobachtungsdurchgang über alle zwölf Visuren durch, so zeigt sich, daß im Schnitt die Refraktionswinkel im vertikalen Viereck auf

$$m_{\delta} = \pm 3^{\text{CC}}$$

genau ermittelt werden konnten. Das beweist die Einhaltung der angestrebten Fehlergrenzen bei den beobachteten Größen und ist ein entscheidender Hinweis auf die Tauglichkeit der Methode!

Da der Berechnung der m_{δ} eine strenge Fehlertheorie (4.1.3.1) zugrunde liegt und der einzige vorerst unwägbare Fehlereinfluß, die meteorologische Reduktion der Distanzen, durch den Distanzausgleich (4.1.1) im Griff ist, stellt die "Methode des vertikalen Vierecks" das erste Verfahren dar, welches in der Lage ist, zu den ausgewiesenen Refraktionswinkeln auch deren mittlere Fehler in aller Strenge anzugeben.

Beim Vergleich der voraussetzungsfreien geometrischen Refraktionswinkel mit jenen aus dem physikalischen Modell zeigt sich nur bei den langen, bodenfernen Visuren (2-3, 3-2, 3-1) eine befriedigende Übereinstimmung (wenige Sekunden). In den meisten anderen Fällen gibt das Modell Wunderlin zwar recht gut die Systematik des Refraktionsverlaufes an, bleibt aber in den Amplituden fast durchwegs zu gering (vergleiche Wunderlin, 1979, Seite 234 ff.). Dies gilt besonders für die Nachtstunden, wo durch die ausgeprägten Inversionsverhältnisse die Strahlen im geringen Geländeabstand erstaunlich stark zur Erde gekrümmt waren. Am stärksten ist dieser Effekt an der Visur 4-3 zu beobachten, die eine längere Strecke über dichtem Wald hinwegstreift, der nachts seinen großen Wärmevorrat abgibt. Tagsüber nähern sich dann mit wenigen Ausnahmen (3-4, 4-2) die physikalischen Refraktionswinkel den geometrischen an. Die Visur 3-4 streift wegen ihres extrem steilen

Verlaufes in Standpunktsnähe die bodennächsten Luftschichten, was die bemerkenswert geringen Refraktionswinkel während des sonnigen Tages verständlich macht. Die extreme Refraktionsanomalie bei der Visur 4-2 bedarf einer gründlicheren Untersuchung. Vorerst fällt auf, daß, während die bodennahe Visur 4-1 selbst zur Mittagszeit noch positiv gekrümmt ist, die darüber liegende Visur 4-3 schon seit dem Vormittag negativ gekrümmt verläuft. Das widerspricht der konventionellen Vorstellung vom Verlauf des Temperaturgradienten in den untersten Luftschichten (vergleiche Kapitel 3. 2. 2). Eine Erklärung ergibt sich durch die genaue Betrachtung der Standpunktumgebung und aus Beobachtungen von Herrn Stix (Beobachter auf Standpunkt 4).

