

Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

**GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN**

Heft 22

**Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle
mittels Spektralanalyse**

von
K. TEMPFLI

Veröffentlichungen des Institutes für Photogrammetrie

Geowiss. Mitt.
22, 1982

Wien, im Mai 1982

**Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien**

**GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN**

Heft 22

**Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle
mittels Spektralanalyse**

**von
K. TEMPFLI**

Veröffentlichungen des Institutes für Photogrammetrie

**Geowiss. Mitt.
22, 1982**

Wien, im Mai 1982

Herausgeber und Verleger: o.Prof.Dr.-Ing.K.Kraus
Vorstand des Instituts für Photogrammetrie
der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29

Die Kosten für den Druck wurden aus der ordentlichen Dotation und aus
eigenen Einnahmen des Instituts für Photogrammetrie der TU Wien getragen.

Einband: Fa. F. Manhardt, Wien
Druck: ÖHTUW - Vervielfältigung, Wien
Auflage: 300 Stück

KURZFASSUNG

Ein digitales Höhenmodell als Darstellung einer Gelände- oder irgendeiner anderen Oberfläche in Form von digitalisierten Werten und einer Vorschrift zur Rückgewinnung einer kontinuierlichen Flächenbeschreibung wirft die Frage nach seiner Darstellungsgenauigkeit auf. Die Antwort auf diese Frage ist einerseits für die Planung der Datenerfassung und -verarbeitung und andererseits für Qualitätsausagen über die Folgeprodukte eines digitalen Höhenmodells von Interesse.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Genauigkeitskontrolle basierend auf der Konzeption der Spektralanalyse für äquidistante Digitalisierung von Profilen und Flächen untersucht. Die Zusammenhänge zwischen der Genauigkeit des digitalen Höhenmodells und den geometrischen Eigenschaften der Oberfläche, dem Intervall, in dem die Höhen gemessen werden, einem zufälligen Meßfehler sowie der Rekonstruktionsvorschrift werden theoretisch ausgeführt. Die einfachen Schätzformeln, die Abtastintervall und Rekonstruktionsvorschrift mittels Übertragungsfunktion und die Eigenschaften der Oberfläche sowie des Meßfehlers als Spektrum berücksichtigen, werden experimentell an synthetischen Daten überprüft. Infolge der Kenntnis sowohl des vollständigen Verlaufs der Testprofile und -flächen als auch der überlagerten Höhenmeßfehler, können die geschätzten Genauigkeitswerte den tatsächlichen Werten gegenübergestellt werden. Durch Variation aller Einflußfaktoren ist eine empirische Beurteilung des Verfahrens sowie eine anschauliche Ergänzung der Theorie möglich.

Die Genauigkeit eines digitalen Höhenmodells hängt entscheidend von der Größe des Abtastintervalls in Relation zur Oberflächenvariation ab; im Vergleich dazu kommt der Rekonstruktionsvorschrift nur eine untergeordnete Bedeutung zu. Praktikable Regeln zur Abschätzung dieser Einflüsse und auch der Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers in Abhängigkeit von der Rekonstruktionsvorschrift sind angegeben. Für die praktische Durchführung sind weiters die festgestellten Anzeichen interessant, daß eine Profilanalyse gültige Schlüsse auf die Genauigkeit der Flächendarstellung zuläßt. Die Anwendung der Genauigkeitsschätzung für Planungsaufgaben sowie zur Beurteilung von Folgeprodukten ist umrissen und sie ist in eine Betrachtungsweise eingebettet, die auch anderweitige Qualitätsaussagen gestattet.

ABSTRACT

A digital elevation model represents a topographic or other surface in terms of sampled values, and includes a rule for regaining a continuous description of the surface. Estimation of the quality of this representation is important for planning the sampling and reconstruction and also for evaluating the accuracy of products derived from the digital elevation model.

The investigated approach towards accuracy assessment is based on the concept of spectral analysis. The influence of sampling density and the method of reconstruction on the accuracy of the digital elevation model is characterized by the transfer function; the properties of the surface and the measuring error are described by the respective amplitude spectra. The derived estimation formulae are applied to artificial, computer-generated data. Knowing the entire test surfaces and test profiles as well as the superimposed measuring errors, it is possible to compare the estimates with the actual accuracy of the representation. By varying all influencing factors, an empirical evaluation and demonstration of the procedure is reached.

The accuracy of a digital elevation model essentially depends on the size of the sampling interval in relation to the variability of the surface; in comparison the method of reconstruction is of less significance. These influences and those arising from the effect of a random error can be assessed simply and quickly. The results of the investigation have furthermore indicated that profile analyses allow estimating the accuracy of the surface representation. Application of the estimation procedure for planning purposes and evaluating products derived from the digital elevation model is outlined. In addition to assessing the accuracy, the spectral approach permits the determination of other - more differentiating - measured for the quality of a digital elevation model.

VORWORT

Die vorliegende Arbeit wurde am International Institute for Aerial Survey and Earth Sciences (ITC) auf Anregung von Herrn Prof. Dr. B. Makarovič ausgeführt und stellt eine Fortsetzung seiner Arbeiten auf dem Gebiet des digitalen Höhenmodells dar. Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. B. Makarovič für seine Unterstützung und die wertvollen Hinweise.

Auch möchte ich meinen Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Kraus für die bereitwillige Übernahme des Referats und seine Hilfe bei der Darstellung der Abhandlung sowie Herrn Prof. Dr. G. Brandstätter für die Bereitschaft, das Koreferat auf sich zu nehmen, aussprechen.*) Herrn Ir. B. Kunji danke ich für die Bereitstellung des Algorithmus zur Erzeugung synthetischer Geländeoberflächen und seines Schichtlinienprogramms, Herrn R.X. Portier für die Entwicklung von Zeichenprogrammen und all jenen, die in irgendeiner Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

*) Diese Arbeit wird bei der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Technischen Universität Wien zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Technischen Wissenschaften eingereicht.

INHALTVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	1
2. THEORETISCHER ANSATZ	3
2.1. Genauigkeit einer Profildarstellung	
2.1.1. Abtasten und Rekonstruktion	3
2.1.2. Varianzschätzung	7
2.1.3. Übertragungsfunktion	14
2.1.4. Leistungsspektrum	19
2.1.5. Beispiel	21
2.1.6. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des Abtast- und Rekonstruktionsfehlers	22
2.1.7. Zweistufige Rekonstruktion	24
2.2. Genauigkeit einer Flächendarstellung	
2.2.1. Varianzschätzung	27
2.2.2. Übertragungsfunktion	33
2.2.3. Leistungsspektrum	35
2.2.4. Beispiel	38
3. EMPIRISCHE UNTERSUCHUNG	40
3.1. Testdaten	
3.1.1. Gelände	41
3.1.2. Rekonstruktionsverfahren	49
3.2. Beschreibung der Experimente	
3.2.1. Zweidimensionaler Fall	59
3.2.2. Dreidimensionaler Fall	61
3.3. Ergebnisse des zweidimensionalen Falls	
3.3.1. Abtast- und Rekonstruktionsfehler	62
3.3.2. Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers	63
3.3.3. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des Abtast- und Rekonstruktionsfehlers	64
3.3.4. Einfluß der Abtastintervallgröße zur Spektrumbestimmung	64
3.4. Ergebnisse des dreidimensionalen Falls	
3.4.1. Abtast- und Rekonstruktionsfehler	72
3.4.2. Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers	72
3.4.3. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des Abtast- und Rekonstruktionsfehlers	76
3.4.4. Vergleich mit den Resultaten des zweidimensionalen Falls	76

	Seite
4. ANALYSE DER ERGEBNISSE	77
4.1. Einflußfaktoren der Genauigkeit eines DHM	
4.1.1. Abtastdichte	77
4.1.2. Rekonstruktionsverfahren	79
4.1.3. Meßfehler	80
4.2. Genauigkeit der Schätzung	
4.2.1. Schätzung des Abtast- und Rekonstruktionsfehlers	81
4.2.2. Schätzung der Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers	84
5. ANWENDUNG DER GENAUIGKEITSSCHÄTZUNG	85
5.1. Genauigkeit eines DHM und davon abgeleiteter Größen	
5.1.1. Genauigkeit eines bestehenden DHM	85
5.1.2. Genauigkeit vom DHM abgeleiteter Größen	91
5.2. Planung eines DHM	94
5.2.1. Spektrum aus einem gemessenen Profil	96
5.2.2. Geländeklassifizierung	99
6. SCHLUSS UND AUSBLICK	100
7. LITERATURVERZEICHNIS	103
Anhang 1 Rekonstruktion als Faltung	
2 Faltungstheorem	
3 Replik des Spektrums durch Abtasten	
4 Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers, im Ortsbereich	
5 AR-Fehler bei einer zweistufigen Rekonstruktion	
6 Übertragungsfunktion für bilineare Interpolation	
7 Mittlerer Fehler eines aus dem DHM gerechneten Volumens	

VERZEICHNIS DER ABKÜRZUNGEN

DHM	Digitales Höhenmodell
AR	Abtasten und Rekonstruktion
RV	Rekonstruktionsvorschrift
IM	Interpolationsmethode
ZR	Zweistufige Rekonstruktion
OB	Ortsbereich
FB	Frequenzbereich
SF	Systemfunktion
ÜF	Übertragungsfunktion
DFT	Diskrete Fourier Transformation
FFT	Fast Fourier Transform
LI	Lineare Interpolation
KI	Kubische Interpolation
KQ	Interpolation nach kleinsten Quadraten
KF	Interpolation nach kleinsten Quadraten mit Filterung
GM	Gleitendes Mittel
BLI	Bilineare Interpolation
BKI	Bikubische Interpolation
BKQ	Interpolation nach kleinsten Quadraten einer Funktion zweier Variablen
Phi	Photogrammetria
Phot.Eng.	Photogrammetric Engineering & Remote Sensing
ZfV	Zeitschrift für Vermessungswesen

1. EINLEITUNG

Begünstigt durch den hohen Entwicklungsstand der digitalen Technologie, vor allem in der Photogrammetrie und Kartographie, haben digitale Höhenmodelle zur Darstellung von (Gelände)oberflächen mittlerweile weitgehendes Interesse gefunden. Digitale Höhenmodelle (DHM) werden nicht nur zur Herstellung von Orthophotos, zur automatischen Schichtlinienzeichnung, zur Kartierung der Neigungsverhältnisse, zu Optimalisierungszwecken für ein breites Spektrum von Bauvorhaben und anderen Planungsaufgaben verwendet, sondern bilden ein Grundelement eines übergeordneten geographischen Informationssystems.

Arbeiten auf dem Gebiet DHM haben sich in den letzten Jahren auf die Methodenentwicklung und -erprobung in den Bereichen Datenerfassung und Datenverarbeitung konzentriert. Obgleich die Entwicklung in diesen Bereichen noch keineswegs abgeschlossen ist, so ist doch der dritte Aspekt eines DHM, die Qualitätsbeurteilung, das offene Problem in der praktischen Anwendung. Wie gut wirdt die Geländeoberfläche durch das DHM beschrieben? Die Antwort auf die Frage ist aus zweierlei Gesichtspunkten von Interesse: Für die Planung eines DHM (Punktabstand und Meßgenauigkeit bei der Geländeaufnahme) und für Genauigkeitsaussagen über Produkte, die aus dem DHM abgeleitet werden (z.B. Orthophotos, Schichtlinienpläne, Volumenangaben).

Dem zentralen Problem, nämlich der Beurteilung der Genauigkeit eines DHM, ist diese Arbeit gewidmet. Die Zielsetzung ist, ein Verfahren auszuarbeiten, mit dem die Zusammenhänge und Abhängigkeiten verdeutlicht werden können, die die Genauigkeit eines DHM beeinflussen. An ein Verfahren zur Qualitätsbeurteilung lassen sich die folgenden Anforderungen stellen:

- Minimum an vereinfachenden Annahmen;
- möglichst keine zusätzlichen Messungen;
- keine aufwendige Datenanalyse und
- getrennte Erfassung der verschiedenen Fehlereinflüsse in einem geschlossenen System, wodurch Transparenz und eine gestufte, vielseitige Anwendbarkeit gewährleistet sind.

Nicht alle Wege zur Genauigkeitsschätzung genügen diesen Anforderungen in gleichem Maße. So hat die empirische Vorgehensweise als integrale Genauigkeitsbestimmung aus Kontrollmessungen die Nachteile, daß zusätzlicher Meßaufwand erforderlich und daß eine isolierte Betrachtung der einzelnen Einflußfaktoren nicht möglich ist.

Zwar führt die empirische Vorgehensweise zu Aussagen über ein bestehendes DHM und davon abgeleitete Größen, ist aber zu Planungszwecken kaum geeignet. Experimentellen Untersuchungen scheint jedoch eine große Überzeugungskraft eigen zu sein, wodurch sie eine wertvolle Ergänzung zu theoretischen Untersuchungen sind.

Theoretische Studien wurden bislang überwiegend an Teilaspekten, wie etwa an Interpolationsverfahren, durchgeführt. Die analytische Schätzung der Genauigkeit einer Flächendarstellung mittels des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (2,11) benötigt vereinfachende Modellannahmen über das stochastische Verhalten der Geländeoberfläche. Selbst wenn die Geländeoberfläche stückweise homogen und isotrop wäre und darüber hinaus sich auch noch etwa durch eine exponentielle Kovarianzfunktion beschreiben ließe, so bliebe für die praktische Anwendung noch das Problem einer adäquaten Datenanalyse zur Gebietsbegrenzung. Des Weiteren ist die Fehlerfortpflanzung, die nur zur Bestimmung eines mittleren Fehlers ausgelegt ist, nicht für differenziertere Qualitätsaussagen geeignet.

Wie genau eine Geländeoberfläche durch ein DHM dargestellt wird, hängt im wesentlichen ab von

- den geometrischen Eigenschaften des Geländes;
- dem Abstand zwischen den Punkten, die zur Beschreibung der Oberfläche ausgewählt und koordinatenmäßig bestimmt werden;
- der Bestimmungs- oder Meßgenauigkeit und von
- der Interpolationsmethode.

Die spektrale Betrachtungsweise, die in dieser Arbeit angewendet wird, ermöglicht, die einzelnen Einflußfaktoren getrennt theoretisch zu untersuchen und ein einfaches, für die Praxis brauchbares Verfahren anzugeben, das die Qualitätsbeurteilung eines DHM in verschiedenen Verfeinerungsstufen zuläßt.

Eine zentrale Rolle kommt dabei der Übertragungsfunktion zu, die den Einfluß von Digitalisierung und Interpolation aufzeigt. Die Übertragungsfunktion quantifiziert die Darstellungstreue des DHM (15). Ist die Übertragungsfunktion bekannt und zusätzlich eine spektrale Zerlegung der Geländeoberfläche durchgeführt worden, so ist es möglich, die Genauigkeit eines DHM als mittleren Fehler anzugeben (16). Auch die Eigenschaften eines Meßfehlers lassen sich durch sein Spektrum beschreiben, womit die Auswirkung eines Höhenmeßfehlers auf die Genauigkeit des DHM bestimmt werden kann. Dabei ist es prinzipiell unwesentlich, ob die Datenerfassung direkt (Tachymetrie, APR, Radar, ...) oder indirekt (photogrammetrisch im Stereomodell, Digitalisierung von Schichlinienkarten) ist.

Im Rahmen dieser Arbeit ist es nicht möglich, auf alle Aspekte der Genauigkeits-schätzung im Detail einzugehen. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen ausgearbeitet, wobei eine Beschränkung auf äquidistante Digitalisierung und rein zufällige Meßfehler erfolgt. Obwohl die Konzeption des Verfahrens eine Geländeaufnahme in unregelmäßig verteilten Punkten nicht ausschließt, so ergeben sich - wegen der unendlichen Vielfalt unregelmäßiger Punktanordnungen - Schwierigkeiten für eine allgemeine Untersuchung. Außerdem wird die Spektrumberechnung bei regelmäßig verteilten Punkten wesentlich beschleunigt. Regelmäßige Punktraster gewinnen im Hinblick auf die fortschreitende Automatisierung besonders im mittel- und kleinmaßstäbigen Bereich der Photogrammetrie zunehmende Bedeutung.

Dienen digitale Höhenmodelle im allgemeinen zur Darstellung von Flächen so lassen sich damit selbstverständlich auch Profile beschreiben. Die Betrachtung eines Profils, als zweidimensionaler Fall bezeichnet, statt einer Fläche (dreidimensionaler Fall) hat den Vorteil, daß die herzuleitenden Formeln übersichtlicher sind, graphische Erläuterungen einfacher werden sowie der Rechenaufwand für die Untersuchungen geringer wird. Der Schwerpunkt in dieser Arbeit wird somit auf den zweidimensionalen Fall gelegt; der dreidimensionale Fall wird weitgehend als entsprechende Verallgemeinerung behandelt.

An Hand von tatsächlichen Berechnungen sollen die Möglichkeiten und Beschränkungen der vorgeschlagenen Genauigkeitsschätzung aufgezeigt sowie die angestellten theoretischen Überlegungen mit Zahlen belegt werden, ohne damit Gesetzmäßigkeiten aufstellen zu wollen. Abschließend wird ein Ausblick auf die praktische Anwendung gegeben, differenziert nach der unterschiedlichen Fragestellung bezüglich der Genauigkeit eines vorhandenen DHM und der Planung eines zu schaffenden DHM.

2. THEORETISCHER ANSATZ

2.1. Genauigkeit einer Profildarstellung

2.1.1. Abtasten und Rekonstruktion

Faßt man ein Geländeprofil als ein kontinuierliches Signal $f(x)$ auf, das die Geländehöhen in Funktion der Lagekoordinate x angibt, so entsteht durch die Geländeaufnahme ein diskretes Signal. Um aus der diskreten Geländedarstellung eine kontinuierliche zu erhalten, muß das Signal sozusagen rekonstruiert werden.

Die Rekonstruktionsvorschrift (RV), häufig Interpolationsmethode (IM) genannt, ist - wenn auch austauschbar - ein wesentlicher Bestandteil des DHM. Der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Signal $f(x)$ und dem rekonstruierten Signal $\hat{f}(x)$ wird als Fehler $e(x)$ des DHM bezeichnet. Seine Varianz ist:

$$\sigma^2 = \frac{1}{L} \int_0^L e^2(x) dx \quad ; \quad e(x) = f(x) - \hat{f}(x) \quad (1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß der Mittelwert des DHM-Fehlers auf dem Definitionsbereich $[0, L]$ des Signals Null ist:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e(x) dx = 0$$

Die Geländeaufnahme, also die Bestimmung der Höhe in vorgegebenen Punkten x_l , läßt sich gedanklich in zwei Phasen trennen (Abb. 2.1):

- 1) Diskretisierung des kontinuierlichen Signals $f(x)$, indem man nur die Werte an den Stellen $x=x_l^1)$ betrachtet. Dieser Übergang vom kontinuierlichen Signal $f(x)$ zum diskreten Signal $f_i(x)^1)$ wird Abtasten genannt.
- 2) Messung des diskreten Signals $f_i(x)$. Das Ergebnis ist das digitale Signal $g_i(x)$, das sich aus $f_i(x)$ und dem Meßfehler $m_i(x)$ zusammensetzt. Der Meßfehler kann aus mehreren Komponenten bestehen.

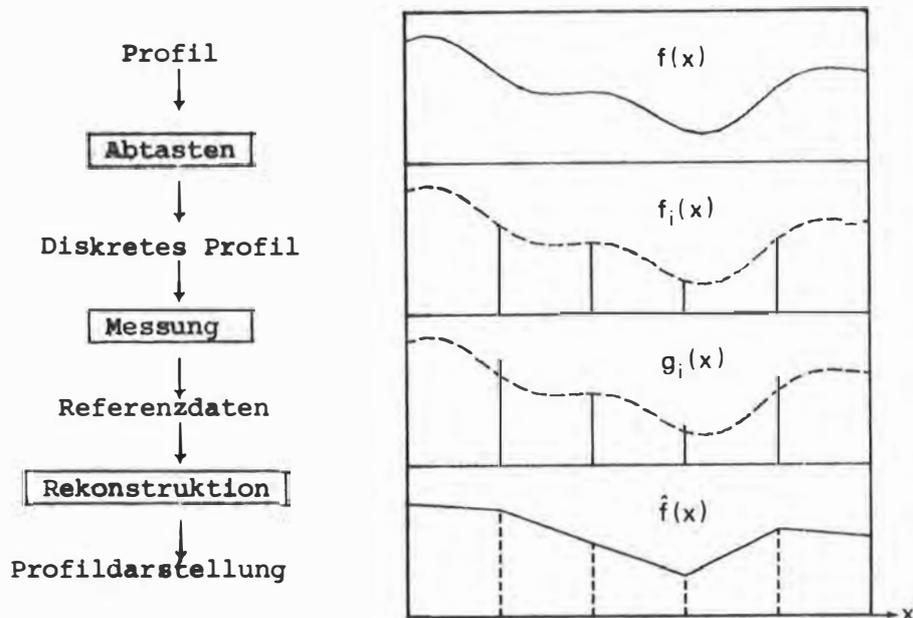


Abb. 2.1: Schematische Darstellung $f(x) \rightarrow \hat{f}(x)$

¹⁾ Hinweis zur Notation: l ist ein Index, der die ganzen Zahlen durchläuft; i hingegen wird als Symbol für eine diskrete Funktion verwendet (impulsmoduliertes Signal).

Im Fall einer photogrammetrischen Höhenmessung wird das Gelände im Stereomodell gemessen, wodurch $m_i(x)$ außer einem zufälligen, unkorrelierten Anteil auch korrelierte Komponenten aufweist (Abbildungsfehler, Instrumentfehler, Einpassungsfehler, etc.). Auf systematische Fehler jedoch soll hier nicht näher eingegangen werden. Bei den folgenden Ableitungen wird zunächst von einer unendlichen Profillänge L ausgegangen.