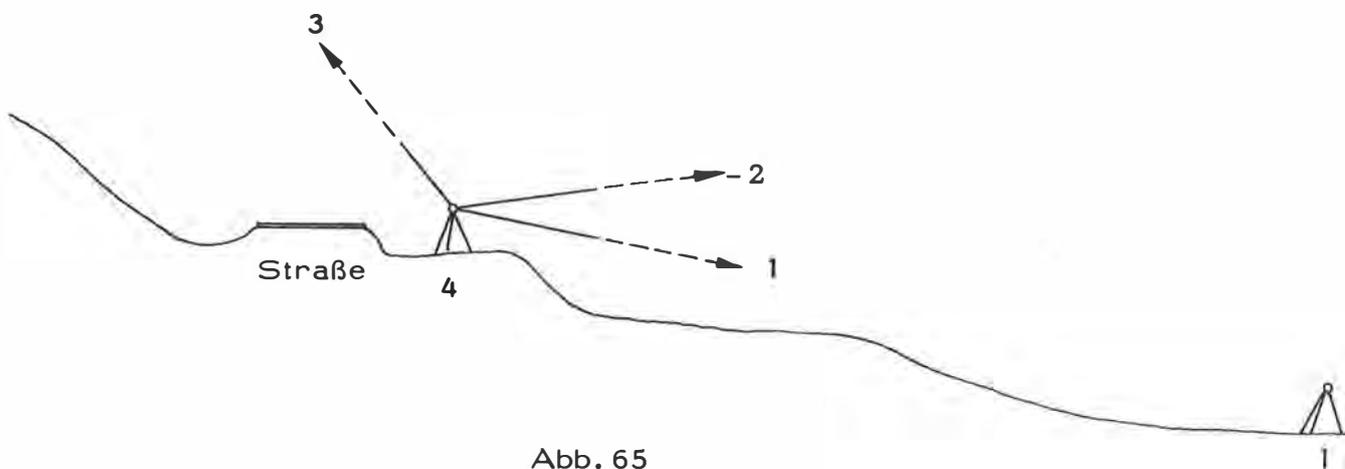


Abb. 65

Zunächst bemerkte Herr Stix bei einer Routinekontrolle der Instrumentenhöhe mit dem Nivellier zufällig, daß er nicht mehr über die in etwa zwei Drittel Stativhöhe vorbeiführende Straße sehen konnte. Dies ist eine bekannte Erscheinung auf sonnenbeschienenen Asphaltstraßen und weist auf die mit stark negativem Temperaturgradienten verbundene negative Strahlkrümmung hin. Diese ganze Luftplatte negativer Brechung dürfte durch die Abschüssigkeit der Straße und leichtem Wind aus SW von der Straße abgerutscht sein. Dabei blieb sie aber einige Zeit über jenen Luftschichten liegen, die für die Strahlbrechung von 4 nach 1 entscheidend waren.

Bedenkt man die enorme Differenz der Refraktionsbeträge von 6^h früh und 12^h mittags, nämlich fast 30^{CC}, so wird wieder einmal klar, mit welcher beunruhigender Unsicherheit eine konventionelle trigonometrische Höhenmessung auch bei kurzen Visuren (1,4 km) behaftet ist!

Ungefähr gleich große Refraktionswinkel an beiden Enden einer Visur, wie sie die Theorie der gegenseitig-gleichzeitig gemessenen Zenitdistanzen postuliert, stellen sich eigentlich nur nachts ein (siehe Tab. 31).

4.4.4.8 DIE ELLIPSOIDISCHEN HÖHENUNTERSCHIEDE IM VERTIKALEN VIERECK HOHE WAND

Durch Anbringung der Refraktionswinkel δ_{ik} und der Lotabweichungskomponenten ε_{ik} nach 4.1.4 an die gemessenen Zenitdistanzen ζ_{ik}^* oder durch direkte Berechnung gemäß 4.2 erhalten wir die refraktionsfreien ellipsoidischen Zenitdistanzen z_{ik} . *) Die bei der Berechnung nach 4.2 eingehenden ellipsoidischen Zentriwinkel σ_{ik} sind nach (3, 57):

σ_{12}	=	98, ^{CC} 48	σ_{23}	=	229, ^{CC} 45
σ_{13}	=	130, 97	σ_{24}	=	139, 02
σ_{14}	=	40, 54	σ_{34}	=	90, 43

Tab. 32

refraktionsfreie ellipsoidische Zenitdistanzen z_{ik} :

z_{12}	=	87, ^g 61694
z_{21}	=	112, 39291
z_{13}	=	77, 79098
z_{31}	=	122, 22212
z_{14}	=	94, 07843
z_{41}	=	105, 92562
z_{23}	=	92, 21529
z_{32}	=	107, 80766
z_{24}	=	107, 13297
z_{42}	=	92, 88093
z_{34}	=	128, 76004
z_{43}	=	71, 24901

Tab. 33

*) Anm.: Minimale Differenzen ($\neq 0, 1^{CC}$) zwischen den Ergebnissen der beiden Berechnungsarten sind in den Verkantungen der Normal-schnittsebenen begründet.

Mit den z_{ik} aus Tab. 33 und den d_{ik} aus Tab. 26 ergeben sich schließlich nach (2, 12) und $k = 0$ die widerspruchsfreien (siehe 4. 1. 4) ellipsoidischen Höhenunterschiede Δh_{ik} :

$\Delta h_{12} = -\Delta h_{21} = +194,7234 \text{ m}$	$\pm 4,0 \text{ mm}$
$\Delta h_{13} = -\Delta h_{31} = +478,0372 \text{ m}$	$\pm 4,4 \text{ mm}$
$\Delta h_{14} = -\Delta h_{41} = +37,9504 \text{ m}$	$\pm 0,7 \text{ mm}$
$\Delta h_{23} = -\Delta h_{32} = +283,3138 \text{ m}$	$\pm 7,6 \text{ mm}$
$\Delta h_{24} = -\Delta h_{42} = -156,7730 \text{ m}$	$\pm 4,2 \text{ mm}$
$\Delta h_{34} = -\Delta h_{43} = -440,0868 \text{ m}$	$\pm 4,1 \text{ mm}$

Tab. 34

Die mittleren Fehler $m_{\Delta h}$ werden aus (4, 29)^{*)} gewonnen; die Beträge bleiben trotz der großen Höhenunterschiede deutlich unter 1 cm. Damit ist die Genauigkeit sogar höher als jene, die man von einem Nivellement über derartige Höhenstufen erwarten kann.