Bei äquidistanter Diskretisierung, d.h. $x_l = l\Delta x$, $l = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ läßt sich das diskrete Signal als

$$f_i(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l\Delta x) \delta(x-l\Delta x) \quad (2)$$

schreiben (6). Dabei ist $\delta(x)$ die Dirac Deltafunktion (siehe Anhang 3). Die Multiplikation von $f(x)$ mit der Reihe von Deltafunktionen bedeutet, daß nur die Signalwerte an den Stellen $x = l\Delta x$ übrigbleiben. Durch die Messung ergibt sich:

$$g_i(x) = f_i(x) + m_i(x) \quad (3)$$

Die Rekonstruktion eines kontinuierlichen Signals aus dem diskreten Signal $g_i(x)$ läßt sich als Faltung von $g_i(x)$ mit einer Gewichtsfunktion $a(t)$ formulieren:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) g_i(x-t) dt \quad (4)$$

Dies gilt für alle jene Verfahren, die den rekonstruierten Wert aus einer Linearkombination der vorliegenden Referenzwerte ermitteln (siehe Anhang 1).

Beispiel 1: Sprunginterpolation
(rekonstruierter Wert als Mittel der benachbarten Referenzwerte)

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; -\Delta x < t < \Delta x \\ 0 & ; t \leq -\Delta x, t > \Delta x \end{cases}$$

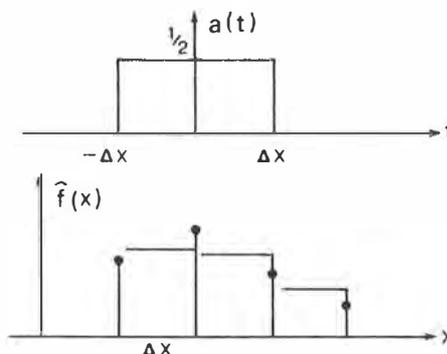


Abb. 2.2: Gewichtsfunktion und rekonstruiertes Signal im Fall einer Sprunginterpolation.

Neben (6) können auch Lehrbücher über Fourier Analyse und Informationstheorie als Basisliteratur herangezogen werden.

Beispiel 2: Lineare Interpolation (LI)

$$a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\Delta x} & , |t| \leq \Delta x \\ 0 & , |t| > \Delta x \end{cases}$$

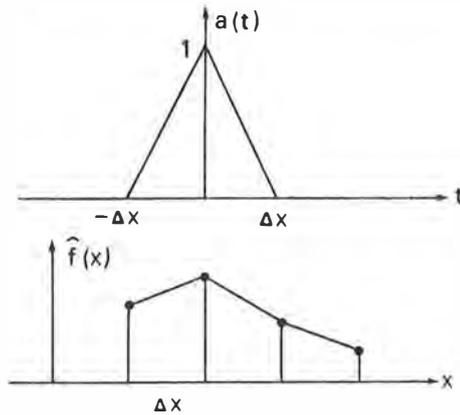


Abb. 2.3: Gewichtsfunktion und rekonstruiertes Signal für die lineare Interpolation.

Für andere (ebenfalls lineare) Rekonstruktionsverfahren, wie etwa die Interpolation nach kleinsten Quadraten, die Spline-Interpolation, oder die Interpolation mit finiten Elementen, lassen sich die Gewichte nicht auf einfache Weise als analytische Funktion von t , dem Abstand zwischen interpoliertem Punkt und Referenzpunkt, ausdrücken. An Hand der Gewichtsfunktion lassen sich die Eigenschaften von Rekonstruktionsverfahren analysieren, siehe (28).

Statt der Gewichtsfunktion eignet sich vor allem auch ihre Fouriertransformierte

$$A(\nu) = F\{a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-j2\pi\nu t} dt ; \quad j = \sqrt{-1} \tag{5}$$

für theoretische Untersuchungen von Rekonstruktionsverfahren. Durch die Fouriertransformation wird aus der Faltung im Ortsbereich (4) die Multiplikation im Frequenzbereich (siehe Anhang 2):

$$\boxed{\hat{F}(\nu) = A(\nu) G_i(\nu)} \tag{6}$$

In der Terminologie der Fourier- oder Spektralanalyse ist der Absolutbetrag $|\hat{F}(\nu)|$ das Amplitudenspektrum des Ausgangssignals $\hat{f}(x)$ und $|G_i(\nu)| = |F\{g_i(x)\}|$ das Amplitudenspektrum des Eingangssignals $g_i(x)$. Die Rekonstruktion, wie durch (4) definiert, läßt sich als lineares, ortsinvariantes System auffassen, auf das sich Eingangs- und Ausgangssignal beziehen. Dementsprechend wird $A(\nu)$ als Systemfunktion (SF) bezeichnet. Die Gewichtsfunktionen der üblichen RV sind gerade Funktionen von t , d.h. $a(t) = a(-t)$, somit sind die entsprechenden Systemfunktionen reelle, gerade Funktionen der Frequenz ν , wodurch $A(\nu)$ gerade das Verhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangsamplituden angibt.

Beispiel 3: Systemfunktion der linearen Interpolation

$$A(\nu) = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} a(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = 2 \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{t}{\Delta x}\right) \cos(2\pi\nu t) dt$$

$$A(\nu) = \Delta x \left(\frac{\sin \pi\nu\Delta x}{\pi\nu\Delta x} \right)^2$$

Die Rekonstruktion gemäß (4) ist linear, da der Zerlegung des Eingangssignals in $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ die Aufspaltung des Ausgangssignals in $\hat{f}(x) = c_1 \hat{f}_1(x) + c_2 \hat{f}_2(x)$ entspricht. Dabei ist $\hat{f}_1(x)$ die Rekonstruktion aus $g_1(x)$ und $\hat{f}_2(x)$ die Rekonstruktion aus $g_2(x)$. Außerdem ist die Rekonstruktion ortsinvariant, d.h., daß eine Ursprungsverschiebung des Eingangssignals lediglich dieselbe Ursprungsverschiebung des Ausgangssignals zur Folge hat. Das Abtasten (2) hingegen ist zwar ein lineares, aber kein ortsinvariantes System. Somit ist das Ausgangssignal von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängig.

2.1.2. Varianzschätzung

Eine Vorgehensweise zur Genauigkeitsschätzung eines DHM ist die Durchführung von Kontrollmessungen. Eine Möglichkeit dabei ist, das Profil $f(x)$ mit einem Intervall $\Delta x'$ abzutasten, das kleiner ist als Δx . Den Fehler $m_i'(x)$ der Kontrollmessung wird man in der Regel kleiner halten als den Meßfehler $m_i(x)$ der Profilaufnahme für das DHM. Aus den Unterschieden zwischen den Kontrollwerten und den Höhen aus dem DHM an den Stellen $x = l\Delta x'$ läßt sich der mittlere Fehler σ des DHM schätzen:

$$f_i'(x) = \sum_{l=0}^{n'} f(l\Delta x') \delta(x-l\Delta x') \quad ; \quad n'\Delta x' = L$$

$$\hat{f}_i(x) = \sum_{l=0}^{n'} \hat{f}(l\Delta x') \delta(x-l\Delta x')$$

$$e_i'(x) = f_i'(x) + m_i'(x) - \hat{f}_i(x)$$

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{1}{n'} \sum_{l=1}^{n'} |e'(l\Delta x')|^2 - \sigma_M^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Die Schätzung (7) im Ortsbereich (OB) gilt für den Fall, daß $m_i'(x)$ ein rein zufälliger Fehler mit der Varianz σ_M^2 ist.

Auf Grund des Parsevalschen Theorems (6) läßt sich die Varianz des DHM-Fehlers, die mit (1) definiert wurde, auch im Frequenzbereich (FB) bestimmen:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |E(\nu)|^2 d\nu \quad (8)$$

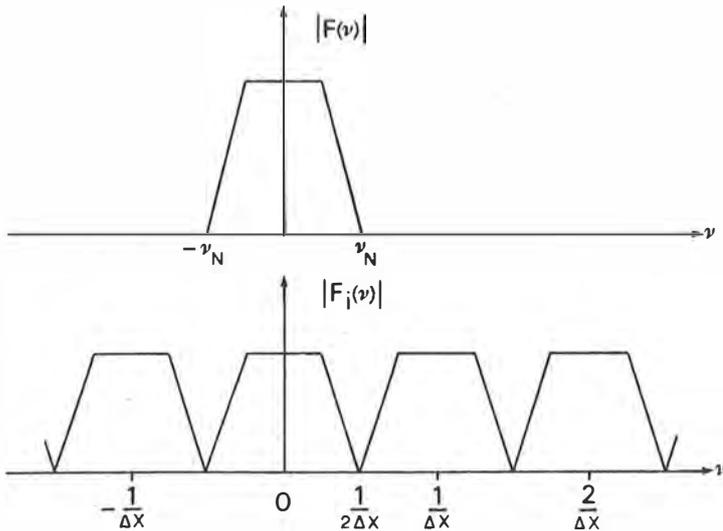
$E(\nu) = \mathbf{F}\{e(x)\}$ und $|E(\nu)|^2$ wird als Leistungsspektrum oder kurz als Spektrum von $e(x)$ bezeichnet. $|E(\nu)|^2$ und damit der mittlere Fehler σ des DHM sind durch die SF, das Spektrum des Profils und das Spektrum des Meßfehlers festgelegt. Aus den Eigenschaften der Fouriertransformation und den Beziehungen (1), (3) und (6) folgt nämlich:

$$\begin{aligned} E(\nu) &= F(\nu) - \hat{F}(\nu) \\ &= F(\nu) - A(\nu) \left\{ F_i(\nu) + M_i(\nu) \right\} \\ F(\nu) &= \mathbf{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi\nu x} dx \\ F_i(\nu) &= \mathbf{F}\{f_i(x)\} \\ M_i(\nu) &= \mathbf{F}\{m_i(x)\} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß das Abtastintervall Δx so klein gewählt wird, daß die höchste Frequenz von $f(x)$ kleiner ist als $1/2\Delta x$, d.h.

$$\boxed{F(\nu) = 0 \text{ für } |\nu| \geq \nu_N = \frac{1}{2\Delta x}} \quad (9)$$

ergibt sich aus (2), daß die Fouriertransformierte $F_i(\nu)$ des abgetasteten Signals ein periodisches Abbild der Fouriertransformierten $F(\nu)$ des kontinuierlichen Signals ist (siehe Anhang 3). Die durch Δx vorgegebene Grenzfrequenz ν_N wird Nyquist Frequenz genannt (6).

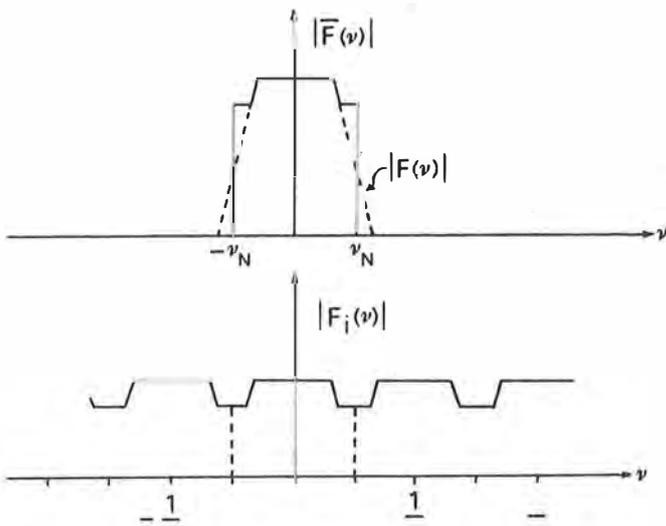


$$F(v) = \begin{cases} \Delta x F_i(v) & , |v| < v_N \\ 0 & , |v| \geq v_N \end{cases} \quad (10.1)$$

$$F_i(v) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(v - \frac{k}{\Delta x}) \quad (10.2)$$

Abb. 2.4: Illustration zur Fouriertransformierten von kontinuierlichem und diskretem Signal.

Ist hingegen $F(v) \neq 0$ für $|v| \geq v_N$, ergibt sich ein Verflechtungseffekt ("aliasing"); $F_i(v)$ ist dann nicht mehr ein periodisches Abbild von $F(v)$, sondern von $\bar{F}(v)$, der verflochtenen Transformierten:



$$\bar{F}(v) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(v - \frac{k}{\Delta x}) & , |v| < v_N \\ 0 & , |v| \geq v_N \end{cases} \quad (11)$$

Dabei soll das Zeichen \sum andeuten, daß die Summation symbolisch ist in dem Sinn, daß sich $\bar{F}(v_0)$ aus Beiträgen von $F(v_0)$, $F(v_0 + \frac{1}{\Delta x})$, $F(v_0 - \frac{1}{\Delta x})$, etc. zusammensetzt; dies für $-v_N < v_0 < v_N$.

Abb. 2.5: Illustration des Verflechtungseffekts

$$F_i(v) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{F}(v - \frac{k}{\Delta x})$$

Ist Bedingung (9) nicht erfüllt, läßt sich $F(v)$ nicht mehr aus $F_i(v)$ zurückgewinnen, was gleichbedeutend ist mit der Aussage des Abtasttheorems, daß sich $f(x)$ aus $f_i(x)$ nur dann vollständig rekonstruieren läßt, wenn Δx (9) genügt. Unter der Voraussetzung (9) folgt für $E(v)$:

$$E(v) = \begin{cases} \Delta x F_i(v) - A(v) F_i(v) - A(v) M_i(v) & , |v| < v_N \\ - A(v) F_i(v) - A(v) M_i(v) & , |v| \geq v_N \end{cases}$$

damit

$$|E(v)|^2 = \begin{cases} (\Delta x - A(v))^2 |F_i(v)|^2 + A^2(v) |M_i(v)|^2 & , |v| < v_N \\ A^2(v) |F_i(v)|^2 + A^2(v) |M_i(v)|^2 & , |v| \geq v_N \end{cases}$$

Dabei wurde angenommen, daß der Meßfehler $m_i(x)$ nicht mit der gemessenen Größe $f_i(x)$ korreliert ist, also

$$|G_i(v)|^2 = |F_i(v)|^2 + |M_i(v)|^2$$

gilt. Diese Voraussetzung ist in der Regel bei stationärem Messen im photogrammetrischen Modell erfüllt, nicht jedoch unbedingt bei dynamischen Profilmessungen.

Mit (10.1) ergibt sich sodann für die Varianz des DHM-Fehlers

$$\sigma^2 = \int_{-v_N}^{v_N} \left(1 - \frac{1}{\Delta x} A(v)\right)^2 |F(v)|^2 dv + 2 \int_{v_N}^{\infty} A^2(v) |F_i(v)|^2 dv + 2 \int_0^{\infty} A^2(v) |M_i(v)|^2 dv,$$

wobei von der Eigenschaft Gebrauch gemacht wurde, daß das Spektrum einer reellen Funktion eine gerade Funktion von v ist. Auf Grund der Periodizität von $|F_i(v)|$ folgt

$$\int_{v_N}^{\infty} A^2(v) |F_i(v)|^2 dv = \int_{-v_N}^{v_N} \sum_{k=1}^{\infty} A^2\left(v + \frac{k}{\Delta x}\right) \left|\frac{1}{\Delta x^2} F(v)\right|^2 dv,$$

somit

$$\sigma^2 = \int_{-v_N}^{v_N} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\Delta x} A(v)\right)^2 + \frac{2}{\Delta x^2} \sum_{k=1}^{\infty} A^2\left(v + \frac{k}{\Delta x}\right) \right\} |F(v)|^2 dv + 2 \int_0^{\infty} A^2(v) |M_i(v)|^2 dv \quad (12)$$

Aus (12) ist ersichtlich, daß die Varianz des DHM-Fehlers aus zwei Komponenten besteht: Der Varianz σ_S^2 des Fehlers wegen Abtastung und (unzulänglicher) Rekonstruktion und der Varianz σ_R^2 , die die Auswirkung des Meßfehlers angibt.

$$\sigma_S^2 = \int_{-v_N}^{v_N} \left\{ (1 - \tilde{A}(v))^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}^2\left(v + \frac{k}{\Delta x}\right) \right\} |F(v)|^2 dv ; \quad \tilde{A}(v) = \frac{1}{\Delta x} A(v) \quad (12.1)$$

$$\sigma_R^2 = 2 \int_0^{\infty} A^2(v) |M_i(v)|^2 dv \quad (12.2)$$

Mit (12.1) wird deutlich, daß eine vollständige Rekonstruktion - d.h. $\sigma_S^2 = 0$ - möglich ist, wenn (unter Voraussetzung (9)) für die normierte SF gilt:

$$\tilde{A}(\nu) = \begin{cases} 1 & , |\nu| < \nu_N = \frac{1}{2\Delta x} \\ 0 & , |\nu| \geq \nu_N \end{cases}$$

Die entsprechende Gewichtsfunktion ist:

$$a(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{\Delta x}}{\frac{\pi t}{\Delta x}}$$

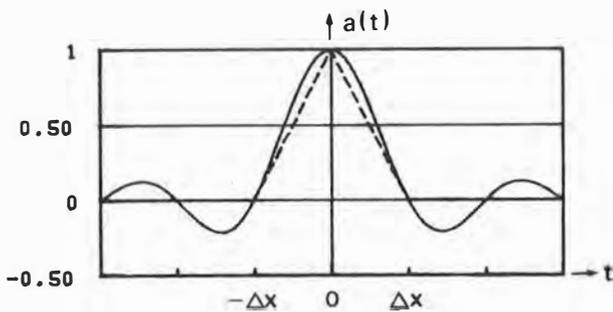


Abb. 2.6.a: Gewichtsfunktion der idealen Rekonstruktion (— Whittakers Interpolation) und der LI (---).

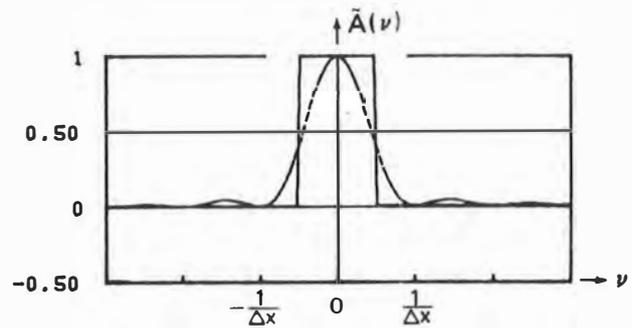


Abb. 2.6.b: Systemfunktion der Whittaker (—) und der linearen (---) Interpolation.

Die LI, mit der normierten SF

$$\tilde{A}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi \nu \Delta x}{\pi \nu \Delta x} \right)^2 ,$$

stellt eine ziemlich grobe Näherung der idealen Rekonstruktion dar. Als Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion ergibt sich:

$$\sigma_S^2 = \int_{-\nu_N}^{\nu_N} \left\{ \left(1 - \left(\frac{\sin \pi \nu \Delta x}{\pi \nu \Delta x} \right)^2 \right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi (\nu \Delta x + k)}{\pi (\nu \Delta x + k)} \right)^4 \right\} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Durch Normierung der Gewichtsfunktion, sodaß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(t) dt = 1 ,$$

erhält man als Auswirkung eines rein zufälligen Meßfehlers bei LI:

$$\sigma_R^2 = 2 \int_0^{\infty} |\mathbf{F}(\tilde{\alpha}(t))|^2 |M_z(\nu)|^2 d\nu = \frac{2}{3} \sigma_M^2$$

Wenn $m_z(x)$ ein rein zufälliger Fehler ist, d.h. eine Folge unkorrelierter Größen mit Mittelwert Null und Varianz σ_M^2 , gilt nämlich für sein Spektrum (6):

$$|M_z(\nu)|^2 = \Delta x \sigma_M^2$$

Anstatt über das Quadrat der SF zu integrieren, ist es einfacher, das Integral - gestützt auf das Parsevallsche Theorem - über das Quadrat der Gewichtsfunktion (siehe Beispiel 2) zu rechnen:

$$2 \int_0^{\infty} |\mathbf{F}(\tilde{\alpha}(t))|^2 d\nu = 2 \int_0^{\infty} \tilde{\alpha}^2(t) dt = 2 \int_0^{\Delta x} \left(\frac{\Delta - t}{\Delta x}\right)^2 dt = \frac{2}{3\Delta x}$$

Daß der Beitrag eines rein zufälligen Meßfehlers zur Gesamtvarianz im Fall der LI gerade $(2/3)\sigma_M^2$ ist, ist im Anhang 4 auch im OB hergeleitet.

Formel (12) gilt für eine unendliche Profillänge. Es ist zu erwarten, daß bei endlichem $L = n\Delta x$ die tatsächliche Auswirkung eines rein zufälligen Meßfehlers umso mehr von

$$\left[\sigma_R^2 = \sigma_M^2 2 \int_0^{\infty} A^2(\nu) d\nu ; \Delta x = 1 \right]$$

abweichen kann, je kleiner die Anzahl n der gemessenen Werte ist. Die tatsächliche Auswirkung im einzelnen Fall läßt sich nicht angeben, da bestenfalls lediglich σ_M^2 nicht aber $m_z(x)$ bekannt ist.

Um für den mittleren Abtast- und Rekonstruktionsfehler (AR-Fehler) $\sigma_S = \sigma_S(\Delta x)$ einen einfacheren Ausdruck als (12.1) zu erhalten, ist es notwendig, statt der SF $A(\nu)$ der Rekonstruktion die Funktion $H(\nu)$ einzuführen. Im folgenden wird $H(\nu)$ als Übertragungsfunktion (ÜF) bezeichnet; sie kann als SF von Abtasten und Rekonstruktion (AR) aufgefaßt werden.

$$\sigma_S^2 = \int_{-\nu_N}^{\nu_N} (1 - H(\nu))^2 |F(\nu)|^2 d\nu \quad (13)$$

Für (13) gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die Formel (12.1), nämlich Erfüllung der Bedingung (9) und unendliche Profillänge.

Die ÜF im Fall der Rekonstruktion mittels LI ergibt sich als (14):

$$H(\nu) = 1 - \sqrt{2 \left(1 - \frac{\sin^2 \pi \nu \Delta x}{3} - \left(\frac{\sin \pi \nu \Delta x}{\pi \nu \Delta x} \right)^2 \right)}, \quad |\nu| < \nu_N$$

Ersetzt man in Formel (12.2) $A(\nu)$ durch $H(\nu)$ und $|M_z(\nu)|^2$ durch $\Delta x \sigma_M^2$, so erhält man als Näherung für die Auswirkung eines rein zufälligen Meßfehlers:

$$\sigma_R^2 \approx 2 \Delta x \sigma_M^2 \int_0^{\frac{1}{2\Delta x}} H^2(\nu) d\nu$$

$$\hat{\sigma}_R^2 = \hat{R} \sigma_M^2 ; \quad \hat{R} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} H^2(u) du ; \quad u = \nu \Delta x$$

(14)

Ist Bedingung (9) nicht erfüllt, enthält also $f(x)$ Spektralkomponenten mit Wellenlängen kleiner als das doppelte Abtastintervall ($|1/\nu| \leq 2\Delta x$), so läßt sich Formel (13) nicht mehr verwenden. Die Verformung der Transformierten $F_z(\nu)$ durch die - wegen des zu großen Abtastintervalls - nicht richtig erfaßten Hochfrequenzen $|\nu| \geq \nu_N$ (Verflechtung (11)) kommt in (13) nicht zum Ausdruck. Ist (9) nicht erfüllt, so ist σ_S nicht nur vom Leistungsspektrum $|F(\nu)|^2$ abhängig, sondern darüber hinaus auch vom Phasenspektrum des Signals $f(x)$. (Der Begriff des Phase wird in Abschnitt 2.1.3. behandelt). Vorläufige Untersuchungen haben gezeigt, daß die Phasenbeziehung der miteinander verflochtenen Spektralkomponenten den AR-Fehler beeinflusst.

Nimmt man vereinfachend an, daß die Hochfrequenzen durch Abtasten mit Δx und anschließender Rekonstruktion eliminiert werden, so erhält man als Schätzvariable für das AR-Fehlerquadrat:

$$\hat{\sigma}_S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - H(\nu))^2 |F(\nu)|^2 d\nu \quad \text{mit } H(\nu) = 0 \text{ für } |\nu| \geq \nu_N$$

(15)

Auf den für die praktische Anwendung interessanten Fall der endlichen Profillänge wird in 2.1.4. eingegangen.

2.1.3. Übertragungsfunktion

Das Konzept der Übertragungsfunktion, die die Eigenschaften des Systems AR im Frequenzbereich beschreibt, wurde 1972 von Makarovič in der photogrammetrischen Literatur vorgelegt (15).

Geht man davon aus, daß sich eine auf dem Intervall $(0, L)$ stetige Funktion $f(x)$ als eine Summe von harmonischen Sinuswellen darstellen läßt (Fourier Reihe), so ist es auf Grund der Linearität des Systems AR (siehe Seite 7) möglich, das Systemverhalten an Hand einer Sinuswelle zu untersuchen. Die Sinuswelle mit Frequenz ν , Amplitude p_E und Phase ϕ wird durch AR in ein periodisches Signal übergeführt, dessen Amplitude p_A sich über die mittlere Energie (Varianz) des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion ausdrücken läßt (14):

$$p_A = p_E - \sqrt{2\sigma^2} \quad (16)$$

Wird etwa das Signal $f(x) = p_E \sin(2\pi\nu x + \phi)$ mit $\Delta x = 1/2\nu$ abgetastet, so ist der Fehler wegen Abtastung und Rekonstruktion gerade $e(x) = p_E \sin(2\pi\nu x)$, wenn $\phi = 0$ ist (Abb. 2.7.a). Die Varianz von $e(x)$ ergibt sich als:

$$\sigma^2 = \nu \int_0^{1/\nu} p_E^2 \sin^2(2\pi\nu x) dx = \frac{p_E^2}{2} \rightarrow p_A = p_E - \sqrt{2\sigma^2} = 0$$

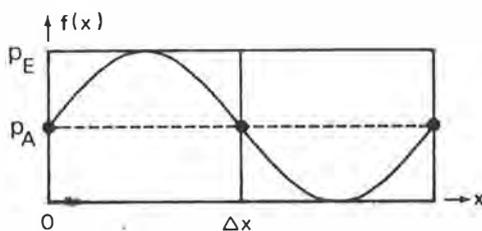


Abb. 2.7.a: Abtasten einer Sinuswelle der Frequenz ν mit $\Delta x = 1/2\nu$, wenn $\phi = 0$.

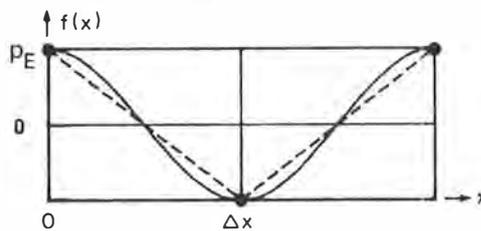


Abb. 2.7.b: Abtasten einer Sinuswelle der Frequenz ν mit $\Delta x = 1/2\nu$, wenn $\phi = \pi/2$.

Das Verhältnis p_A/p_E , der mit (16) definierten Amplitude des Ausgangssignals zur Amplitude des Eingangssignals, charakterisiert das System AR analog zur Beziehung (6). Das Amplitudenverhältnis

$$\frac{p_A}{p_E} = H(\nu, \Delta x) \quad (17)$$

als Funktion der Frequenz ν und des Abtastintervalls Δx , wird als $\ddot{U}F$ bezeichnet. Für jede (lineare) RV (Bedingung (4)) läßt sich die zugehörige $\ddot{U}F$ bestimmen.

Es zeigt sich, daß die zwei Variablen ν und Δx als Produkt auftreten (15, 14), somit durch eine neue Variable $u = \nu \Delta x$ ersetzt werden können. $1/u$ läßt sich als Abtastdichte bezeichnen, da $1/u$ das Verhältnis der Periodenlänge $1/\nu$ der Spektralkomponente zum Abtastintervall Δx angibt. Des weiteren ist die $\ddot{U}F$ eigentlich auch noch von der Phase ϕ abhängig, worin die Eigenschaft des Abtastsystems zum Ausdruck kommt, nicht ortsinvariant zu sein. Es gilt jedoch - zumindest für LI (14) - daß sich, wenn die Profillänge unendlich ist, die Phaseabhängigkeit der $\ddot{U}F$ lediglich als Unstetigkeit von $H(u)$ an den Stellen $u = i/2$ ($i = 1, 2, \dots$) zeigt. Abb. 2.7 veranschaulicht, daß $\phi = \pi/2$ zu einem wesentlich kleineren Fehler wegen Abtastung und Rekonstruktion führt als $\phi = 0$, wenn $\nu \Delta x = u = 1/2$ ist.

Beschränkt man den Definitionsbereich der $\ddot{U}F$ auf $|\nu| < 1/2\Delta x$, so ist die $\ddot{U}F$ eine reele, stetige und gerade Funktion nur der Abtastdichte:

$$H(\nu, \Delta x) = H(u) \tag{18}$$

Vorausgesetzt ist dabei eine unendliche Profillänge für AR. Diese Aussage gilt für die meisten Rekonstruktionsverfahren (25).

Um die Art der Aussage der $\ddot{U}F$ zu verdeutlichen, folgen drei Beispiele:

1) Für ein System AR, das eine exakte Profildarstellung bewirkt, d.h.

$\hat{f}(x) = f(x)$, muß gelten:

$$H(u) = 1 \quad , \quad |u| < \frac{1}{2}$$

was sich unter Bedingung (9) mit Whittakers Interpolation erreichen läßt (Abb. 2.6). Dazu müssen alle - unendlich viele - Referenzpunkte für jeden zu interpolierenden Punkt herangezogen werden. Eine ideale Rekonstruktion einer Sinuswelle mit Frequenz ν_0 ist auch möglich bei Abtasten mit $\Delta x < \frac{1}{2\nu_0}$ und Interpolation nach kleinsten Quadraten mit $\cos(2\pi\nu_0 d)$ als Korrelationsfunktion (25, 29).

2) Für ein ideales Filterungsverfahren, das die Spektralkomponenten mit Frequenzen kleiner als ein vorgegebener Wert ν_* vollständig rekonstruiert und jene mit $|\nu| > \nu_*$ unterdrückt (Tiefpaßfilter), muß gelten:

$$H(u) = \begin{cases} 1 & , |u| < v_* \Delta x \\ 0 & , |u| \geq v_* \Delta x \end{cases}$$

Dies läßt sich unter (9) mit der Gewichtsfunktion $\alpha(t) = \frac{\sin(2\pi v_* t)}{2\pi v_* t}$ erreichen, wiederum mit unendlich vielen Referenzwerten.

- 3) Reale $\bar{U}F$ (realisierbare Systeme, z.B. Interpolation mit einer (sehr) beschränkten Anzahl von Referenzpunkten per interpoliertem Punkt) kommen den idealen mehr oder weniger nahe. Sie geben an, in welchem Maß die einzelnen Spektralkomponenten mit Frequenzen $|v| < 1/2\Delta x$, aus denen sich das Signal $f(x)$ zusammensetzt, rekonstruiert beziehungsweise unterdrückt werden. So wird z.B. bei vorgegebenem Δx , etwa $\Delta x = 5 \text{ m}$ (Abb. 2.8.a) die Komponente des Signals f_2 (siehe Abb. 2.11) mit der Frequenz $v = 0.05$ zu ca 80% rekonstruiert; für die Komponente mit $v = 0.07$ ergibt sich eine Amplitudenabschwächung von ca 40%.

Andererseits läßt sich aus der $\bar{U}F$ ablesen, was eine Änderung von Δx für einen Einfluß auf die Rekonstruktion einer bestimmten Spektralkomponente hat. So wird etwa, wenn $\Delta x = 5 \text{ m}$, die Komponente mit $v = 0.05$ mit einer Güte von ca 80% dargestellt (Abb. 2.8.a) und zu ca 95%, wenn $\Delta x = 2 \text{ m}$ (Abb. 2.8.b).

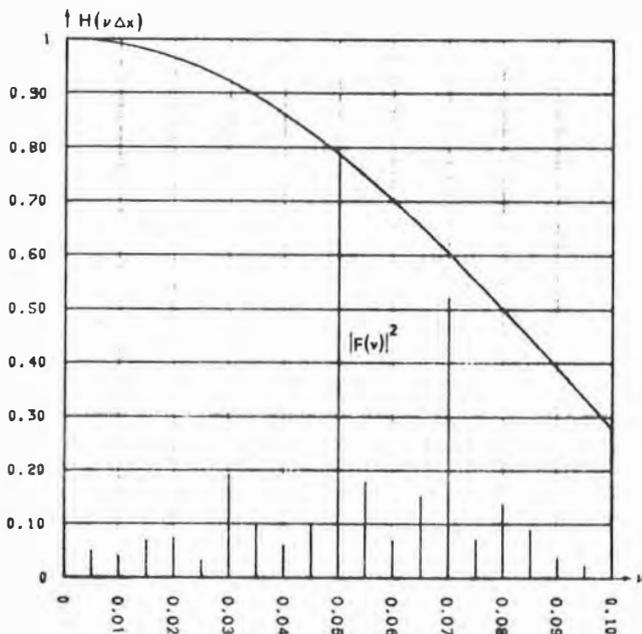


Abb. 2.8.a: Übertragungsfunktion der LI und Spektrum des Signals f_2 ; Abszissenzuordnung für $\Delta x = 5 \text{ m}$.

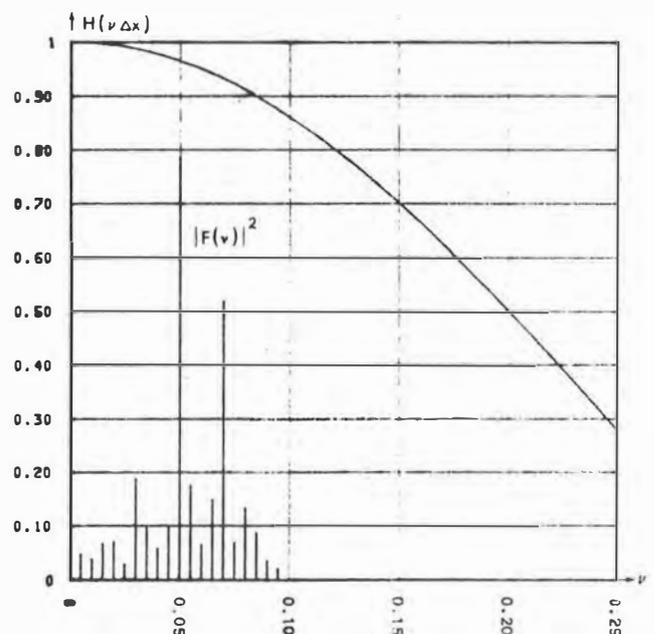


Abb. 2.8.b: Übertragungsfunktion der LI und Spektrum des Signals f_2 ; Abszissenzuordnung für $\Delta x = 2 \text{ m}$.

Die Berechnung der ÜF für eine bestimmte RV erfordert keinerlei aufwendige mathematische Ableitung. Die ÜF läßt sich auf sehr einfache Weise numerisch bestimmen, indem man als Eingabe für das vorhandene Interpolationsprogramm eine abgetastete Sinuswelle (statt der Referenzwerte eines Geländeprofiles) verwendet. Aus den obigen Überlegungen ergibt sich das Berechnungsprinzip:

$H(u)$ muß für eine hinreichend große Anzahl von Werten u_k berechnet werden, die zwischen 0 und 1/2 liegen. Jedem Wert u_k entspricht ein Intervall Δx_k , mit dem die Sinuswelle $f(x) = \sin(2\pi v_0 x)$ abgetastet werden muß. Per Intervallgröße Δx werden die abgetasteten Referenzwerte $f(l\Delta x)$, $l = 0, 1, \dots, n$ zur Interpolation von q Zwischenpunkten pro Abtastintervall herangezogen:

$$\hat{f}(j\Delta x') = \sum_{i=1}^q a_i \cdot g_i \quad ; \quad q = \Delta x / \Delta x' \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, nq \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, q$$

a_i ist der Gewichtsvektor der verwendeten RV für den i ten Zwischenpunkt und g der Vektor der Referenzwerte, die für das jeweilige Abtastintervall benötigt werden (vergl. Anhang 1). Entsprechend der Genauigkeitsschätzung aus Kontrollmessungen (7) läßt sich der Schätzwert

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{nq} \sum_{j=1}^{nq} e_k^2(j\Delta x')$$

für die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion rechnen.

$e_k(x)$ ist der Unterschied zwischen $f(x)$ und dem rekonstruierten Signal, das aus der Abtastung mit Δx_k gewonnen wurde. Mit den Definitionen (16) und (17) erhält man sodann den (geschätzten) Wert der ÜF für $u_k = v_0 \Delta x_k$:

$$H(u_k) = 1 - \sqrt{2\hat{\sigma}_k^2} \quad (19)$$

Werte für $u \neq u_k$ lassen sich durch Interpolation bestimmen. Das entsprechende Flußdiagramm ist in Abb. 2.9 skizziert.

Zur Parameterwahl für den Berechnungsprozeß läßt sich folgendes bemerken:

- Als Amplitude von $f(x)$ läßt sich $p_E = 1$ wählen, da die absolute Größe von p_E unwesentlich ist; als Phase genügt $\phi = 0$, da ϕ bei unendlicher Profillänge und $u < 1/2$ nicht relevant ist.
- Der zu Grunde liegenden harmonischen Zerlegung von Signalen wegen sind Werte $u_k = k v_0 \Delta x_0$ interessant. Dies läßt sich realisieren, indem man $\Delta x_0 = 1$ festsetzt, womit $k \Delta x_0 = \Delta x_k = k$ wird. Für die Frequenz der Sinuswelle gilt dann $v_0 = \frac{1}{2m}$, wenn $k = 1, 2, \dots, m$.

Die Wahl von v_0 bzw. die Wahl von m , der Anzahl zur bestimmender Übertragungswerte $H(u_k)$, hängt von der erwünschten Bestimmungsgenauigkeit von $H(u)$ ab. Für eine graphische Darstellung etwa (Abszissenintervall $[1, 1/2]$ auf 100 mm, Ordinatenintervall $[0, 1]$ auf 100 mm) ist $v_0 = 0.005$ ($m = 100$) völlig ausreichend.

- Die Anzahl n der Abtastintervalle für eine bestimmte Intervallgröße Δx_k muß - der geforderten unendlichen Profillänge wegen - so groß sein, daß mit $n\Delta x_k$ gerade ein ganzzahliges Vielfaches einer Halbperiode des Fehlers $e_k(x)$ erfaßt wird. Bei symmetrischen RV (z.B. Sprunginterpolation, lineare Interpolation, Interpolation nach kleinsten Quadraten, ...) ist selbst ein Vielfaches der Viertelperiode ausreichend. Für eine Sinuswelle ist nämlich des Integral (1) über eine Halb- bzw. Viertelperiode die kleinste, sich wiederholende Einheit. Aus der Bedingung

$$n\Delta x_k = \frac{N}{2v_0} \quad N = 1, 2, \dots \quad (20)$$

folgt $n_{max} = m$, mit der obigen Festlegung von Δx_k .

- q , die Anzahl Kontrollpunkte per Abtastintervall, läßt sich als Funktion von k oder als Konstante festsetzen. $q_{max} = 10$ erwies sich in den Experimenten (Abschnitt 3) als ausreichend.
- Eine wiederholte Berechnung des Sinus für ein und dasselbe Argument x läßt sich durch Abspeicherung der Werte $f(j/q)$, $j = 1, 2, \dots, mq$ vermeiden.

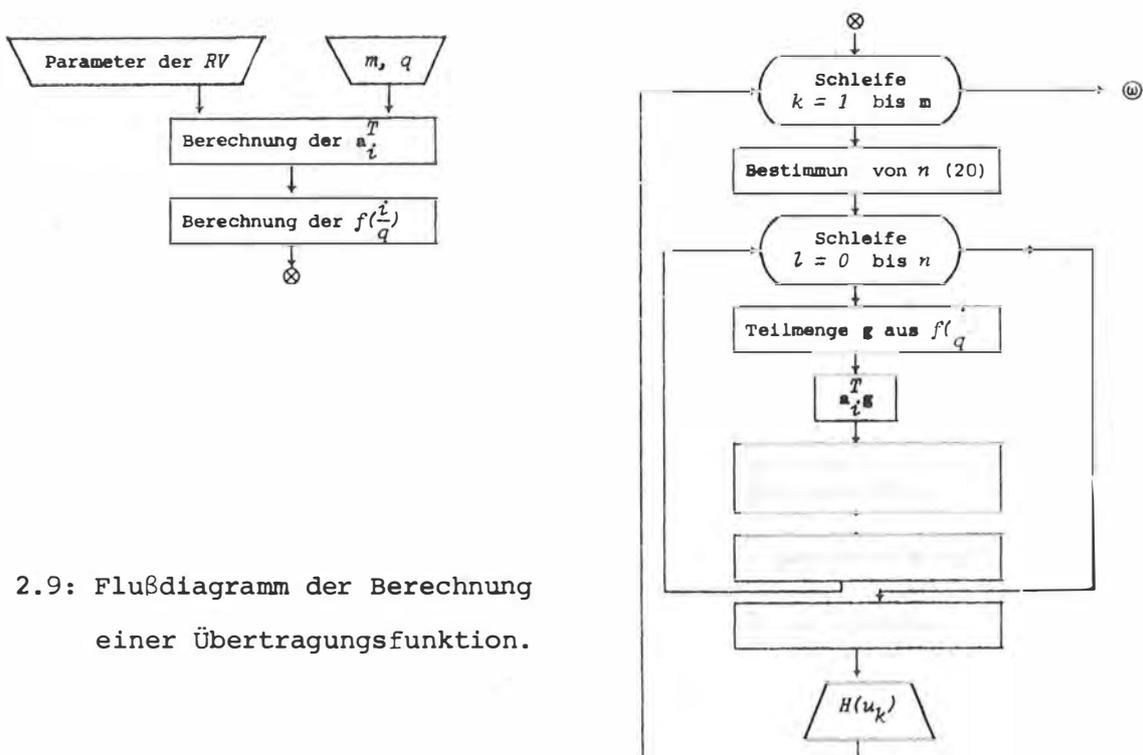


Abb. 2.9: Flußdiagramm der Berechnung einer Übertragungsfunktion.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß der ÜF eine zentrale Bedeutung in der Qualitätsbeurteilung eines DHM zukommt. Sie eignet sich vorzüglich zu vergleichenden Studien von Rekonstruktionsverfahren, wie auch zur Parameteroptimierung einer RV (25). Darüber hinaus ermöglicht die ÜF, die Güte eines rekonstruierten Signals zu quantifizieren (15) und die Genauigkeit eines DHM in der Form eines mittleren Fehlers anzugeben (16, 26).

2.1.4. Leistungsspektrum

Zur Bestimmung des Spektrums $|F(v)|^2$ eines Geländeprofiles stehen in der praktischen Anwendung lediglich N abgetastete Werte des Profils von endlicher Länge zur Verfügung. Bei äquidistanter Digitalisierung mit dem Intervall Δ , d.h.

$$N\Delta = L \quad ,$$

bietet sich als einfachste und rechnerisch schnellste Möglichkeit der spektralen Darstellung von $f(x)$ die diskrete Fourier Transformation (DFT) an. Auf die Alternative, nämlich der Berechnung des Spektrums als Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion von $f(x)$ (6, 29), die rechnerisch wesentlich aufwendiger ist, soll hier nicht eingegangen werden.

Die DFT $F(k)$ läßt sich mit Hilfe eines schnellen Algorithmus - als "Fast Fourier Transform" (FFT) bekannt - berechnen, der sich selbst für einen Kleincomputer programmieren läßt (23).

Gegeben N Werte $f(l) \hat{=} f(l\Delta) \quad ; \quad l = 0, 1, \dots, N-1$

liefert die FFT N Werte

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(l) e^{-j2\pi lk/N} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (21)$$

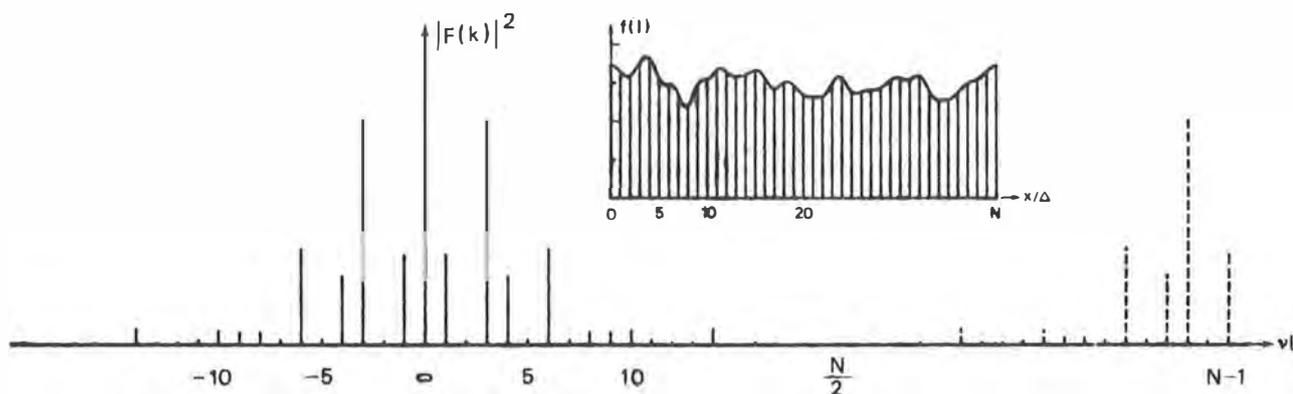


Abb. 2.10: Illustration zur DFT.