*) Anm. : Matrizen $A_{\Delta h}$, $S_{\Delta h \Delta h}$ im Anhang S. 187, 188

4.4.4.9 DIE NIVELLITISCHEN HÖHENUNTERSCHIEDE IM VERTIKALEN VIERECK HOHE WAND

Durch Kombination der ellipsoidischen Höhenunterschiede Δh_{ik} aus Tab. 34 mit den Differenzen $\Delta N_{ik}^!$ der Niveauflächenundulationen aus Tab. 30 nach dem Theorem von Villarceau (1, 2) können auch die nivellitischen (nichtorthometrischen!) Höhenunterschiede ΔH_{ik} angegeben werden:

ΔH_{12}	=	$-\Delta H_{21}$	=	+ 194,7764 m
ΔH_{13}	=	$-\Delta H_{31}$	=	+ 477,9461 m
ΔH_{14}	=	$-\Delta H_{41}$	=	+ 37,9248 m
ΔH_{23}	=	$-\Delta H_{32}$	=	+ 283,1697 m
ΔH_{24}	=	$-\Delta H_{42}$	=	- 156,8516 m
ΔH_{34}	=	$-\Delta H_{43}$	=	- 440,0213 m

Tab. 35

Die Nivellementhöhen (genäherte Meereshöhen) der Punkte 1, 2, 3, 4 sind Tab. 36 zu entnehmen. Der Nivellementabschluß erfolgte über die Punkte 1 und 4 an einen Punkt des staatlichen Präzisionsnivellements am Mauthaus der Hohen Wand Straße. Vergleichswerte für die Höhen stammen aus Präzisionsnivellements (Punkt 2: Rosenthaler, Punkt 3: Studenten des Institutes für Landesvermessung) und einem umfangreichen Zenitdistanzausgleich (ohne Lotabweichungsreduktion) des Instituts für Landesvermessung (Punkt 3) im Testnetz "Neue Welt" und des BAfEuV (Punkt 2).

Punkt	V4	Höhe [m] aus	
		Präz. Niv.	Z. D. Ausgl.
1	447,9480	447,9480	-
2	642,7244	642,7326	642,712
3	925,8941	925,8355 ^{*)}	925,891
4	485,8728	485,8728	-

Tab. 36

*) Anm. : Die große Differenz zum Ergebnis des studentischen Präzisionsnivelements kann nur durch Wiederholung dieses Nivelements geklärt werden.

4.5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Durch Weiterentwicklung der Sanchez'schen Meßanordnung zu einem vertikalen Diagonalviereck und die Bestimmung des ellipsoidischen Höhenunterschieds Δh_{14} im Tal mittels Präzisionsnivelements und astronomischen Nivelements konnte die einfache Unterbestimmung des Formelapparates von Sanchez behoben und gleichzeitig eine Kontrolle für die Distanzmessungen geschaffen werden. Damit wurde erreicht, daß die Einführung fragwürdiger Bedingungen (siehe 3.2.6.4) vermieden werden und den berechneten Refraktionswinkeln streng abgeleitete mittlere Fehler zugeordnet werden konnten. Trotz der kleinen Refraktionsbeträge wegen der geringen Punktentfernungen ($d < 3\text{km}$) wurde in einem praktischen Beispiel (vertikales Viereck "Hohe Wand") mit dem beschriebenen Verfahren eine Genauigkeit von durchschnittlich $\pm 3^{\text{CC}}$ während 24 Stunden erzielt. Nur zu den Zeiten der raschesten Refraktionsänderung frühmorgens und spätnachmittags verschlechterten sich die mittleren Fehler wegen der endlichen Dauer (20 Minuten) der Zenitdistanzbeobachtungen. Die starke Szintillation der beleuchteten Ziele während der Nachtstunden schlug sich nicht in den mittleren Fehlern nieder, was nur ein neuerlicher Beweis für das ungeheure Integrationsvermögen des menschlichen Auges ist!*)