Die Werte $f(l)$, die als Vektor dem FFT-Programm eingegeben werden, entsprechen den Profilhöhen an den Stellen $x = l\Delta$. $|F(k)|$ ist die Amplitude der Spektralkomponente mit der Frequenz $\nu = k/L$. Die Werte $F(k)$, die man aus der FFT für $k = (N/2)+1, (N/2)+2, \dots, N-1$ erhält (in Abb. 2.10 strichliert gezeichnet), sind lediglich die konjugiert komplexen Werte zu jenen für $k = (N/2)-1, (N/2)-2, \dots, 1$. Durch die Umspeicherung $F(N-1) = F(-1), F(N-2) = F(-2), \dots$, erhält man die diskrete Fouriertransformierte von $f(l)$, siehe Abb. 2.10.

$|F(k)|^2$ mit $-N/2 \leq k \leq (N/2)-1$ soll $|F(\nu)|^2$ in Formel (15) ersetzen.

Eine willkürliche, stetige Funktion $f(x)$ auf dem endlichen Intervall $(0, L)$, läßt sich durch eine (unendliche) Reihe von Sinuswellen mit harmonischen Frequenzen (Fourier Reihe) darstellen, somit durch die (endliche) Reihe von Sinuswellen, die durch die DFT definiert ist, approximieren:

$$\bar{f}(x) = p_0 + \sum_{k=1}^{N/2} p_k \sin(2\pi\nu_k x + \phi_k)$$

Dabei gelten die Beziehungen: $\nu_k = k/L$, $p_0 = RF(0)$, $p_k = \{4(RF(k)^2 + IF(k)^2)\}^{1/2}$ und $\phi_k = \arctan \frac{RF(k)}{IF(k)}$. $RF(k)$ bedeutet Realteil von $F(k)$, $IF(k)$ Imaginärteil von $F(k)$. Für $x = l\Delta$ gilt $\bar{f}(x) = f(x)$. Nur wenn $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge L ist und keine Frequenzen höher als $1/2\Delta$ aufweist, ist $|F(k)|^2$ das Leistungsspektrum von $f(x)$. Anderenfalls ist $|F(k)|$ nur eine Näherung für $|F(\nu)|$. Je größer L und je kleiner Δ ist, umso besser wird die Näherung sein. Je länger das Profil nämlich ist, desto kleiner ist das Frequenzintervall der DFT $\nu_{k+1} - \nu_k = 1/L$ und mit kleiner werdendem Δ wird die Verflechtung von $F(k)$ in zunehmenden Maße vermieden. Die Kenntnis eines periodischen Signals über seine Periodenlänge ist gleichbedeutend mit der Kenntnis über eine unendliche Länge.

Durch die DFT wird aus der Formel (15):

$$\hat{\sigma}_S^2(\Delta x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (1 - H(u_k))^2 |F(k)|^2 \quad ; \quad u_k = \Delta \frac{k}{L} \quad (22)$$

Die Formel (22) stimmt mit der in (4) angegebenen Schätzvariablen für das AR-Fehlerquadrat überein, wenn $H(u) = 1$ ist für $|u| < 1/2$.

Wichtig für die Genauigkeitsschätzung eines DHM sind die hohen Frequenzen des Geländeprofiles. Eine gute Erfassung der Kleinformen ist nur möglich bei hinreichend kleinem Abtastintervall Δ zur Spektrumbestimmung (Bedingung (9)!). Darüber hin-

aus würde eine Abspaltung niederfrequenter Komponenten von $f(L)$ einer genaueren Bestimmung der hochfrequenten Anteile zu Gute kommen (6). Die empirischen Untersuchungen sollen jedoch zeigen, ob eine derartige Trendabspaltung notwendig ist.

2.1.5. Beispiel

Zur Untermauerung der aufgezeigten Beziehungen soll der AR-Fehler für eine periodisches Signal berechnet werden. Die in Abb. 2.11 gezeigten Profile mit der Periodenlänge von $L = 200$ m sind Überlagerungen von harmonischen Sinuswellen:

$$f(x) = p_0 + \sum_{k=1}^{19} p_k \sin(2\pi v_k x + \phi_k) \quad ; \quad v_k = \frac{k}{L}$$

Durch entsprechende Variation der Parameter für die Generierung von Zufallswerten für die Amplituden p_k ergeben sich die Signale $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ von zunehmender Bewegtheit. Die Phasen ϕ_k sind ebenfalls Zufallswerte. Das größtmögliche Abtastintervall nach dem Abtasttheorem (9) ist für alle drei Signale $\Delta x = 5$ m. Neben den Profilen sind in Abb. 2.11 ihre Spektren dargestellt.

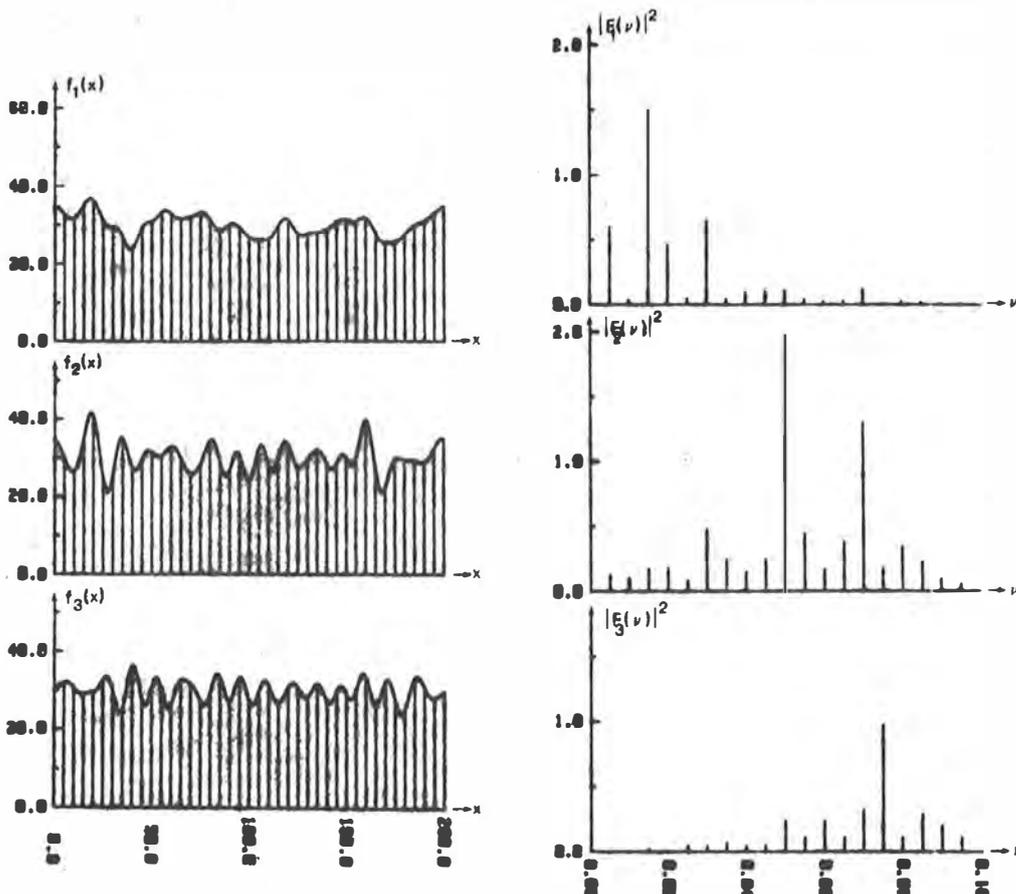


Abb. 2.11: Drei periodische Signale f_1 , f_2 , f_3 und ihre Spektren.

Die im OB geschätzten AR-Fehlerquadrate (Formel (7), $\sigma_{M'} = 0$) sind in Tabelle 2.1 für fünf verschiedene Abtastintervalle und LI angegeben. Mit Ausnahme von $\Delta x = 3 \text{ m}$ sind die Werte $\hat{\sigma}_{OB}^2$ gleich mit den im FB geschätzten Fehlerquadraten $\hat{\sigma}_{FB}^2$ (Formell (22)). Die Unstimmigkeit für $\Delta x = 3 \text{ m}$ erklärt sich daraus, daß bei dieser Intervallgröße nicht das gesamte Profil erfaßt wird.

$\Delta x (\text{m})$	f_1		f_2		f_3	
	$\hat{\sigma}_{OB}^2$	$\hat{\sigma}_{FB}^2$	$\hat{\sigma}_{OB}^2$	$\hat{\sigma}_{FB}^2$	$\hat{\sigma}_{OB}^2$	$\hat{\sigma}_{FB}^2 (\text{m}^2)$
1	0.000	0.000	0.003	0.003	0.002	0.002
2	0.003	0.003	0.041	0.041	0.035	0.035
3	0.017	0.017	0.197	0.196	0.171	0.170
4	0.051	0.051	0.582	0.582	0.496	0.496
5	0.115	0.115	1.309	1.309	1.097	1.097

Tabelle 2.1: AR-Fehlerquadrate im OB und FB geschätzt.

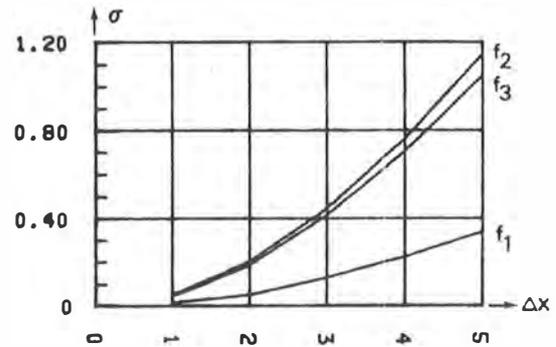


Abb. 2.12: AR-Fehler entsprechend Tabelle 2.1.

Abb. 2.12 zeigt deutlich einen nicht linearen Anstieg des AR-Fehlers mit größer werdendem Abtastintervall. Weiters illustriert die Abbildung, daß der AR-Fehler bei vorgegebenem Δx einerseits mit zunehmender Geländebewegtheit (Verlagerung der dominierenden Spektralkomponenten vom niederfrequenten Bereich bei f_1 zum hochfrequenten Bereich mit f_3 , Abb. 2.11) und andererseits mit zunehmenden Höhenunterschieden steigt. f_2 zeigt zwar eine geringere Bewegtheit als f_3 , jedoch größere Höhenunterschiede, d.h. die domierenden Anteile von f_2 sind von niedrigerer Frequenz als jene von f_3 , aber die Amplituden von f_2 sind insgesamt größer als die von f_3 (siehe Abb. 2.11).

Weiters deutet die Abb. 2.12 an, daß σ_S gegen Null konvergiert mit kleiner werdendem Intervall Δx , was sich auch auf Grund der ÜF (Abb. 2.8) erwarten läßt. Das Beispiel demonstriert die Gültigkeit der Formel (22) für ein Signal mit der Periode L , für das die Bedingung (9) erfüllt ist.

2.1.6. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des Abtast- und Rekonstruktionsfehlers

In 2.1.4. wurde davon ausgegangen, daß $f(x)$ ohne Fehler digitalisiert wurde. Im folgenden soll abgeschätzt werden, in welchem Maße sich ein rein zufälliger Meßfehler bei Verwendung der Formel (22) auf die Schätzung des AR-Fehlers $\hat{\sigma}_S$ auswirkt.

Statt der Werte $f(l)$ sind nur die Werte

$$g(l) = f(l\Delta) + m(l\Delta)$$

bekannt. Unkorreliertheit von Nutzsignal $f(l)$ und Störsignal $m(l)$ vorausgesetzt, gilt für das Spektrum von $g(l)$:

$$|G(k)|^2 = |F(k)|^2 + |M(k)|^2$$

Somit ergibt sich als Einfluß σ_D^2 eines Meßfehlers:

$$\sigma_D^2 = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (1 - H(u_k))^2 |M(k)|^2 \quad (23)$$

Für $\hat{\sigma}_S^2$ folgt daraus:

$$\hat{\sigma}_S^2 = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (1 - H(u_k))^2 |G(k)|^2 - \sigma_D^2 \quad (24)$$

Ist $m(l)$ bekannt (im Fall eines systematischen Fehlers aus einer Kalibrierung etwa), läßt sich $|M(k)|$ und somit sein Einfluß auf die Schätzung bestimmen. Im Fall eines rein zufälligen Meßfehlers aber ist $m(l)$ nicht bekannt; es ist nur sein stochastisches Verhalten durch Mittelwert Null, Varianz σ_M^2 und Korrelation Null definiert. Demgemäß läßt sich für $|M(k)|^2$ nur ein Erwartungswert angeben. Theoretisch sollte $|M(k)|$ konstant sein, die FFT einer Zufallsfolge liefert jedoch eine reichlich unregelmäßige Folge $|M(k)|^2$, deren Mittelwert $\frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |M(k)|^2$ aber dem Erwartungswert σ_M^2/N entspricht.

Ersetzt man somit $|M(k)|^2$ in (23) durch $\frac{\sigma_M^2}{N}$, erhält man:

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{\sigma_M^2}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (1 - H(u_k))^2$$

und als weitere Abstraktion

$$\hat{\sigma}_D^2 = \sigma_M^2 \frac{\Delta}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta}}^{\frac{\Delta x}{2\Delta}} (1 - H(u))^2 du$$

Es gilt nämlich: $u_{-N/2} = v_{-N/2} \Delta x = -\frac{N}{2L} \Delta x = -\frac{\Delta x}{2\Delta}$ und $u_{k+1} - u_k = \frac{\Delta x}{N\Delta}$ (vergl. 2.1.3., 2.1.4.).

Für $\Delta x < \Delta$ erhält man somit als Abschätzung des Einflusses eines zufälligen Fehlers $m(L)$:

$$\hat{\sigma}_D^2 = \sigma_M^2 \frac{2\Delta}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2\Delta}} (1 - H(u))^2 du \quad (25)$$

und für $\Delta x > \Delta$, da $H(u)$ als Null angenommen wird für $|u| > 1/2$ (Formel (15)):

$$\hat{\sigma}_D^2 = \sigma_M^2 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta x} (1 - T)\right) \quad (26)$$

T ist definiert als

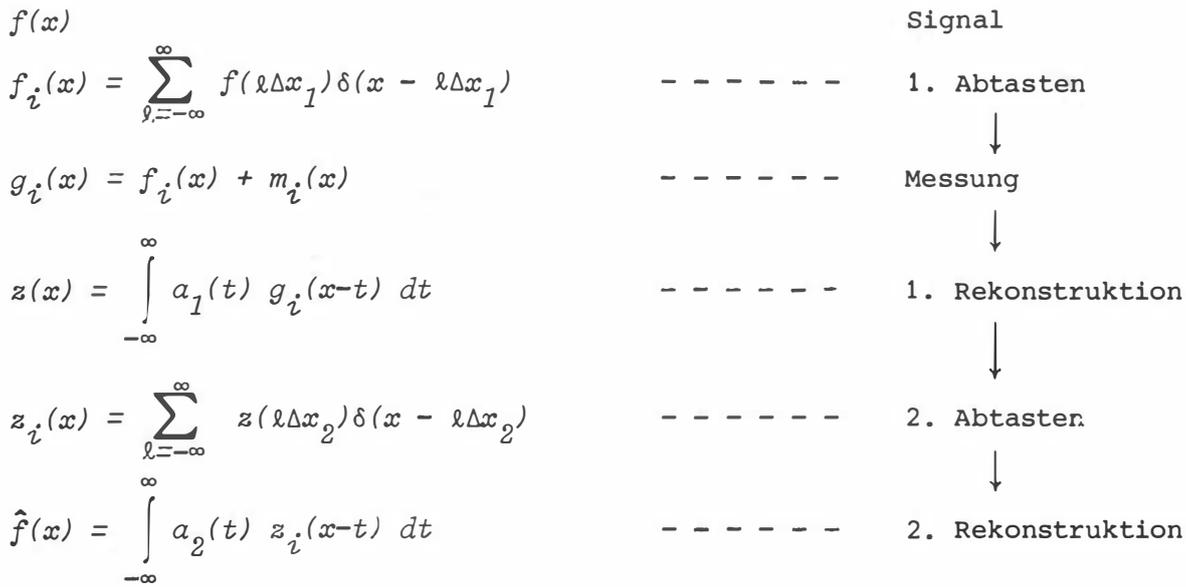
$$T = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - H(u))^2 du \quad (27)$$

und wird im folgenden als integrierte Varianzfunktion bezeichnet. Die Varianzfunktion $(1 - H(u))^2$ gibt die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion für eine Spektralkomponente mit der Frequenz $\nu = u/\Delta x$ und der Amplitude 1 an. Die Formeln (25) and (26) geben einen Erwartungswert für den Meßfehler einfluß an. Je nach Profillänge L wird der tatsächliche Einfluß eines rein zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung von σ_S^2 mehr oder weniger von $\hat{\sigma}_D^2$ abweichen.

2.1.7. Zweistufige Rekonstruktion

Als Zweistufige Rekonstruktion (ZR) wird ein Rekonstruktionsverfahren bezeichnet, bei dem das ursprüngliche, oftmals durch unregelmäßig verteilte Punkte festgelegte DHM zunächst zu einem engmaschigen Raster verdichtet wird, z.B. durch Interpolation nach kleinsten Quadraten (10). Im verdichteten Raster wird sodann ein einfaches Interpolationsverfahren, z.B. LI zur Geländedarstellung verwendet.

Eine ZR, im Fall einer äquidistanten Abtastung eines Profils, läßt sich folgendermaßen formulieren:



Dabei wird $z_i(x)$ (das sind die Werte im verdichteten Raster) als diskretes Signal aufgefaßt, das sich durch Abtasten von $z(x)$ mit $\Delta x_2 < \Delta x_1$ ergibt. $z(x)$ ist das kontinuierliche Signal, das aus der ersten Rekonstruktion mit der Gewichtsfunktion $a_1(t)$ gewonnen wurde.

Das Gesamtsystem läßt sich somit in zwei aufeinanderfolgende lineare Systeme zerlegen, das erste AR, durch $H_1(v\Delta x_1)$ charakterisiert, und das zweite AR, durch $H_2(v\Delta x_2)$ beschrieben. Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems, $H(v)$, ergibt sich jedoch nur näherungsweise als $H_1(v)H_2(v)$. Die ÜF beschreibt nämlich die Eigenschaften von AR für ein Signal dessen Spektrum jenseits von $1/2\Delta x$ verschwindet. $z(x)$ aber hat im allgemeinen ein erst im Unendlichen verschwindendes Spektrum. Denn $Z(v) = A_1(v)G_-(v)$ und $G_-(v)$ ist ein periodisches Abbild von $F(v)$ überlagert mit $M_i(v)$. $A_1(v)$ schwingt für die üblichen RV mehr oder weniger gedämpft nach Null (siehe z.B. Beispiel 3 in 2.1.1.). Durch das zweite Abtasten scheint $A_1(v)$ in einer verflochtenen Version in der Schätzformel auf (siehe Anhang 5). Nur im Extremfall der idealen Rekonstruktion, wo $A_1(v)$ exakt Null für $|v| \geq \frac{1}{2\Delta x_1}$ ist, kommt es zu keiner Verflechtung von $Z(v)$, da $1/2\Delta x_2 > 1/2\Delta x_1$ ist. Dadurch gilt $H(v) = H_1(v)H_2(v) = 1 \cdot H_2(v)$, was jedoch gleichdeutend ist mit einer einmaligen Abtastung von $f(x)$ mit Δx_2 und der Rekonstruktion mit der Gewichtsfunktion $a_2(t)$.

$$\sigma_S^2(\Delta x_1, \Delta x_2) \approx \int_{-\frac{1}{2\Delta x_1}}^{\frac{1}{2\Delta x_1}} (1 - H_1(v\Delta x_1)H_2(v\Delta x_2))^2 |F(v)|^2 dv \quad (28)$$

Formel (28) liefert lediglich einen Näherungswert, der im allgemeinen zu pessimistisch ausfallen wird, aber umso besser ist, je weniger sich die erste Rekonstruktion von Whittakers Interpolation unterscheidet.

Zu einer genaueren Bestimmung des AR-Fehlers einer ZR kann man $H(v)$ in analoger Weise, wie in 2.1.3. beschrieben, berechnen. Für jedes Verhältnis $\Delta x_1/\Delta x_2$ ergibt sich eine neue ÜF; die Umhüllenden dieser Schar sind $H_1(v)$ und $H_2(v)$.

$$\hat{\sigma}_S^2(\Delta x_1) = \int_{-\frac{1}{2\Delta x_1}}^{\frac{1}{2\Delta x_1}} (1 - H_{\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}}(v\Delta x_1))^2 |F(v)|^2 dv; |F(v)|^2 = 0, |v| \geq \frac{1}{2\Delta x_1} \quad (29)$$

Als Beispiel dient das Signal $f_3(x)$ aus 2.1.5., das mit kubischer Interpolation (KI) ($H_1(u)$ in Abb. 2.13) im ersten Gang und mit LI ($H_2(u)$ in Abb. 2.13) im zweiten Gang rekonstruiert werden soll.

Im OB wurde σ_S für drei Fälle geschätzt (siehe Tabelle 2.2).

Zum Vergleich sind in Tabelle 2.3 die entsprechenden AR-Fehler für ausschließlich KI bzw. LI angegeben. Die im FB mittels (28) berechneten mittleren Fehler sind aus Tabelle 2.4 ersichtlich, jene mit (29) gewonnenen Werte aus Tabelle 2.5.