Die Genauigkeit der abgeleiteten ellipsoidischen Höhenunterschiede (im Maximum 480 m) ergab sich besser als $\pm 1\text{cm}$. Das Verfahren eignet sich daher besonders gut zur Verbindung von Talnivelements mit flächenhaften Gipfelnetzen in den Alpen. Gerade der Übergang von der Talsohle zu den Gipfeln ist ja laut Untersuchungen von Zeger (1978) im bestehenden Triangulationsnetz mangelhaft. Da für diese Zwecke die

*) Anm.: Die Dispersionsverfahren zur Refraktionswinkelmessung unterliegen einer bisher noch nicht überwundenen Genauigkeitsschranke von $\pm 4^{\text{CC}}$ wegen der Szintillation (Williams, 1981).

diskreten Beträge der Refraktionswinkel nicht von Interesse sind, würden zur genauen Festlegung der Höhenunterschiede nur die Präzisionsdistanzmessungen, die astronomischen Beobachtungen und das Präzisionsnivelement im Tal ausreichen. Die Lotabweichungen könnten dann überdies für das österreichische Geoidprojekt verwendet werden. Für Vergleichszwecke mit meteorologischen Refraktionsmodellen ist der zusätzliche große Aufwand an vier Meßpartien zur simultanen Zenitdistanzbeobachtung sicherlich gerechtfertigt, zumal eine nivellitische Kontrolle schwer durchführbar, unsicher (systematische Refraktionsfehler bei steilen Nivelementlinien) und gleichermaßen kostspielig ist.

Bis zur serienmäßigen instrumentellen Lösung des Refraktionsproblems auf Dispersionsbasis kann jedenfalls die "Methode des vertikalen Vierecks" bei großen Höhenunterschieden voraussetzungsfreie Refraktionswinkel mit hoher Genauigkeit liefern.

ANHANG:

Matrix A_{δ}

-1.56539	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.14534	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	0.00000	0.50000	
1.56539	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.14534	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	0.00000	0.50000	
1.56539	0.00000	0.00000	0.00000	-5.49619	-5.41590	5.47744	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	0.00000	0.50000	
-1.56539	0.00000	-1.34372	1.95357	5.49619	5.41590	-7.37762	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-1.00000	0.50000	0.00000	0.00000	-0.50000	
-1.56539	4.41391	-4.44170	0.00000	0.00000	-4.01391	0.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	0.00000	0.50000	
1.56539	-4.41391	4.44170	0.00000	0.00000	4.01391	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	1.00000	-0.50000	
1.56539	-5.17216	4.44170	0.83684	-0.88071	4.01391	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	1.00000	-0.50000	
1.56539	-6.15910	6.12665	0.00000	0.00000	5.81323	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000	-0.50000	0.00000	1.00000	-0.50000	
1.56539	-6.39488	4.44170	2.02836	-1.92733	4.01391	0.00000	-1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.50000	0.00000	0.00000	-0.50000	
-1.56539	6.39488	-4.44170	-2.02836	1.92733	-4.01391	0.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.50000	-1.00000	0.00000	0.50000	
-1.56539	6.39488	-4.44170	-2.02836	-0.21040	-6.24315	2.13261	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.50000	-1.00000	0.00000	0.50000	
-1.56539	6.39488	-5.29097	-1.22468	-0.21040	-6.24315	1.46462	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.50000	-1.00000	0.00000	0.50000	

Matrix $S_{\delta\delta}$
(12¹⁵)

2.44483	-0.83703	-0.84973	0.84299	1.23989	-1.05989	-1.06523
-1.06099	-1.25343	1.07343	1.06774	1.06527		
-0.83703	2.44483	1.24753	-1.24079	-0.84209	1.02209	1.02743
1.02319	0.85563	-1.03563	-1.02994	-1.02747		
-0.84973	1.24753	6.37349	-3.44487	-2.40690	2.58690	5.51801
3.16667	4.60463	-4.78463	-3.70298	-3.50604		
0.84299	-1.24079	-3.44487	8.97502	5.50137	-5.68137	-5.00112
-7.45182	-3.91484	3.99484	3.12802	4.98217		
1.23989	-0.84209	-2.40690	5.50137	8.26507	-4.47507	-3.99918
-5.77232	-3.47596	3.29596	2.67989	4.00973		
-1.05989	1.02209	2.58690	-5.68137	-4.47507	5.65507	4.21918
5.99232	3.29596	-3.47596	-2.85989	-4.18973		
-1.06523	1.02743	3.51802	-5.00112	-3.99918	4.21918	5.13149
5.32710	4.60943	-4.78943	-3.80661	-4.46503		
-1.06099	1.02319	3.16667	-7.45182	-5.77232	5.99232	5.32710
10.67360	4.12398	-4.30398	-3.46130	-5.30178		
-1.25343	0.85563	4.60463	-3.81484	-3.47596	3.29596	4.60943
4.12398	12.33980	-6.39980	-4.91727	-4.62757		
1.07343	-1.03563	-4.78463	3.99484	3.29596	-3.47596	-4.78943
-4.30398	-6.39980	9.03980	6.11727	5.82757		
1.06774	-1.02994	-3.70298	3.12802	2.67989	-2.85989	-3.80661
-3.46130	-4.91727	6.11727	5.42069	4.84954		
1.06527	-1.02747	-3.50604	4.98217	4.00973	-4.18973	-4.46503
-5.30178	-4.62758	5.82758	4.84954	5.50524		

Matrix $A_{\Delta h}$

1.00000 -0.31941	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.31941
-1.00000 0.31941	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.31941
-3.42947 1.09541	0.00000	0.00000	0.00000	12.04110	11.96520	%-11.88840	1.0954
2.23056 -0.71246	0.00000	3.07070	-2.78368	-7.83163	-7.71722	10.51250	-0.71246
3.23057 -1.03188	-3.77645	9.16656	0.00000	0.00000	8.28371	0.00000	-1.03188
-3.23057 1.03188	8.77624	-9.16656	0.00000	0.00000	-8.28371	0.00000	1.03188
-5.66017 91 1.80791	18.70160	%-16.06040	-3.14819	3.18449	%-14.51360	0.00000	1.80791
-2.23056 0.71246	3.77623	-9.16654	0.00000	0.00000	-8.28346	0.00000	0.71246
-2.42945 0.77599	9.92473	-6.89343	-3.14797	3.18446	-6.22951	0.00000	0.77599
2.42945 -0.77599	-9.92473	6.89343	3.14797	-3.18462	6.22951	0.00000	-0.77599
3.42947 -1.09541	%-14.01000	9.73092	4.44375	0.46095	13.67760	-4.89350	-1.0954
5.66017 -1.80791	%-23.12270	19.13120	4.55018	0.76077	22.57410	-5.29580	-1.80791

Matrix $S_{\Delta h \Delta h}$

0.50367	-0.50367	-1.72732	1.12346	1.62714	-1.62714	-2.85085	-1.12346
-1.22364	1.22364	1.72732	2.85085				
-0.50367	0.50367	1.72732	-1.12346	-1.62714	1.62714	2.85085	1.12346
1.22364	-1.22364	-1.72732	-2.85085				
-1.72732	1.72732	19.10920	%-11.02920	%-12.57050	12.57050	29.74290	10.84320
17.17140	%-17.17150	%-18.81230	%-29.64890				
1.12346	-1.12346	%-11.02920	16.90600	17.83410	%-17.83400	%-27.51880	%-16.71050
-9.68434	9.68441	10.71680	27.42090				
1.62714	-1.62714	%-12.57050	17.83410	19.60980	%-19.60970	%-30.72130	%-17.98250
%-11.11100	11.11110	12.80730	30.79660				
-1.62714	1.62714	12.57050	%-17.83400	%-19.60970	19.60960	30.72110	17.93250
11.11100	%-11.11100	%-12.80720	%-30.79650				
-2.85085	2.85085	29.74290	%-27.51830	%-30.72130	30.72110	58.01150	27.87030
27.28890	%-27.28920	%-30.30350	%-58.18870				
-1.12346	1.12346	10.84320	%-16.71050	%-17.98250	17.98250	27.87030	16.95900
9.88734	-9.88742	%-11.07990	%-27.94560				
-1.22364	1.22364	17.17140	-9.68434	%-11.11100	11.11100	27.28890	9.00710
16.17710	%-16.17720	%-17.49540	%-27.39080				
1.22364	-1.22364	%-17.17150	9.68441	11.11110	%-11.11100	%-27.28910	-9.9742
%-16.17720	16.17740	17.49550	27.39100				
1.72732	-1.72732	%-18.81230	10.71680	12.80730	%-12.80720	%-30.30350	%-11.07990
%-17.49540	17.49550	19.39180	30.48600				
2.85085	-2.85085	%-29.64880	27.42090	30.79660	%-30.79650	%-58.18870	%-27.94560
%-27.39080	27.32100	30.48600	58.45310				