Δx_1	Δx_2	$\hat{\sigma}_{OB}$
2	1	0.070
4	2	0.476
5	1	0.817

Tabelle 2.2:
AR-Fehler einer ZR, im OB berechnet (Dimensionen: (m)).

Δx_1	$\hat{\sigma}$	
	LI	KI
2	0.188	0.034
4	0.705	0.407
5	1.047	n. n. n.

Tabelle 2.3:
AR-Fehler bei linearer Interpolation und kubischer Interpolation.

Δx_1	Δx_2	$\hat{\sigma}_{FB}$
2	1	0.080
4	2	0.554
5	1	0.837

Tabelle 2.4:
AR-Fehler einer ZR, im FB mittels (28) berechnet.

Δx_1	$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \xi$	
	LI	KI
1	0.013	0.004
2	0.070	0.038
3	0.211	0.158
4	0.475	0.414
5	0.867	0.816

Tabelle 2.5:
AR-Fehler einer ZR, im FB mittels (29) berechnet.

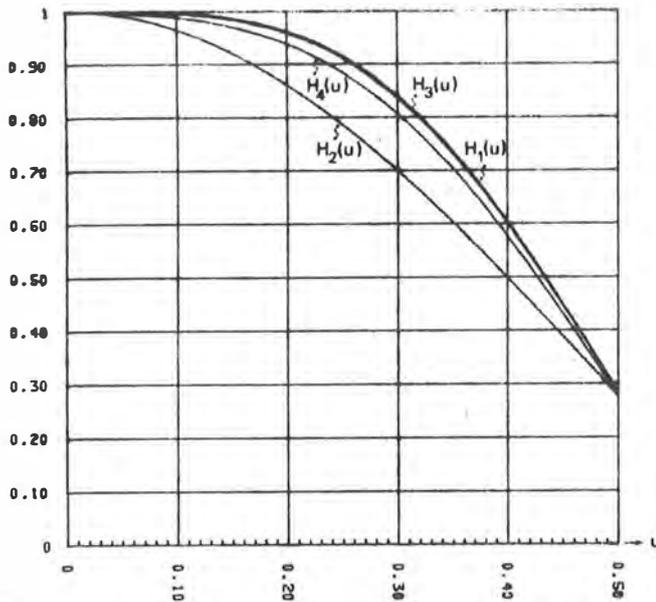


Abb. 2.13:
Übertragungsfunktionen der ZR
KI-LI.

$H_3(u)$ in Abb. 2.13 ist die ÜF für die ZR KI-LI bei einem Verdichtungsverhältnis $\Delta x_1/\Delta x_2 = 5$. In dem Abbildungsmaßstab ist $H_3(u)$ kaum von $H_1(u)$ zu unterscheiden, was sich auch in den geringen Unterschieden zwischen σ_S für KI und der ZR zeigt (Tabellen 2.2, 2.3). $H_4(u)$, die ÜF für das Verdichtungsverhältnis 2, liegt sichtlich unterhalb von $H_3(u)$; entsprechend sind die AR-Fehler größer als diejenigen für das Verdichtungsverhältnis 5. Die Übereinstimmung zwischen den im FB und jenen im OB berechneten AR-Fehlern (Tabellen 2.2, 2.5) ist im Bereich der Rechengenauigkeit, wobei hervorzuheben ist, daß $|F(v)| = 0$ für $|v| \geq 0.1$. Die mit Formel (28) errechneten Werte stellen nur Näherungswerte dar (Tabelle 2.4).

2.2. Genauigkeit einer Flächendarstellung

2.2.1. Varianzschätzung

Die Formeln für den dreidimensionalen Fall lassen sich als entsprechende Verallgemeinerung der Beziehungen für den zweidimensionalen Fall aufstellen:

Die Geländeoberfläche, als kontinuierliches Signal $f(x,y)$ bezeichnet, das die Geländehöhe in Funktion der zwei Lagekoordinaten x und y angibt, wird durch AR in $\hat{f}(x,y)$ übergeführt. Das rekonstruierte Signal $\hat{f}(x,y)$ ist die Darstellung der Fläche $f(x,y)$ auf dem Gebiet $LX.LY$ durch das DHM. Analog zu (1) wird die Varianz des DHM-Fehlers definiert als:

$$\sigma^2 = \frac{1}{LX LY} \int_0^{LY} \int_0^{LX} e^2(x,y) dx dy ; e(x,y) = f(x,y) - \hat{f}(x,y) \quad (31)$$

Durch die Geländeaufnahme in einem Rechtecksraster mit der Maschengröße $\Delta x, \Delta y$ werden die Referenzdaten $g_i(x,y)$ des DHM gewonnen:

Den Beziehungen (2) und (3) entsprechend gilt für $LX \rightarrow \infty, LY \rightarrow \infty$:²⁾

$$f_i(x,y) = \sum_{lx=-\infty}^{\infty} \sum_{ly=-\infty}^{\infty} f(lx\Delta x, ly\Delta y) \delta(x-lx\Delta x, y-ly\Delta y) \quad (32)$$

$$g_i(x,y) = f_i(x,y) + m_i(x,y) \quad (33)$$

$\delta(x,y)$ ist die bivariate Dirac Deltafunktion (siehe Anhang 3), $m_i(x,y)$ ist der Meßfehler. Mit der Datenmenge $g_i(x,y)$ und der RV des DHM ist die Flächendarstellung $\hat{f}(x,y)$ festgelegt. Für lineare RV ergibt sich $\hat{f}(x,y)$ als Faltung von $g_i(x,y)$ mit der Gewichtsfunktion $a(s,t)$:

$$\hat{f}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(s,t) g_i(x-s, y-t) ds dt \quad (34)$$

Durch den Übergang vom OB in den FB wird aus dem zweidimensionalen Faltungsintegral (34) eine Multiplikation (siehe Anhang 2):

$$\hat{F}(v,\mu) = A(v,\mu) G_i(v,\mu) \quad (35)$$

Die Systemfunktion der RV

$$A(v,\mu) = \mathbf{F}\{a(s,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(s,t) e^{-j(2\pi vs + 2\pi \mu t)} ds dt ; j = \sqrt{-1} \quad (36)$$

gibt das Verhältnis der Amplituden vor und nach der Rekonstruktion an.

$|\hat{F}(v,\mu)| = |\mathbf{F}\{\hat{f}(x,y)\}|$ ist das Amplitudenspektrum des rekonstruierten Signals,

$|G_i(v,\mu)| = |\mathbf{F}\{g_i(x,y)\}|$ das Amplitudenspektrum des diskreten Signals $g_i(x,y)$.

$A(v,\mu)$ ist eine reelle, gerade Funktion von v und μ , wenn $a(s,t)$ eine reelle, gerade Funktion von s und t ist ($A(v,\mu) = A(-v,\mu) = A(v,-\mu) = A(-v,-\mu)$).

²⁾ Hinweis zur Notation: Als Indices im OB werden lx und ly verwendet, die die ganzen Zahlen durchlaufen; $x_{lx} = lx\Delta x, y_{ly} = ly\Delta y$. Im FB dienen kx und ky als Indices.

Beispiel 4: Gewichtsfunktion und SF einer Sprunginterpolation (Analogon zu Beispiel 1, 2.1.1.):

$$a(s, t) = a_x(s) a_y(t)$$

$$a_x(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & -\Delta x < s \leq \Delta x \\ 0; & s \leq -\Delta x, s > \Delta x \end{cases}$$

$$a_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & -\Delta y < t \leq \Delta y \\ 0; & t \leq -\Delta y, t > \Delta y \end{cases}$$

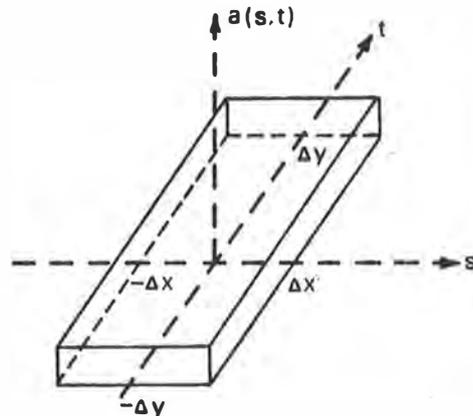
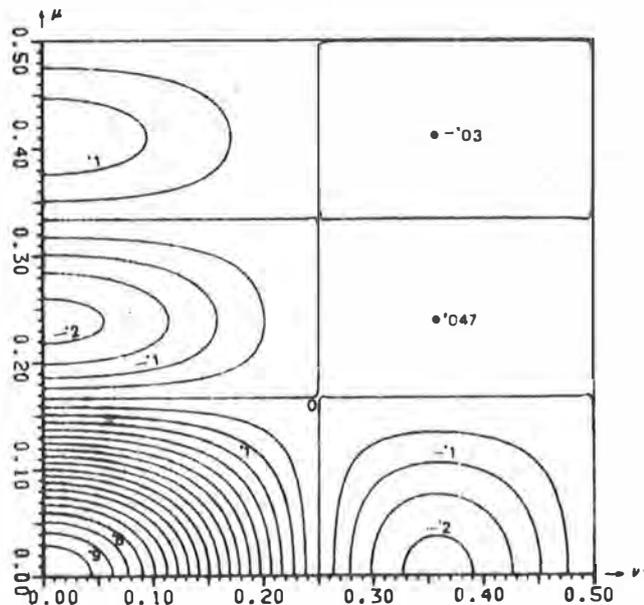


Abb. 2.14: Gewichtsfunktion einer Sprunginterpolation.

$$A(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} a_x(s) e^{-j2\pi\nu s} ds \int_{-\infty}^{\infty} a_y(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = A_x(\nu) A_y(\mu)$$

$$A_x(\nu) = \frac{1}{2} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \cos(2\pi\nu s) ds = \Delta x \frac{\sin(2\pi\nu\Delta x)}{2\pi\nu\Delta x}; \quad A_y(\mu) = \Delta y \frac{\sin(2\pi\mu\Delta y)}{2\pi\mu\Delta y}$$

Abb. 2.15: Normierte Systemfunktion $\tilde{A}(\nu, \mu) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} A(\nu, \mu)$ einer Sprunginterpolation für $\Delta x = 2$, $\Delta y = 3$ und $0 \leq \nu, \mu \leq 1/2$.



Beispiel 5: Gewichtsfunktion und SF der bilinearen Interpolation (BLI) (Analogon zu Beispiel 2, 2.1.1.). Als BLI wird eine RV bezeichnet, bei der zuerst linear in der x-Richtung und dann linear in der y-Richtung (oder umgekehrt) interpoliert wird, was gleichbedeutend ist mit dem Polynomansatz $\hat{f}(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy$ per Rastermasche.

$$a(s, t) = a_x(s) a_y(t)$$

$$a_x(s) = \begin{cases} 1 - \frac{|s|}{\Delta x}, & |s| \leq \Delta x \\ 0, & |s| > \Delta x \end{cases}$$

$$a_y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\Delta y}, & |t| \leq \Delta y \\ 0, & |t| > \Delta y \end{cases}$$

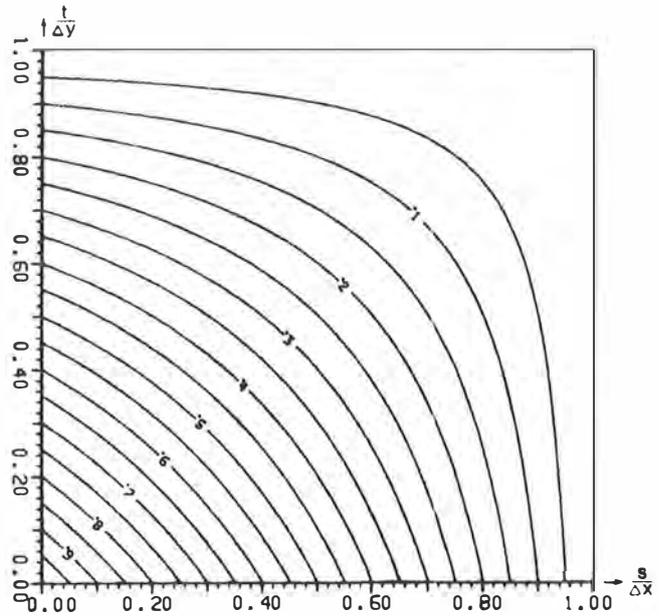


Abb. 2.16: Gewichtsfunktion der BLI.

$$A(\nu, \mu) = F(a_x(s)) F(a_y(t)) = A_x(\nu) A_y(\mu) =$$

$$= \Delta x \left(\frac{\sin \pi \nu \Delta x}{\pi \nu \Delta x} \right)^2 \Delta y \left(\frac{\sin \pi \mu \Delta y}{\pi \mu \Delta y} \right)^2 \quad (\text{vergl. Beispiel 3, 2.1.1.})$$

Der mittlere DHM-Fehler lässt sich im OB analog zu (7) schätzen:

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{1}{n_x' n_y'} \sum_{l_x=1}^{n_x'} \sum_{l_y=1}^{n_y'} |e'(l_x \Delta x', l_y \Delta y')|^2 - \sigma_M^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

Dabei ist $n_x' \Delta x' = LX$, $n_y' \Delta y' = LY$; $\Delta x' < \Delta x$, $\Delta y' < \Delta y$ und σ_M^2 , die Varianz eines rein zufälligen Fehlers bei den Kontrollmessungen.

Im FB ergibt sich, ausgehend von einem unendlichen Gebiet $LX \cdot LY$:

$$\sigma^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |E(\nu, \mu)|^2 |d\nu d\mu| \quad (38)$$

$$E(\nu, \mu) = F(e(x, y)) = F(\nu, \mu) - \hat{F}(\nu, \mu)$$

$$= F(\nu, \mu) - A(\nu, \mu) (F_z(\nu, \mu) + M_z(\nu, \mu))$$

Geht man davon aus, daß

$$F(v, \mu) = 0 \text{ für } |v| \geq v_N = \frac{1}{2\Delta x}, \quad |\mu| \geq \mu_N = \frac{1}{2\Delta y} \quad (39)$$

dann ist die Fouriertransformierte $F_z(v, \mu)$ des abgetasteten Signals $f_z(x, y)$ ein periodisches Abbild der Transformierten $F(v, \mu)$ des kontinuierlichen Signals $f(x, y)$ (siehe Anhang 3):

$$F(v, \mu) = \begin{cases} \Delta x \Delta y F_z(v, \mu), & |v| < v_N, |\mu| < \mu_N \\ 0, & |v| \geq v_N, |\mu| \geq \mu_N \end{cases} \quad (40)$$

Daraus folgt:

$$E(v, \mu) = \begin{cases} (\Delta x \Delta y - A(v, \mu)) F_z(v, \mu) - A(v, \mu) M_z(v, \mu), & |v| < v_N, |\mu| < \mu_N \\ -A(v, \mu) F_z(v, \mu) - A(v, \mu) M_z(v, \mu), & |v| \geq v_N, |\mu| \geq \mu_N \end{cases}$$

$$|E(v, \mu)|^2 = \begin{cases} (\Delta x \Delta y - A(v, \mu))^2 |F_z(v, \mu)|^2 + A^2(v, \mu) |M_z(v, \mu)|^2, & |v| < v_N, |\mu| < \mu_N \\ A^2(v, \mu) |F_z(v, \mu)|^2 + A^2(v, \mu) |M_z(v, \mu)|^2, & |v| \geq v_N, |\mu| \geq \mu_N \end{cases}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß der Meßfehler nicht mit der gemessenen Größe korreliert ist.

Für die Varianz des DHM-Fehlers erhält man somit:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\mu_N}^{\mu_N} \int_{-v_N}^{v_N} \left(1 - \frac{1}{\Delta x \Delta y} A(v, \mu)\right)^2 |F(v, \mu)|^2 dv d\mu + \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} A^2(v, \mu) |F_z(v, \mu)|^2 dv d\mu - \int_{-\mu_N}^{\mu_N} \int_{-v_N}^{v_N} A^2(v, \mu) |F_z(v, \mu)|^2 dv d\mu + \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty} A^2(v, \mu) |M_z(v, \mu)|^2 dv d\mu = \sigma_S^2 + \sigma_R^2 \end{aligned} \quad (41)$$

Ist $m_i(x, y)$ ein rein zufälliger Meßfehler, mit der Varianz σ_M^2 , so folgt für die Meßfehlerauswirkung σ_R^2 :

$$\sigma_R^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} A^2(v, \mu) |M_i(v, \mu)|^2 dv d\mu$$

$$\sigma_R^2 = \sigma_M^2 4 \iint_0^{\infty} A^2(v, \mu) dv d\mu \quad ; \quad \Delta x = \Delta y = 1 \quad (42)$$

Führt man die Übertragungsfunktion $H(v, \mu)$ ein, die das System AR beschreibt, so ergibt sich für die Varianz σ_S^2 des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion die einfache Formel:

$$\sigma_S^2 = \int_{-\mu_N}^{\mu_N} \int_{-\nu_N}^{\nu_N} (1 - H(v, \mu))^2 |F(v, \mu)|^2 dv d\mu \quad (43)$$

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formel (43) sind: Unendliches Gebiet LX, LY sowie Erfüllung der Bedingung (39).

Verwendet man $H(v, \mu)$ statt $A(v, \mu)$ auch zur Bestimmung der Auswirkung eines rein zufälligen Meßfehlers, so erhält man einen Näherungswert:

$$\sigma_R^2 \approx 4\Delta x \Delta y \sigma_M^2 \int_0^{\frac{1}{2\Delta y}} \int_0^{\frac{1}{2\Delta x}} H^2(v, \mu) dv d\mu$$

$$\hat{\sigma}_R^2 = \hat{R} \sigma_M^2 \quad ; \quad \hat{R} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} H^2(u, v) du dv \quad ; \quad u = v\Delta x, \quad v = \mu\Delta y \quad (44)$$

Für den Fall der Rekonstruktion durch BLI z.B. ergibt sich (siehe Beispiel 5 und Seite 12):

$$\sigma_R^2 = \sigma_M^2 \int_0^{\infty} A_x^2(v) dv \int_0^{\infty} A_y^2(\mu) d\mu = (2/3)^2 \sigma_M^2 = 0.44 \sigma_M^2$$

Ist die Bedingung (39) nicht erfüllt, so kommt es - wie im zweidimensionalen Fall beschrieben - zu einem Verflechtungseffekt. Nimmt man jedoch vereinfachend an, daß die nicht richtig erfaßten Hochfrequenzen $|v| \geq v_N, |\mu| \geq \mu_N$ nicht zu einer Spektrumverformung führen, sondern nur eliminiert werden, so erhält man die Schätzformel:

$$\sigma_S^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} (1-H(v, \mu))^2 |F(v, \mu)|^2 dv d\mu \quad \text{mit } H(v, \mu) = 0 \text{ für } |v| \geq v_N, |\mu| \geq \mu_N \quad (45)$$

2.2.2. Übertragungsfunktion

Die Darstellung einer stetigen Funktion $f(x, y)$ auf dem Gebiet LX, LY durch eine Summe periodischer Funktionen - analog zum zweidimensionalen Fall

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j2\pi \frac{k}{L} x} = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sin(2\pi \frac{k}{L} x + \phi_k)$$

- läßt sich am einfachsten in komplexer Notation schreiben:

$$f(x, y) = \sum_{kx=-\infty}^{\infty} \sum_{ky=-\infty}^{\infty} \alpha_{kxky} e^{j(kx \omega x + ky \psi y)}; \quad \omega = \frac{2\pi}{LX}, \quad \psi = \frac{2\pi}{LY}$$

Dies entspricht einer Überlagerung von bivariaten, harmonischen Sinuswellen des Typs $p_1 \sin(2\pi\omega x + 2\pi\mu y + \phi_1)$ und $p_2 \sin(2\pi\omega x - 2\pi\mu y + \phi_2)$.

Solange ausschließlich lineare RV betrachtet werden (Bedingung (34)) läßt sich das Verhalten von AR and Hand einer Sinuswelle untersuchen. Die ÜF gibt das Verhältnis zwischen der Ausgangsamplitude und der Eingangsamplitude einer bivariaten Sinuswelle an:

$$\frac{P_A}{P_E} = H(v, \Delta x, \mu, \Delta y) \quad (46)$$

Dabei ist die Ausgangsamplitude entsprechend (16) definiert. Im Anhang 6 ist die analytische Ableitung der ÜF für den Fall der BLI skizziert.

Für die BLI sowie für andere lineare RV, deren Gewichtsfunktion eine reelle, gerade Funktion der Variablen s und t ist, zeigt die ÜF die folgenden Eigenschaften:

- Die Abhängigkeit von v (Frequenz in der x -Richtung gezählt) und von Δx (Abtastintervall in der x -Richtung) scheint nur in Form des Produkts $v\Delta x = u$ auf. Gleichermaßen läßt sich die Frequenz μ (in der y -Richtung gezählt) und das Abtastintervall Δy durch $\mu\Delta y = v$ ersetzen:

$$H(v, \Delta x, \mu, \Delta y) = H(u, v) \quad (47)$$

u, v sind die reziproken Abtastdichten in der x - bzw. y -Richtung.

- Die ÜF ist eine gerade Funktion von u und v d.h. $H(u, v) = H(-u, v) = H(u, -v) = H(-u, -v)$. Darüber hinaus gilt $H(u, v) = H(v, u)$, wodurch $H(u, v)$ nur für einen halben Quadranten berechnet werden muß. Aus diesen Symmetriegründen ist es auch ausreichend, die Sinuswelle vom ersten Typ, $p \sin(2\pi v x + 2\pi \mu y + \phi)$ zur Berechnung heranzuziehen.
- Wenn sich AR auf ein unendlich großes Gebiet $LX.LY$ bezieht, äußert sich die Phasenabhängigkeit der ÜF in Form von Unstetigkeitsstellen. Wird durch die RV nicht noch zusätzlich eine Ortsvarianz (zu der des Abtastsystems) eingebaut, so treten die Unstetigkeiten an den Stellen $(u = 1/2, v = 0)$, $(u = 0, v = 1/2)$ und $(u = 1/2, v = 1/2)$ auf. Beschränkt man somit den Definitionsbereich von $H(u, v)$ auf $|u|, |v| < 1/2$, dann ist die ÜF eine Funktion nur der Abtastdichte in der x - und y -Richtung.
- Im allgemeinen ist die ÜF nicht trennbar - d.h. $H(u, v) \neq H(u)H(v)$ - selbst dann nicht, wenn die entsprechende SF in zwei Komponenten zerlegbar ist. So gilt z.B. für die BLI $A(v, \mu) = A_x(v)A_y(\mu)$, wobei $A_x(v)$ die SF der LI ist (siehe Beispiel 5). Der Unterschied zwischen der ÜF der BLI und $\bar{H}(u, v) = H(u)H(v)$, wobei $H(u)$ die ÜF der LI ist, ist in Abb. 3.21 dargestellt. Der Unterschied zwischen $H(u, v)$ und $\bar{H}(u, v)$ ist maximal für $u=v$; für $u=0$ bzw. $v=0$ gilt $H(u, v) = \bar{H}(u, v)$.