LITERATURVERZEICHNIS

- BAHNERT, G.: Möglichkeiten und Grenzen der trigonometrischen Höhenmessung, Arb. a. d. Verm. -u. Kartenwesen d. DDR, Bände 24 und 25; Leipzig, 1970
- BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band 5, (Variationsrechnung); Leipzig, 1943
- BEST, A. C.: Temperature and humidity gradients in the first 100 m over South-East-England, Geophysical Memoirs No. 89; London, 1952
- BOMFORD, G.: Geodesy; Oxford, 1980
- BRANDSTÄTTER, G.: Die Höhe des Großglockners, Geow. Mitteilungen, et alii Heft 18; Wien, 1981
- BREIN, R.: Die Bestimmung der atmosphärischen Refraktion aus der Dispersion des Lichtes, DGK, Reihe B, Nr. 165; Frankfurt, 1968
- BRETTNERBAUER, K.: Skriptum zur Vorlesung "Höhere Geodäsie"; Wien, 1976
- BRETTNERBAUER, K.: Über mögliche Refraktionsanomalien infolge von Schichtneigungen, ÖZfVuPh; Wien, 1965
- BROCKS, K.: Über die vertikale Luftdichtezunahme in Bodennähe, Meteorol. Rundschau, Heft 7/8; Berlin, 1949
- BROCKS, K.: Vertikaler Temperaturgradient und terrestrische Refraktion insbesondere im Hochgebirge, Veröffentlichung d. Inst. f. Meteorologie d. Univ. Berlin, 1939
- BRUCKMÜLLER, R.: Testnetz Neue Welt, Geow. Mitteilungen Nr. 15; KORSCHINECK, E. Wien, 1979
- BRUNNER, F.: Beiträge zum trigonometrischen Nivellement im Gebirge, Dissertation; TH Wien, 1972
- DRAHEIM, H.: Tellurometermessungen in Australien, Frankreich und Kanada, AVN Nr. 8; Karlsruhe, 1963
- DUFOUR, H. N.: Etude générale de la correction angulaire finie (réduction à la corde) pour une courbe quelconque tracée sur le plan ou sur la sphère, Bull. Géod. No. 25; Paris 1952
- FINSTERWALDER, R.: Die Bestimmung von Lotabweichungen aus der trigonometrischen Höhenmessung, ZfV; Stuttgart, 1937
- GERTHSEN, Chr.: Physik; Berlin, 1971
- KNESER, H. O.

- GLEINSVIK, P.: Studien über die Ermittlung der Geoidform und die Bestimmung von Meereshöhen aus Höhenwinkeln, Mitteilungen der geod. Inst. d.ETH, Zürich, Nr. 7, 1960
- GLISSMANN, T.: Ein Koinzidenzverfahren zur Messung von refraktionsfreien Richtungen, ZfV, Jg. 103; Stuttgart, 1978
- HEISKANEN, W.A.: Physical Geodesy; San Francisco 1967
- MORITZ, H.
- HELMERT, F.R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie (Bände I und II); Leipzig, 1880
- HOFMANN, W.: Studien zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge, Ann. d. Bayr. Akademie d. W., Heft 70; München, 1955
- HRADILEK, L.: Mathematische Modelle für die trigonometrische Höhenmessung und die dreidimensionale Triangulation, Mitt. a. d. Inst. f. Theor. Geod. d. Univ. Bonn, Nr. 61, 1980
- HRADILEK, L.: Trigonometric Levelling and Spatial Triangulation in Mountain Regions, Bullet. Géod. No. 87, Paris, 1968
- HRADILEK, L.: Refraction in Trigonometric and Three-Dimensional Terrestrial Networks, The Canadian Surveyor Vol. 26, Ottawa, 1972
- HRADILEK, L.: Höhenbestimmung aus elektrooptisch gemessenen Längen, Studia Geophysica et Geodaetica Nr. 3; Prag, 1958
- HUBENY, K.: Horizontalentfernung und Höhenunterschied aus Schrägstrecken, ÖZfVuPh, Jg. 62, Heft 3; Wien, 1975
- HUGGETT, G.R.: Two-Color Terrameter, Tectonophysics No. 71; Amsterdam, 1981
- IZOTOV, A.A.: Untersuchungen der terrestrischen Refraktion und der PELLINEN, L.P. Methoden der trigonometrischen Höhenmessung; Moskau, 1955
- JORDAN/EGGERT/KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde, Band IV (Mathematische Geodäsie); Stuttgart, 1969
- KEPPKE, U.: Kritische Betrachtungen zur Genauigkeit von Höhenwinkelmessungen in Landesnetzen I. O. unter besonderer Berücksichtigung der terrestrischen Refraktion, DGK, Reihe C, Nr. 115; München, 1968
- KUKKAMÄKI, T. J.: Über die nivellitische Refraktion, Veröffentl. d. Fin. geod. Inst., Nr. 25; Helsinki, 1938
- LEDERSTEGGER, K.: Zur Theorie des geometrischen Nivellements, Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufn.; Berlin, 1941

- LEPUSCHITZ, R. : Praktische Überprüfung und geodätische Anwendung der Turbulenztheorie in der bodennahen Atmosphäre, Dissertation; TU Wien, 1981
- LEVALLOIS, J. J. : Etude sur la refraction géodésique et le MASSON D'AUTUME, G. nivellement barométrique, IGN; Paris 1953
- LEVALLOIS, J. J. : Géodésie Générale, Tome 1; Paris, 1969
- MADER, K. : Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisionsnivelements in den Hohen Tauern, Sonderheft 15 d. ÖZfV; Wien, 1954
- MEIER-HIRMER, B. : Präzisionsstreckenmessung mit dem Mekometer ME3000, AVN Nr. 2; Karlsruhe, 1975
- MITTER, J. : Vorlesungen zur Physik der Atmosphäre; Wien, 1976
- MORITZ, H. : Zur Geometrie der Refraktion, ÖZfVuPh, Jg. 50; Wien, 1962
- NIETHAMMER, T. : Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen; Basel, 1932
- NIETHAMMER, T. : Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard,
Band I, SGK XIX; Basel, 1932
Band II, SGK XX; Brugg, 1939
- PAST, F. : Kritischer Vergleich der Refraktionsformeln für die trigonometrische Höhenmessung und Versuch einer systematischen Ordnung, DGK, Reihe C, Heft 75; München, 1965
- PERNTNER, J. M. : Meteorologische Optik; Wien, 1922
- EXNER, F. M.
- PRILEPIN, M. T. : The Present State and Prospects of Development of High-Precision Geodetic Methods for Studying Recent Crustal Movements, Tectonophysics, No. 71; Amsterdam, 1981
- RAMSAYER, K. : Untersuchung der Genauigkeit eines Raumpolygonzugs, ZfV, Nr. 10; Stuttgart, 1971
- REISSMANN, G. : Die Ausgleichsrechnung; Berlin, 1980
- RINNER, K. : Studie über die Bestimmung der Europäischen Basis für das PAGEOS-Weltnetz, DGK, Reihe B, Nr. 143; München 1967
- ROSENTHALER, J. : Refraktionsuntersuchungen in einem vertikalen Dreieck, Diplomarbeit; TU Wien, 1982

- SANCHEZ, R. N. : Results of Terrestrial Refraction in Mountainous Countries by the Investigation of Vertical Triangles, Sonderheft 25 d. ÖZfVuPh; Wien, 1967
- SANCHEZ, R. N. : Terrestrial Refraction in Mountainous Countries, Official Paper of the Second Symposium of Geodesy in Three Dimensions; Cortina d'Ampezzo, 1962
- SCHMID, H. : Radiosondenaufstiege zur Berechnung des mittleren Brechungsindex der Atmosphäre bei der elektronischen Distanzmessung, Festschrift Löschner, Veröffentl. d. geod. Inst. der TH Aachen, Nr. 23, 1967
- SCHREFL, W. : Bestimmung des integralen Brechungsindex durch
GERSTBACH, G. Befliegung des Meßstrahles, ÖZfVuPh, Jg. 69,
RÖSSLER, W. Heft 3/4; Wien, 1981
- TARDI, B. : Traité de Géodésie, Tome 1; Paris, 1951
- LACLAVERE, G.
- TEGELER, W. : Untersuchungen zur Genauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung im Flachland und Mittelgebirge, wiss. Arbeiten der TU Hannover, Nr. 45, 1971
- TENGSTRÖM, E. : Elimination of Refraction in Vertical Angle Measurements Using Lasers of Different Wavelength, Sonderheft Nr. 25 d. ÖZfVuPh; Wien, 1967
- WALLNÖFER, E. : Einrichtung eines vorgegebenen Algol 60 Programmes an der Cyber 170-720 und Erprobung an zwei Institutsprojekten, Diplomarbeit; TU Wien, 1983
- WILLIAMS, D. C. : Performance Test of a Two Colour Instrument for Measuring Angular Refraction, Official Paper 514. 2, XVI. FIG-Congress; Montreux, 1981
- WILLIAMS, D. C. : A Coincidence Procedure for the Measurement of Refraction-free Directions, ZfV, Jg. 103; Stuttgart, 1978
- WOLF, H. : Ausgleichsrechnung II; Bonn, 1979
- WUNDERLICH, T. : Vorstudie zur Methode des Vertikalen Dreiecks (unveröffentlicht); Wien 1980
- WUNDERLICH, T. : Messung und Berechnung eines Raumpolygonzugs im Testnetz Wien, Diplomarbeit; TU Wien, 1979
- WUNDERLIN, N. : Algol-Programm TGREFR Modellatmosphäre und Refraktion, Mitt. d. geod. ETH Zürich, Nr. 26, 1979
- WUTZEL, O. : Bestimmung der Nullpunktskonstanten des Tellurometers MA100, Diplomarbeit; TH Wien, 1974