Die Abweichung der trennbaren Funktion $\bar{H}(u, v)$ von $H(u, v)$ ist zumindest für die in Abschnitt 3 verwendeten RV so gering, daß $\bar{H}(u, v)$ zur Genauigkeitsschätzung völlig ausreicht. Dennoch ist hier in Kürze das Berechnungsprinzip für $H(u, v)$ angegeben (vergl. Seite 17 und 18):

Die Funktion $f(x, y) = \sin(2\pi v_0 x + 2\pi \mu_0 y)$ wird nacheinander mit den Maschengrößen $\Delta x_{kx} \cdot \Delta y_{ky}$ abgetastet; $kx = 0, 1, \dots, m$, $ky = kx, kx+1, \dots, m$. Für jede Maschengröße wird ein engmaschiges Raster interpoliert mit $\Delta x' = \Delta x_{kx}/q$ und $\Delta y' = \Delta y_{ky}/q$ über das Gebiet $LX.LY$; $LX = nx\Delta x_{kx}$, $LY = ny\Delta y_{ky}$.

Aus den Unterschieden zwischen den Werten der ursprünglichen Funktion $f(x,y)$ und den interpolierten Werten läßt sich die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion schätzen:

$$\hat{\sigma}_{kxky}^2 = \frac{1}{n_x n_y q^2} \sum_{jx=1}^{q n_x} \sum_{jy=1}^{q n_y} e_{kxky}^2(jx\Delta x', jy\Delta y')$$

Der Wert der ÜF für $u_{kx} = v_0 \Delta x_{kx}$, $v_{ky} = \mu_0 \Delta y_{ky}$ errechnet sich sodann als

$$H(u_{kx}, v_{ky}) = 1 - \sqrt{2\hat{\sigma}_{kxky}^2} \quad (48)$$

Für die in Abschnitt 3 verwendeten ÜF wurde die folgende Parameterwahl getroffen:

- i) $\Delta x_{kx} = kx$, $\Delta y_{ky} = ky$; $v_0 = \mu_0 = \frac{1}{2m}$
- ii) $m = 100$
- iii) $n_x \Delta x_{kx} = \frac{N}{2v_0}$, $n_y \Delta y_{ky} = \frac{N}{2\mu_0}$; $N = 1, 2, \dots$ (49)
- iv) $q = 10$

Das Flußdiagramm entspricht jenem der Abb. 2.9, die Schleife für k ist nun eine Doppelschleife für kx und ky , die Schleife für l eine Doppelschleife für lx und ly .

2.2.3. Leistungsspektrum

Wie im zweidimensionalen Fall bietet sich die DFT zur Spektrumbestimmung an. Bei äquidistanter Digitalisierung von $f(x,y)$ pro Koordinatenrichtung läßt sie sich mit dem FFT Algorithmus berechnen. Erfolgt die Abtastung in einem Rechtecksraster mit der Maschengröße $\Delta_x \cdot \Delta_y$, dann gilt:

$$N_x \Delta_x = LX, \quad N_y \Delta_y = LY$$

Die $N_x \cdot N_y$ Werte

$$f(lx, ly) = f(lx \Delta_x, ly \Delta_y); \quad \begin{array}{l} lx = 0, 1, \dots, N_x - 1 \\ ly = 0, 1, \dots, N_y - 1 \end{array}$$

werden in $N_x N_y$ Werte transformiert:

$$F(kx, ky) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{lx=0}^{N_x-1} \sum_{ly=0}^{N_y-1} f(lx, ly) e^{-j2\pi \left(\frac{lx}{N_x} kx + \frac{ly}{N_y} ky \right)} \quad (51)$$

$$kx = 0, 1, \dots, N_x-1$$

$$ky = 0, 1, \dots, N_y-1$$

$|F(kx, ky)|$ ist die Amplitude der Spektralkomponente mit der Frequenz $\nu = kx/LX$ in der x-Richtung und $\mu = ky/LY$ in der y-Richtung. Um das diskrete Spektrum für $-N_1 \leq kx \leq N_1-1$, $-N_2 \leq ky \leq N_2-1$ zu erhalten, muß die Matrix, die man aus der FFT erhält, umgespeichert werden (siehe Abb. 2.17):

- 2 : $F(-kx, ky) = F(N_x - kx, ky)$
 $kx = 1, 2, \dots, N_1$
 $ky = 0, 1, \dots, N_2-1$
- 4 : $F(kx, -ky) = F(kx, N_y - ky)$
 $ky = 1, 2, \dots, N_2$
 $kx = 0, 1, \dots, N_1-1$
- 3 : $F(-kx, -ky) = F(N_x - kx, N_y - ky)$
 $kx = 1, 2, \dots, N_1$
 $ky = 1, 2, \dots, N_2$

Dabei ist:

$$N_1 = N_x/2, \quad N_2 = N_y/2$$

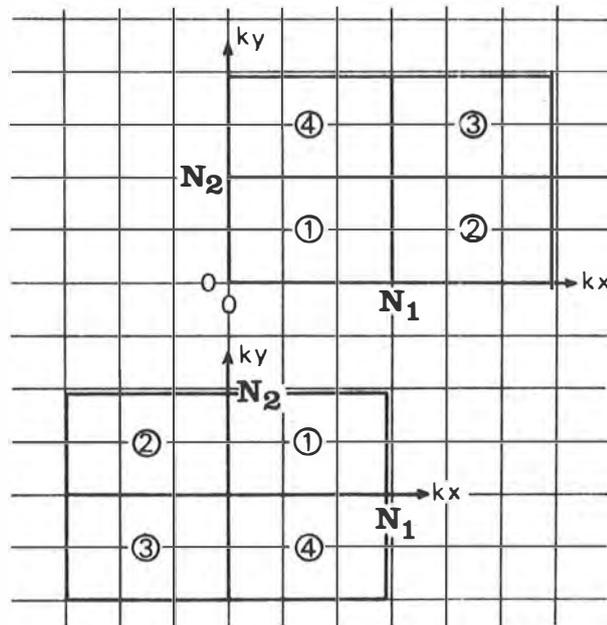


Abb. 2.17: Umspeicherung der bivariaten FFT

Nach der Umspeicherung gilt: $|F(kx, ky)| = |F(-kx, -ky)|$ und $|F(-kx, ky)| = |F(kx, -ky)|$. Durch die DFT sind die Amplituden und Phasenwinkel der (endlichen) Reihe $\bar{f}(x, y)$ von Sinuswellen festgelegt. $\bar{f}(x, y)$ stellt eine Approximation von $f(x, y)$ dar (siehe Seite 33 und Seite 20 zum Vergleich):

$$\left. \begin{aligned} p_{1, kxky}^2 &= 4 \left(RF(kx, ky)^2 + IF(kx, ky)^2 \right) \\ \phi_{1, kxky} &= \arctan(RF(kx, ky)/IF(kx, ky)) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq kx \leq N_1, \quad 0 \leq ky \leq N_2$$

$$\left. \begin{aligned} p_{2, kxky}^2 &= 4 \left(RF(kx, -ky)^2 + IF(kx, -ky)^2 \right) \\ \phi_{2, kxky} &= \arctan(RF(kx, -ky)/IF(kx, -ky)) \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq kx \leq N_1-1, \quad 1 \leq ky \leq N_2-1$$

Dabei gelten die folgenden Ausnahmen: $p_{00} = RF(0,0)$, $p_{0N_2} = RF(0, N_2)$,
 $p_{N_1 0} = RF(N_1, 0)$, $p_{N_1 N_2} = RF(N_1, N_2)$.

Ist $f(x,y)$ eine periodische Funktion auf $LX.LY$ mit harmonischen Frequenzen
 $v < 1/2\Delta_x$, $\mu < 1/2\Delta_y$, dann ist $|F(kx, ky)|^2$ gerade das Leistungsspektrum von $f(x,y)$
 Anderfalls ist die DFT eine Näherung für $F(v, \mu)$.

Bei Verwendung der DFT wird aus der Schätzformel (45):

$$\hat{\sigma}_S^2(\Delta x, \Delta y) = \sum_{kx=-N_1}^{N_1-1} \sum_{ky=-N_2}^{N_2-1} (1 - H(u_{kx}, v_{ky}))^2 |F(kx, ky)|^2 ; \quad \begin{matrix} u_{kx} = \Delta x \frac{kx}{LX} \\ v_{ky} = \Delta y \frac{ky}{LY} \end{matrix} \quad (52)$$

Da die Werte, die für die Berechnung des Spektrums zur Verfügung stehen, niemals fehlerfrei sind, ist im folgenden noch der Einfluß eines rein zufälligen Meßfehlers auf die Varianzschätzung angegeben: Liegen statt $f(lx, ly)$ die Werte

$$g(lx, ly) = f(lx, ly) + m(lx, ly)$$

vor, so gilt, wenn f und m nicht miteinander korreliert sind:

$$|G(kx, ky)|^2 = |F(kx, ky)|^2 + |M(kx, ky)|^2$$

Aus (52) wird dadurch:

$$\hat{\sigma}_S^2 = \sum_{kx=-N_1}^{N_1-1} \sum_{ky=-N_2}^{N_2-1} (1 - H(u_{kx}, v_{ky}))^2 |G(kx, ky)|^2 - \sigma_D^2 \quad (53)$$

Setzt man das Spektrum $|M(kx, ky)|^2$ gleich seinem Erwartungswert - wenn $m(lx, ly)$ ein rein zufälliger Meßfehler mit der Varianz σ_M^2 ist - erhält man als Abschätzung des Meßfehlereinflusses:

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{\sigma_M^2}{N_x N_y} \sum_{kx=-N_1}^{N_1-1} \sum_{ky=-N_2}^{N_2-1} (1 - H(u_{kx}, v_{ky}))^2 \quad (54)$$

Faßt man die Doppelsumme als Näherung eines Doppelintegrals auf, folgt weiter:

$$\hat{\sigma}_D^2 = \sigma_M^2 \frac{\Delta_x \Delta_y}{\Delta x \Delta y} \int_{-\frac{\Delta y}{2\Delta_y}}^{\frac{\Delta y}{2\Delta_y}} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta_x}}^{\frac{\Delta x}{2\Delta_x}} (1 - H(u, v))^2 du dv \quad (55)$$

Denn es gilt: $u_{k_{xx}+1} - u_{k_{xx}} = \frac{\Delta x}{LX} = \frac{\Delta x}{N_x \Delta x}$, $v_{k_{yy}+1} - v_{k_{yy}} = \frac{\Delta y}{LY} = \frac{\Delta y}{N_y \Delta y}$

$$u_{-N_1} = -\frac{N_x}{2LX} = -\frac{\Delta x}{2\Delta x}, \quad v_{-N_2} = -\frac{\Delta y}{2\Delta y}$$

Für $\Delta x > \Delta x$, $\Delta y > \Delta y$ ergibt sich somit $(H(u, v) = 0$ für $|u| > \frac{1}{2}$, $|v| > \frac{1}{2}$):

$$\hat{\sigma}_D^2 = \sigma_M^2 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - H(u, v))^2 dudv + \int_{\frac{-\Delta y}{2\Delta y}}^{\frac{\Delta y}{2\Delta y}} \int_{\frac{-\Delta x}{2\Delta x}}^{\frac{\Delta x}{2\Delta x}} dudv - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dudv \right\}$$

$$\hat{\sigma}_D^2 = \sigma_M^2 \left(1 - \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} (1 - T) \right) \tag{56}$$

$$T = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - H(u, v))^2 dudv \tag{57}$$

2.2.4. Beispiel

Um die AR-Fehlerschätzung für den dreidimensionalen Fall an Hand eines Beispiels zu demonstrieren, sei die Funktion

$$f(x, y) = \sum_{k_x=0}^{10} \sum_{k_y=0}^5 \left\{ p_{1, k_x k_y} \sin(2\pi v_{k_x} x + 2\pi u_{k_y} y + \phi_{1, k_x k_y}) + p_{2, k_x k_y} \sin(2\pi v_{k_x} x - 2\pi u_{k_y} y + \phi_{2, k_x k_y}) \right\}$$

gewählt, die sich als Überlagerung von "Wellblechen" interpretieren läßt. Jedes einzelne "Wellblech" hat eine andere Richtung, Frequenz und Amplitude, wobei unter "Wellblech" eine bivariate Sinuswelle mit der Frequenz $1/\lambda$ in der Richtung β und mit der Frequenz Null in der dazu orthogonalen Richtung verstanden wird (siehe Abb. 2.18).

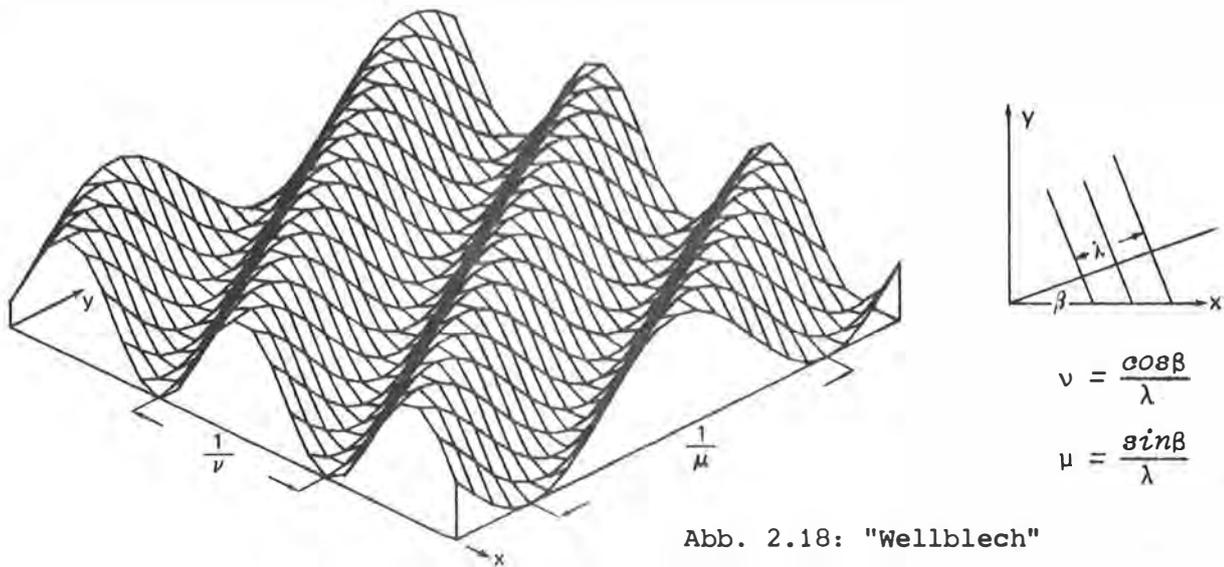


Abb. 2.18: "Wellblech"

Parameterwahl:

$$0 < x < LX = 2000 \text{ m}$$

$$0 < y < LY = 2000 \text{ m}$$

$$\nu_{kx} = \frac{kx}{LX}, \quad \nu_{ky} = \frac{ky}{LY}$$

p_1, p_2 sind Zufallswerte zwischen 0 und 1

ϕ_1, ϕ_2 sind Zufallswerte zwischen 0 und 2π

Die Werte für p_2 mit den Indices $\{kx 0, 0 ky, kx 5, 10 ky\}$ sowie für ϕ_1 mit den Indices $\{0 0, 10 0, 0 5\}$ sind Null.

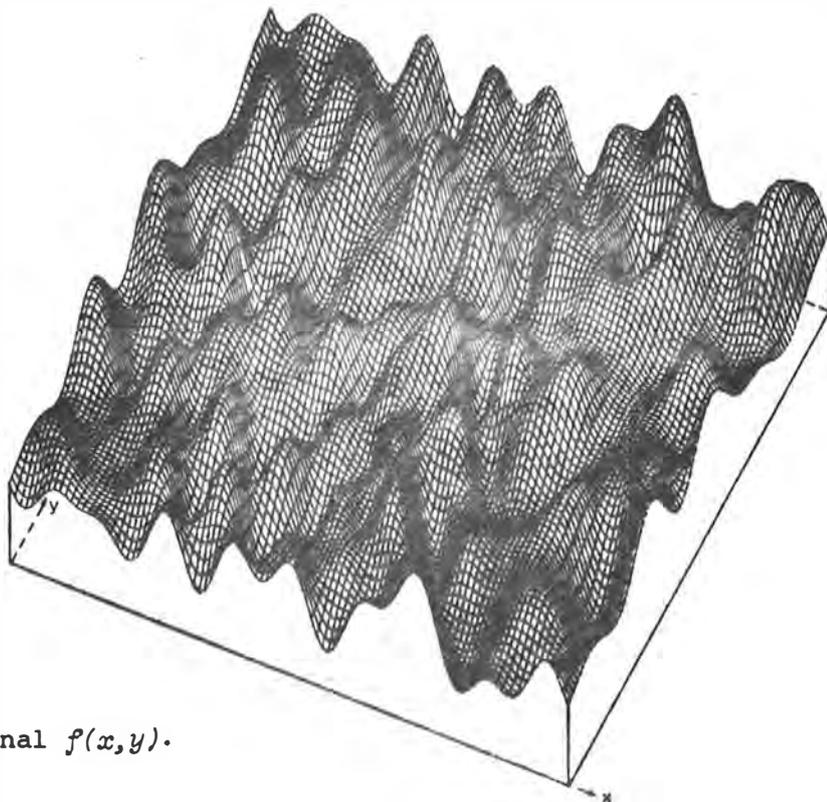


Abb. 2.19: Signal $f(x,y)$.

Das Spektrum von $f(x,y)$ ist in Abb. 2.20 dargestellt, die Funktion selbst als axonometrische Zeichnung in Abb. 2.19.

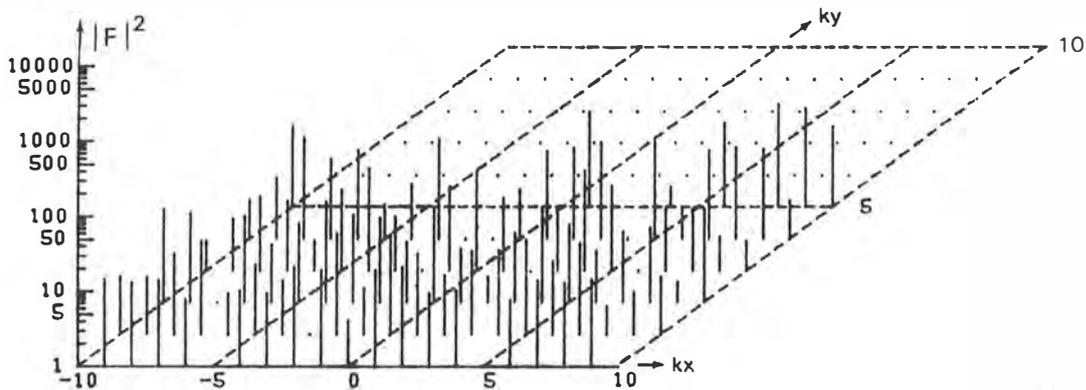


Abb. 2.20: Spektrum von $f(x,y)$.

Mit obigen Annahmen ergibt sich nach (39) als maximale Abtastintervallgröße für ein Quadratraster $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 100 \text{ m}$. In Tabelle 2.6 sind die im OB und FB geschätzten AR-Fehler für 5 Maschenweiten $\Delta x = \Delta y = \Delta xy$ und BLI zusammengestellt.

$\Delta xy \text{ (m)}$	$\hat{\sigma}_{OB} \text{ (m)}$	$\hat{\sigma}_{FB}$	$\bar{\sigma}_{FB}$
40	0.325	0.325	0.332
80	1.17	1.17	1.20
100	1.69	1.69	1.74
200	3.86	3.48	3.52
1000	6.18	4.57	4.57

Tabelle 2.6: AR-Fehler im OB und FB geschätzt.

$\hat{\sigma}_{OB}$ wurde nach (37) mit $\sigma_{M'} = 0$ berechnet; $\hat{\sigma}_{FB}$ wurde nach (52) mit der ÜF der BLI gerechnet und $\bar{\sigma}_{FB}$ ebenfalls nach (52) aber mit der trennbaren Funktion $\bar{H}(u,v)$ (siehe Seite 34).

Der Vergleich von $\hat{\sigma}_{OB}$ mit $\hat{\sigma}_{FB}$ zeigt die Gültigkeit der Formel (52) für ein periodisches Signal, solange (39) erfüllt ist. Die Maschenweiten 200 m und 1000 m sind für die verwendete Fläche $f(x,y)$ zu groß, dementsprechend gibt $\hat{\sigma}_{FB}$ nur mehr näherungsweise den AR-Fehler an. Der Unterschied zwischen $\hat{\sigma}_{FB}$ und $\bar{\sigma}_{FB}$ ist nicht wesentlich größer als die Rechengenauigkeit.

3. EMPIRISCHE UNTERSUCHUNG

Im folgenden wird eine Reihe von Experimenten beschrieben, die die Leistungsfähigkeit des Verfahrens und die Grenzen der Anwendbarkeit der hergeleiteten Schätzformeln aufzeigen sollen. Darüber hinaus sollen die Beispielrechnungen in Ergänzung zum theoretischen Abschnitt die Abhängigkeit der Genauigkeit eines DHM von den verschiedenen Einflußfaktoren verdeutlichen.