ZEGER, J.: Untersuchung über trigonometrische Höhenmessung und die Horizontierung von schräg gemessenen Strecken, Sonderheft 33 d. ÖZfVuPh; Wien 1978

Operator's Manual for the Tellurometer MA 100

Operator's Manual for the Mekometer ME3000

Bisher erschienen:

- Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1970 - 1973, Dezember 1973.
- Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendung im Vermessungswesen, 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English, Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.
- Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1973 - 1974, September 1974.
- Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Tektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.
- Heft 5 K. LEDERSTEGER, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.
- Heft 6 F. REICHHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von $+ 30^{\circ}$ bis $+ 60^{\circ}$, Oktober 1975.
- Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.
- Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.
- Heft 9 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie und Reproduktionstechnik, W. PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.
- Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC-100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik, Wien, Mai 1976.
- Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1974 - 1976, November 1976.
- Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1977.
- Heft 13 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr.h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.

- Heft 14 L. MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.
- Heft 15 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Bavir, Wien, Januar 1979.
- Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1976 - 1979, Wien, November 1979.
- Heft 17 E. VOZIKIS, Die photographische Differentialumbildung gekrümmter Flächen mit Beispielen aus der Architekturbildmessung, Wien, Dezember 1979.
- Heft 18 Veröffentlichung des Instituts für Allgemeine Geodäsie anlässlich des 75. Geburtstages von Prof. Dipl. Ing. Dr. F. Hauer, Die Höhe des Großglockners, Wien 1981.
- Heft 19 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie, H. KAGER, Bündeltriangulation mit indirekt beobachteten Kreiszentren, Wien, April 1981.
- Heft 20 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1980, Wien, Mai 1982.
- Heft 21 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie anlässlich des 70. Geburtstages von Prof. Dr. Wolfgang Pillewizer: Glaziologie und Kartographie, Wien, Dezember 1982.
- Heft 22 K. TEMPFLI, Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle mittels Spektralanalyse, Wien, Mai 1982.
- Heft 23 E. CSAPLOVICS, Interpretation von Farbinfrarotbildern, Wien, November 1982
- Heft 24 J. JANSKA, Rektifizierung von Multispektral-Scanneraufnahmen - Entwicklung und Erprobung eines EDV-Programmes Wien, Mai 1983
- Heft 25 Zusammenfassungen der Diplomarbeiten, Dissertationen und Habilitationen an den geodätischen Instituten der TU Wien, Wien, November 1984

LEBENS LAUF

1. 5. 1955 geboren in Wien als Sohn des o. Univ. Prof. Dr. techn. Walter Wunderlich und seiner Gattin Johanna, geb. Hrudka
- 1961 - 1965 Volksschule in Wien VIII, Albertgasse
- 1965 - 1973 Bundesrealgymnasium in Wien XVII, Geblergasse
8. 6. 1973 Reifeprüfung mit Auszeichnung
1. 10. 1973 - 31. 5. 1974 Ableistung des Wehrdienstes in den Kasernen Götzendorf und Langenlebar
4. 10. 1974 Immatrikulation an der TU Wien, Inskription der Studienrichtung "Vermessungswesen"
11. 6. 1976 Anstellung als halbbeschäftigter Studienassistent am Institut für Allgemeine Geodäsie (Vorstand: Prof. Hauer)
20. 4. 1977 1. Diplomprüfung bestanden
1. 12. 1977 Erweiterung des Anstellungsausmaßes auf ganztägig
3. 12. 1979 2. Diplomprüfung mit Auszeichnung
1. 1. 1980 Anstellung als Universitätsassistent am Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abteilung Ingenieurgeodäsie (Vorstand: Prof. Brandstätter)
31. 5. 1983 Rigorosum mit Auszeichnung
27. 6. 1983 Promotion zum Doktor der technischen Wissenschaften