3.1. Testdaten

Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, Geländemerkmale wie etwa Bewuchs und Bebauung in die Genauigkeitsuntersuchung einzubeziehen. Nur die geometrische Geländebeschaffenheit, Abtastintervallgröße, RV und ein zufälliger Meßfehler werden als Einflußfaktoren berücksichtigt.

3.1.1. Gelände

Die Erfassung und Darstellung einer Geländeoberfläche ist an einen Maßstab gebunden. Unter obiger Zielsetzung ist es jedoch nicht wichtig, welcher Maßstab für diese Untersuchung gewählt wird. Ziemlich willkürlich fiel die Wahl auf eine Darstellung der Geländehöhenverhältnisse in mittlerem Maßstab, nämlich 1:50.000. Für eine entsprechende Höhenlinienkartierung mit einem Höhenlinienabstand zwischen 10 m und 50 m ergäbe sich als Genauigkeitsanforderung an das DHM ein mittlerer Höhenfehler in der Größenordnung von etwa 2 m bis 10 m. Als Größe eines Testgebietes wurde $8 \times 12 \text{ km}^2$ gewählt - eine Kartierung im Maßstab 1:50.000 füllt gerade ein A4-Format.

Anstatt wirkliche Geländeflächen zu verwenden, wurde der Vorzug numerisch bestimmten Flächen gegeben. Ein von B. Kunji im Rahmen eines umfangreichen Simulationssystems (7) entwickelter Algorithmus generiert Höhen f in Funktion der Lagekoordinaten x, y auf sehr komplexe Weise. Durch geeignete Parameterwahl entstehen Flächen mit typisch geomorphologischen Kennzeichen. Drei der in (22) verwendeten "Gelände" dienen für die folgende Untersuchung: Eine verhältnismäßig glatte Fläche (T1), ein "hügeliges Gelände" (T5) und ein gebirgig zu nennendes (T6). Die Höhenlinienkarten der drei Testgebiete sind als Abb. 3.2-3.4 gegeben. Abb. 3.1 zeigt eine axonometrische Zeichnung des "welligen Geländes" T1 mit übertriebenem Höhenmaßstab. Statistiken über die Neigungs- und Krümmungsverhältnisse in den Testgebieten sind in (22, 26) zusammengestellt.

Es ist nicht anzunehmen, daß die synthetischen Gelände mit irgendwelchen wirklichen Geländeoberflächen übereinstimmen. So fehlt ihnen etwa ein gewisses Mikrorelief, vielleicht auch die immense Formenvielfalt der Natur. Die Höhengenerierung $f(x, y)$ ist jedoch keineswegs auf die vorgeschlagene Spektralanalyse zugeschnitten. Die erzeugten Flächen sind nicht etwa einfach eine Überlagerung von harmonischen Sinuswellen (wie im Beispiel 2.2.4.); sie weisen selbst Bruchlinien auf, wie aus Abb. 3.1 und den Profilzeichnungen (Abb. 3.5) zu ersehen ist.

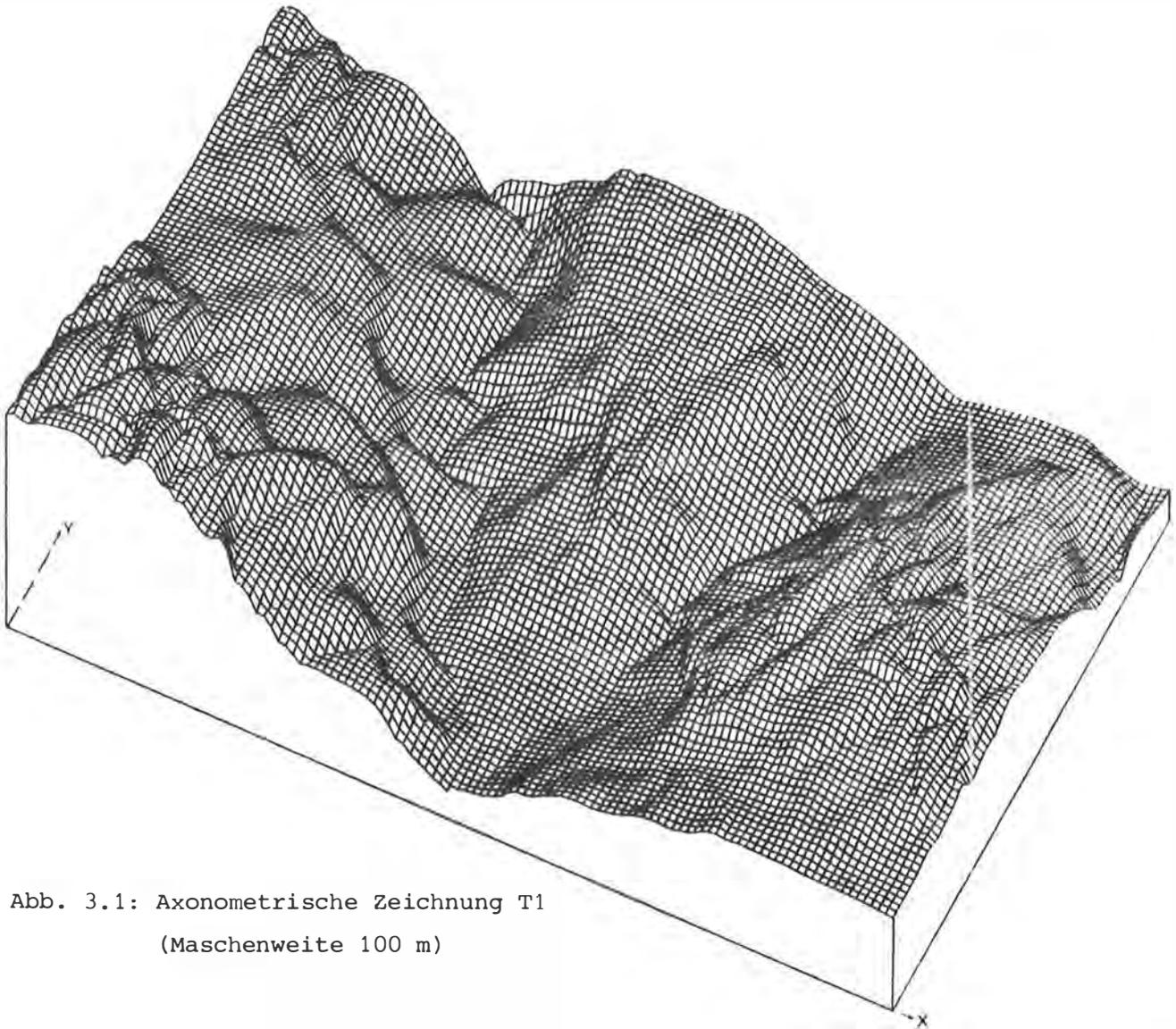


Abb. 3.1: Axonometrische Zeichnung T1
(Maschenweite 100 m)

Da $f(x,y)$ bei einem synthetischen Gelände fehlerfrei bekannt ist, können die im OB geschätzten mittleren Fehler des DHM (Formel (7) bzw. (37) mit $\sigma_{M'} = 0$ und $\Delta x'$ bzw. $\Delta x' \cdot \Delta y'$ hinreichend klein) als tatsächliche Fehler aufgefaßt werden. Die synthetischen Gelände ermöglichen somit eine eindeutige Beurteilung der Schätzung mittels Spektralanalyse. Die genau kontrollierbaren Experimente erfordern keinerlei Meßaufwand.

Für die Untersuchungen zum zweidimensionalen Fall wurde willkürlich ein Profil von 12 km Länge dem jeweiligen Testgebiet entnommen. Die Profillage ist in den Abb. 3.2-3.4 eingetragen, die Profile selbst - ebenfalls als T1, T5, T6 bezeichnet - sind in Abb. 3.5 dargestellt. Die Spektren der Profile sind in Abb. 3.6-3.8 nur bis zur Frequenz 60/12000 - also einer Wellenlänge von 200 m - gezeichnet, da die Amplituden der höheren Frequenzen für den Abbildungsmaßstab ohnedies zu klein sind. Die Spektren der Flächen T1, T5, T6 sind axonometrisch in den Abb. 3.9-3.11 dargestellt (ebenfalls abgeschnitten).

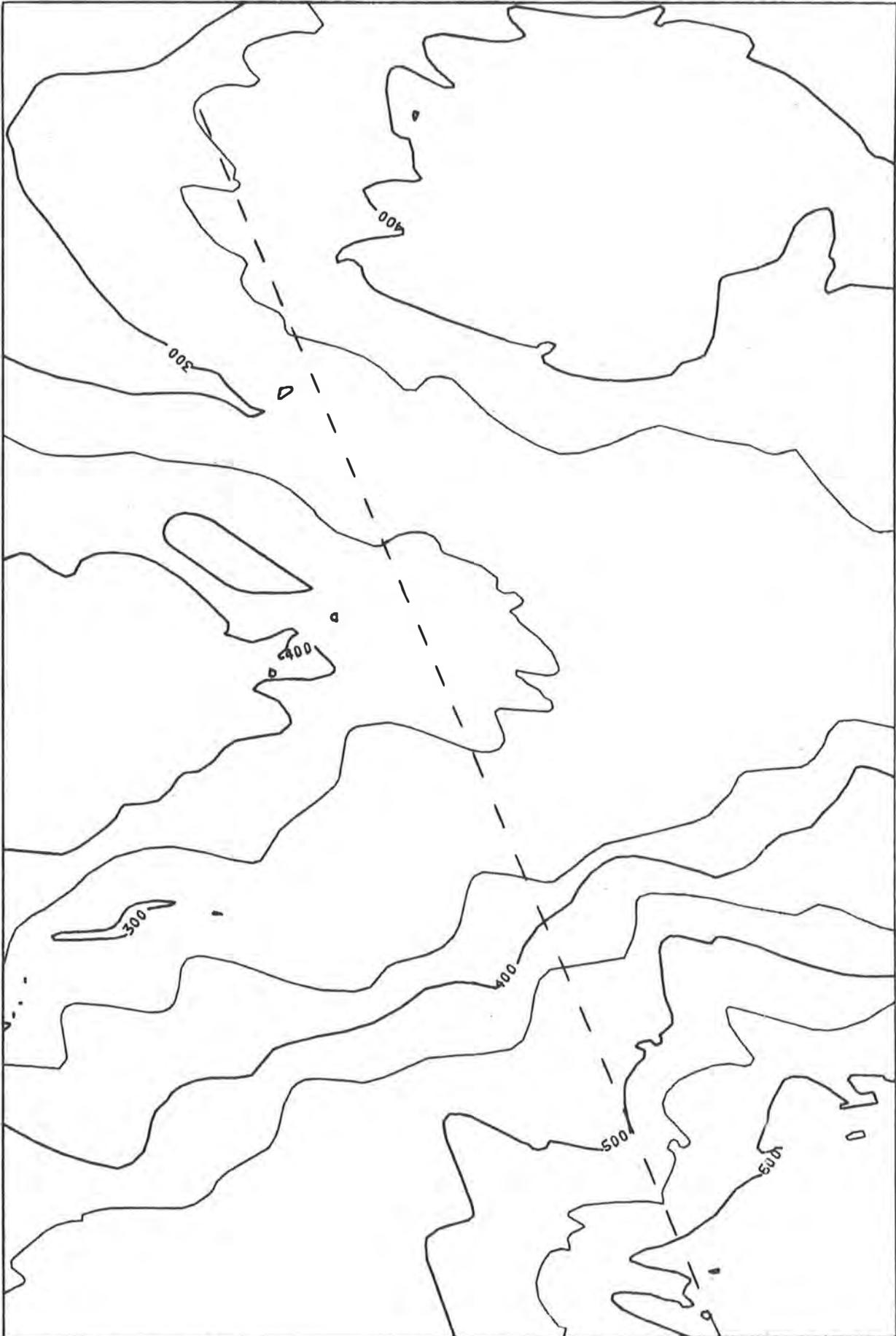


Abb. 3.2: "Gelände" T1 (Maßstab 1:50.000, Äquidistanz 50 m)

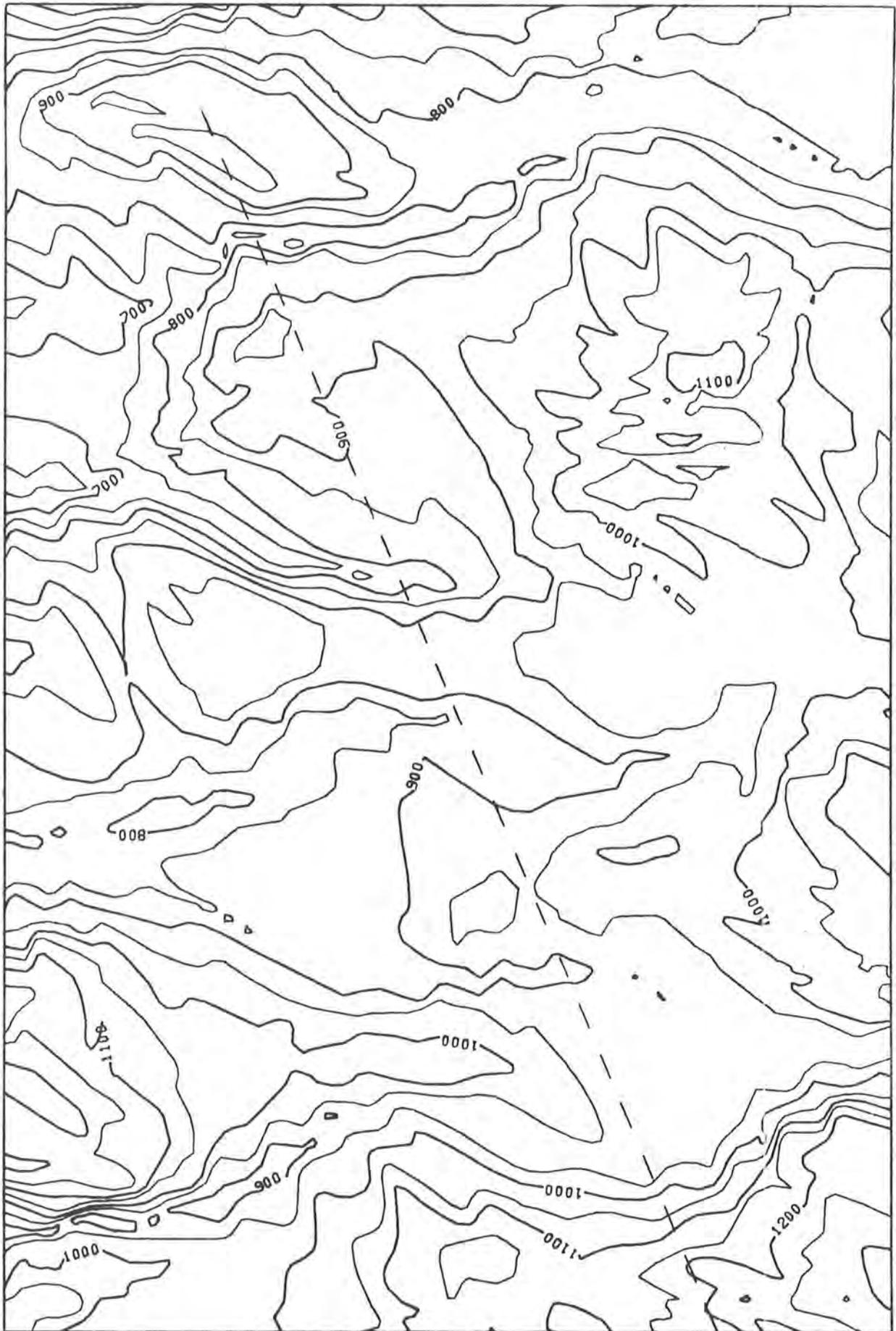


Abb. 3.3: "Gelände" T5 (Maßstab 1:50.000, Äquidistanz 50 m)

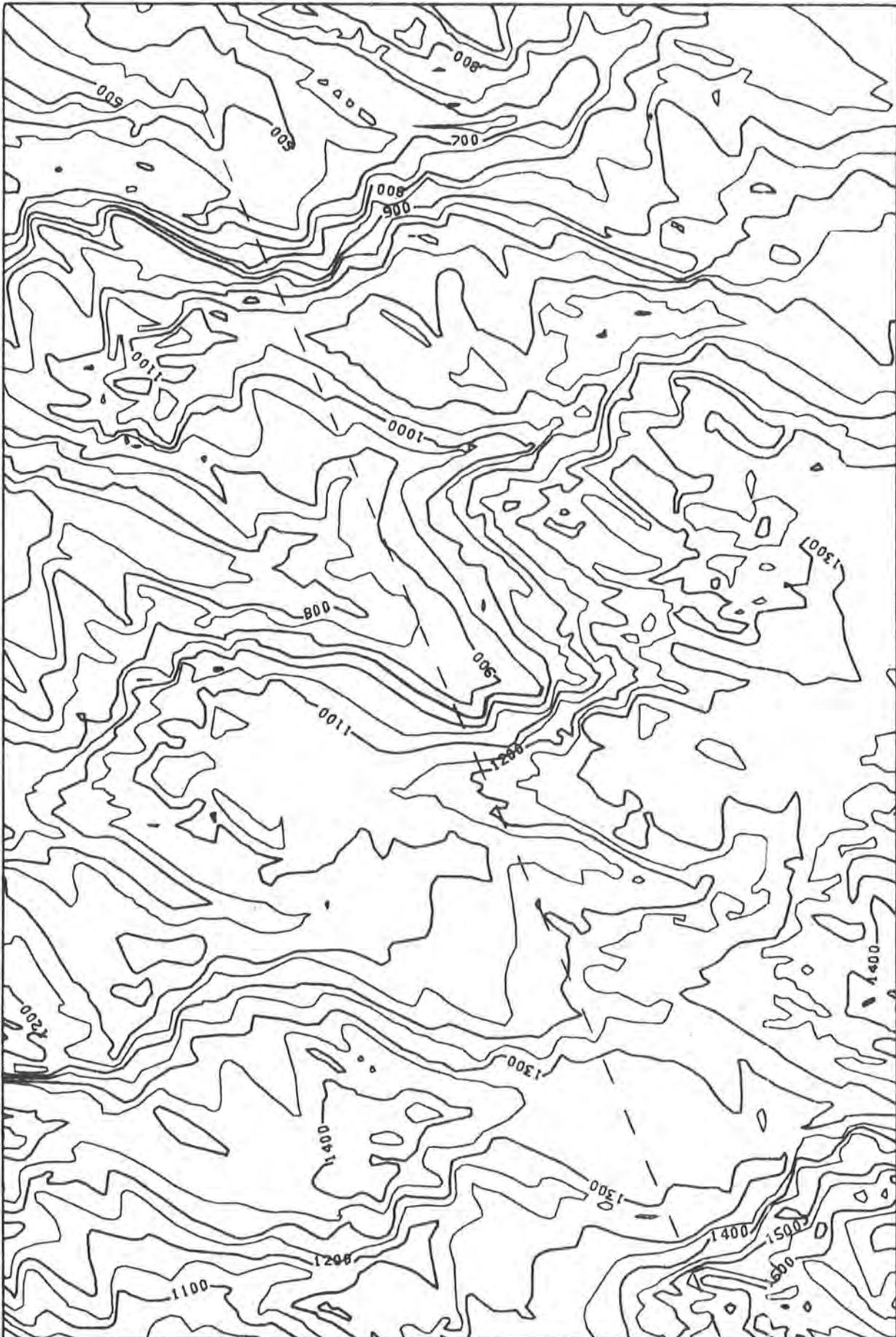


Abb. 3.4: "Gelände" T6 (Maßstab 1:50.000, Äquidistanz 50 m)

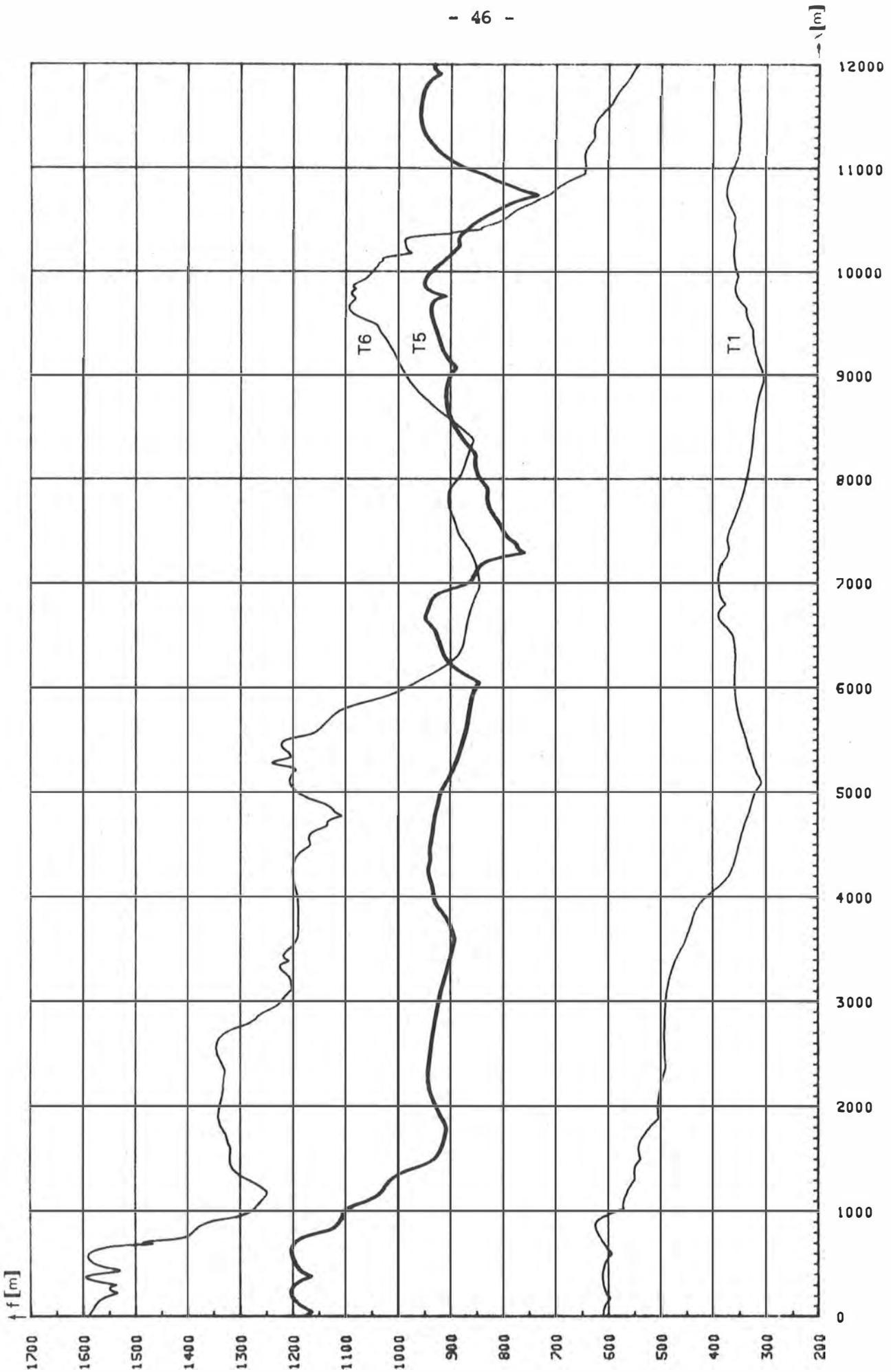


Abb. 3.5: Profile T1, T5, T6

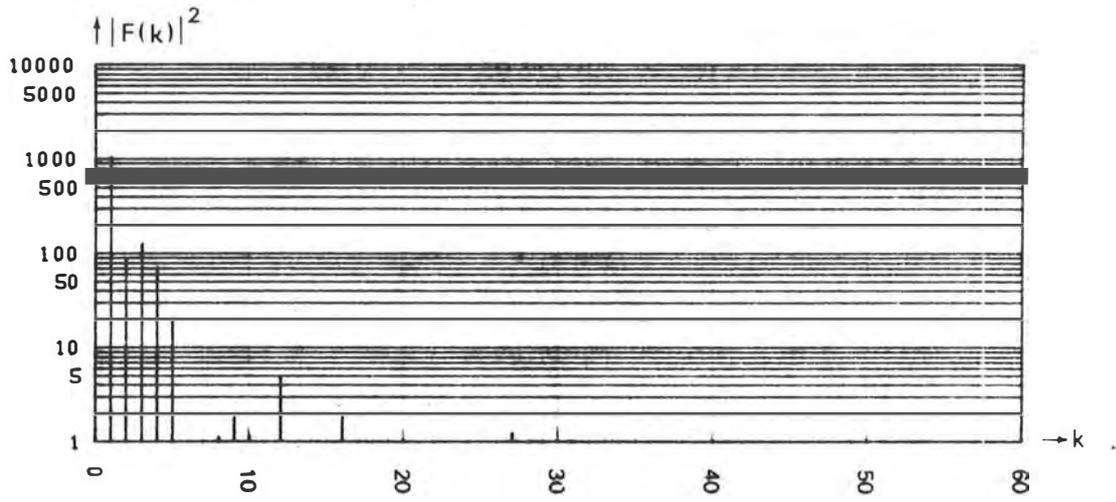


Abb. 3.6: Spektrum des Profils T1

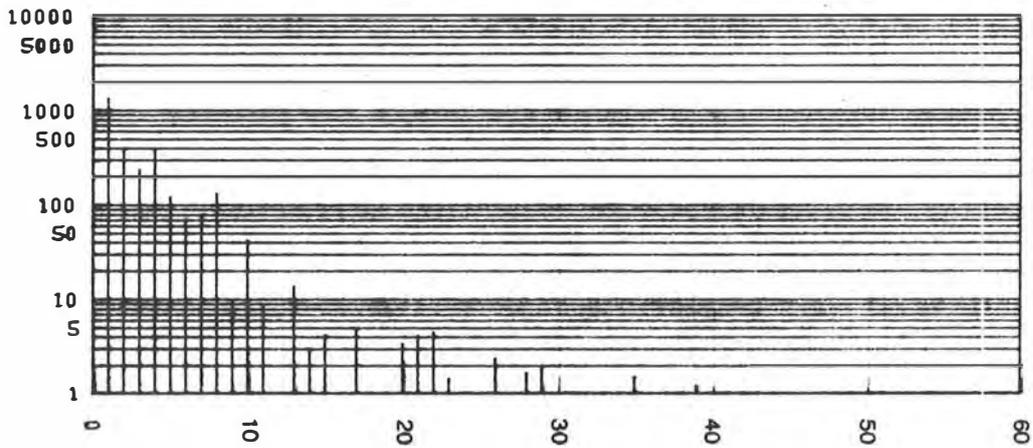


Abb. 3.7: Spektrum des Profils T5

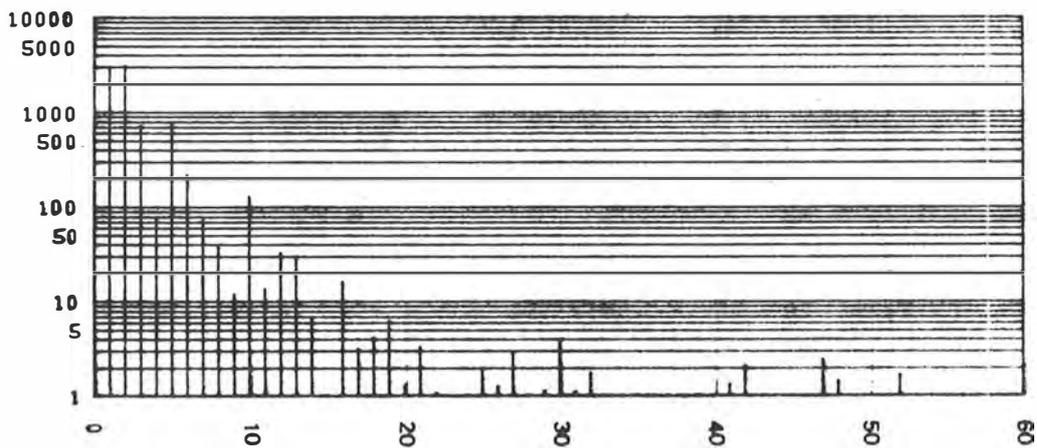


Abb. 3.8: Spektrum des Profils T6

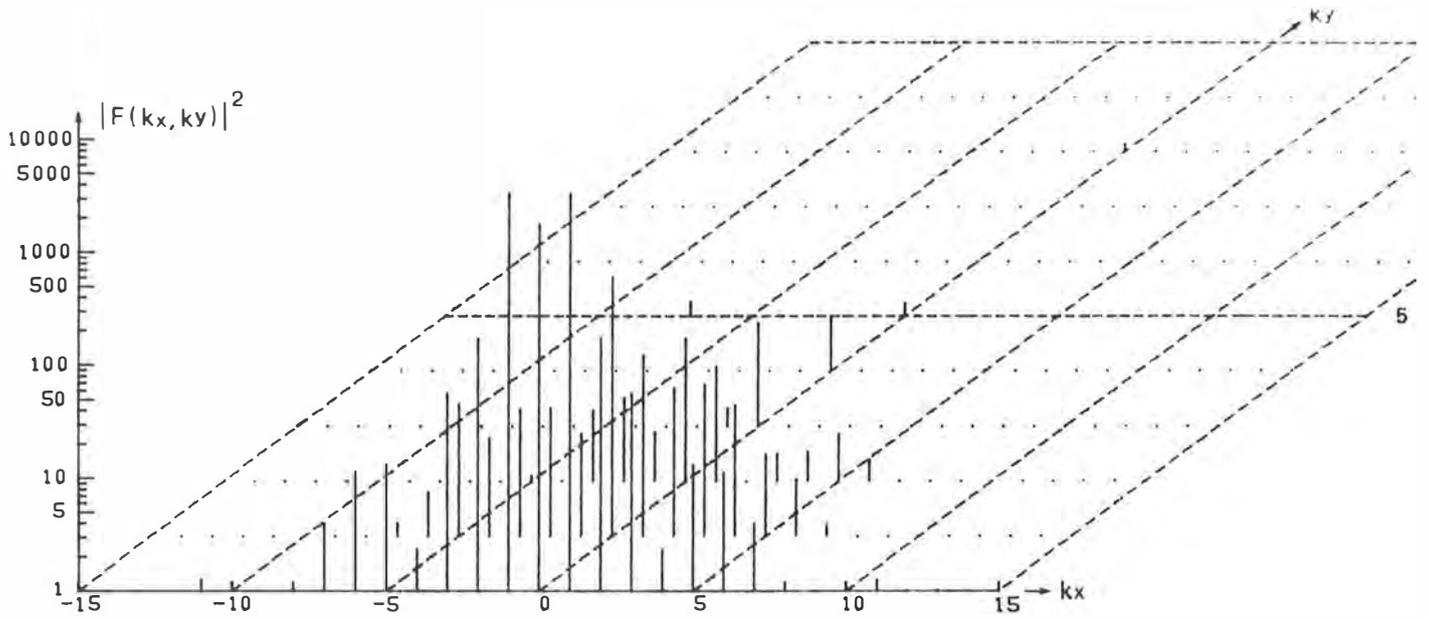


Abb. 3.9: Spektrum der Fläche T1

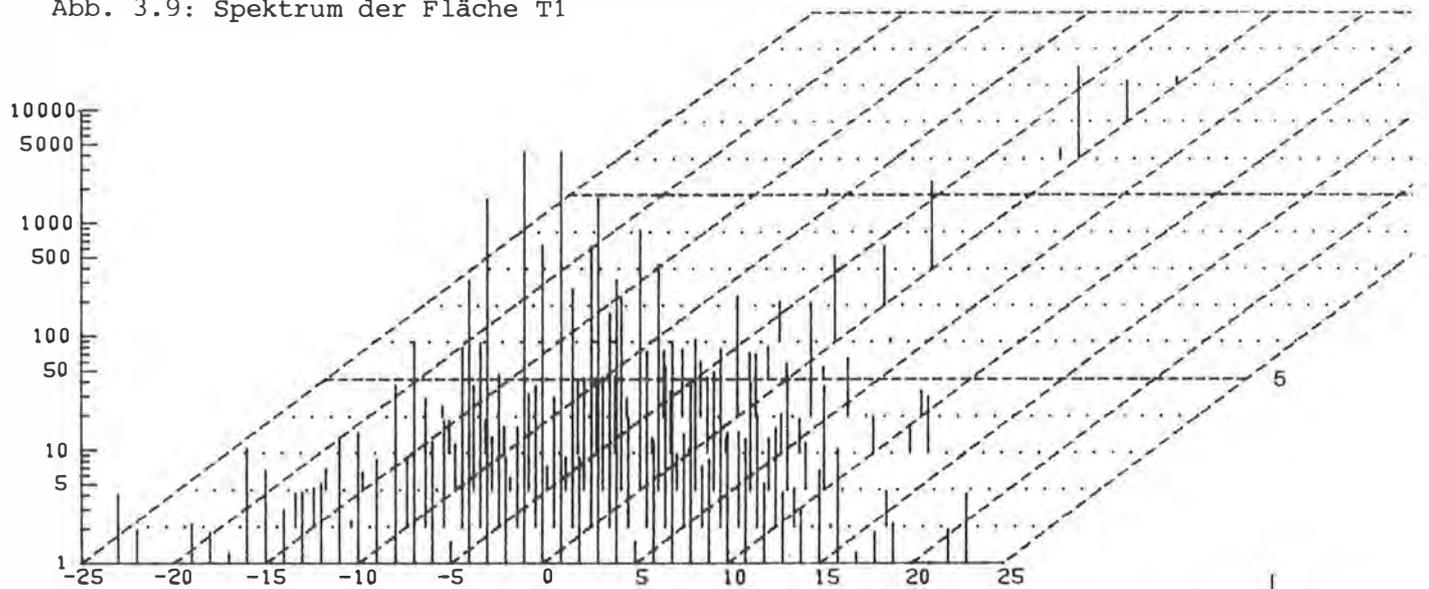


Abb. 3.10: Spektrum der Fläche T5

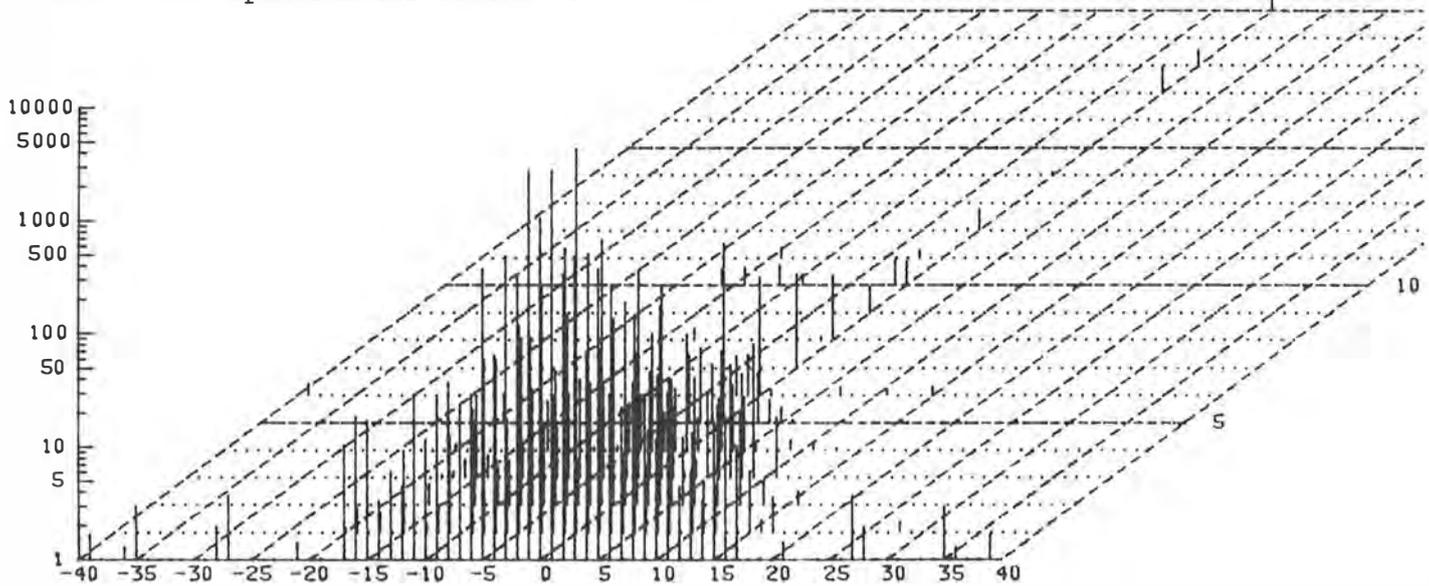


Abb. 3.11.a: Spektrum der Fläche T6

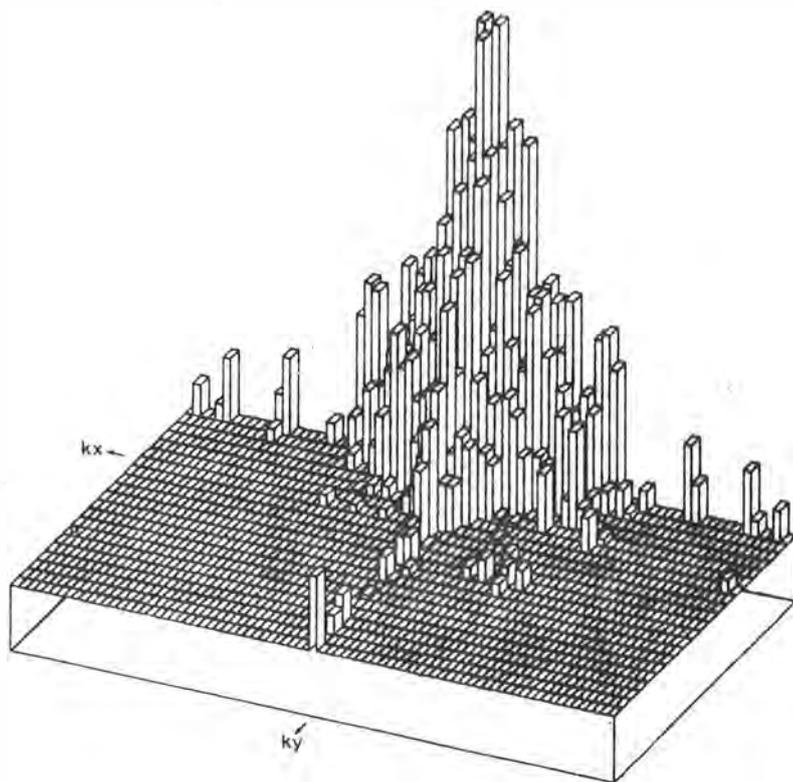


Abb. 3.11.b: Blockdiagramm des Spektrums von T6.

3.1.2. Rekonstruktionsverfahren

3.1.2.1. Zweidimensionaler Fall

Vier Verfahren wurden gewählt, um den Einfluß der RV auf die Genauigkeit eines DHM zu demonstrieren. Die Methoden unterscheiden sich in bezug auf die Genauigkeitserwartung und auch hinsichtlich des Aufwands in der Datenverarbeitung. Die ÜF der vier RV sind in Abb. 3.12 gezeichnet.

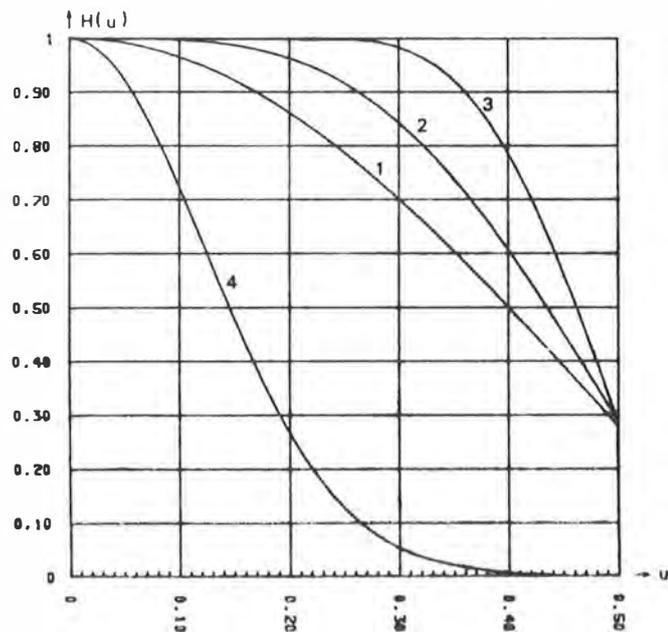


Abb. 3.12: Übertragungsfunktion für die Methoden:

- LI (1)
- KI (2)
- KQ (3)
- GM (4)

1. Lineare Interpolation (LI): Ein Verfahren, das theoretisch und in der praktischen Anwendung am einfachsten ist, dafür geringere Genauigkeit erwarten läßt als kompliziertere Methoden.
2. Kubische Interpolation (KI): Als Näherung für kubische Splines (nur näherungsweise stetige erste Ableitung in den Stützpunkten) wird für jedes Abtastintervall Δx_l ein Polynom 3. Grads bestimmt (anstelle eines Polynoms 1. Grads wie bei LI). Die Koeffizienten des Polynoms werden direkt aus den Stützwerten $f(x_{l-1})$, $f(x_l)$, $f(x_{l+1})$, $f(x_{l+2})$ gerechnet. Gemäß der ÜF (Abb. 3.12) ist für KI eine höhere Genauigkeit zu erwarten als für LI; dies auf Kosten der Rechenzeit.

Die Methode ließe sich dahingehend variieren, daß man aus den vier Stützwerten die erste Ableitung in den Stützpunkten x_l , x_{l+1} vorgibt:

$$f'(x_l) = \frac{f(x_{l+1}) - f(x_{l-1})}{2\Delta x}, \quad f'(x_{l+1}) = \frac{f(x_{l+2}) - f(x_l)}{2\Delta x}$$

Dadurch wird auch die erste Ableitung über die gesamte Profillänge stetig. Die entsprechende ÜF weicht nur unwesentlich von der in Abb. 3.12 dargestellten ab. Interessant ist diese Methode auch wegen ihres Analogons für den dreidimensionalen Fall.

3. Interpolation nach kleinsten Quadraten (KQ): In Abwandlung der von Kraus (9) vorgeschlagenen Methode wird eine Kovarianzfunktion verwendet, die nicht gebietsweise auf das Eingangssignal abgestimmt, sondern im Sinne eines gleitenden Mittels festgelegt wird. Voruntersuchungen an den drei Profilen haben nämlich gezeigt, daß es bei einem punktwisen Vorgehen (d.h. Definition eines zentrischen Stützpunktfensters um den zu interpolierenden Punkt und Heranziehen nur derjenigen Stützpunkte zur Interpolation, die innerhalb des Fensters liegen) günstiger ist, eine parametrische Kovarianzfunktion zu verwenden, die abhängig ist von der auf die Größe des Abtastintervalls bezogenen Distanz $t = d/\Delta x$. Der Parameterwert ist nicht durch die Eigenschaften des Eingangssignals bestimmt, sondern nur durch die Größe des Stützpunktfensters in Einheiten von Δx . Die Testprofile sind deutlich nicht stationär, wodurch - verzichtet man auf eine Trendabspaltung, die über eine Zentrierung der Stützwerte auf ihren Mittelwert hinaus geht - Kovarianzen in Funktion der Absolutdistanz d und einem Parameterwert je nach "Gelände" nicht für alle Abtastintervallgrößen (im untersuchten Bereich von 10 m bis 1000 m) zu höchsten Genauigkeiten führen. Außerdem läßt sich durch diese Abwandlung ein direkter Vergleich mit Kratkys Ansatz (9) anstellen und die Interpolation nach kleinsten

Quadraten

$$\hat{f} = \mathbf{b}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{a}^T \mathbf{g} \quad (61)$$

auf die gleiche Weise wie die übrigen hier verwendeten RV in der Genauigkeitsschätzung behandeln. Stellt man hingegen den Kovarianzvektor \mathbf{b} und die Kovarianzmatrix \mathbf{B} in Funktion von Absolutdistanzen auf, so ändert sich die ÜF bei Änderung des Abtastintervalls, wodurch dann eine Schar von Übertragungsfunktionen zur Genauigkeitsschätzung für verschiedene Abtastintervallgrößen herangezogen werden müßte.

Im Gegensatz zu LI und KI müssen bei KQ Parameter festgelegt werden. Mit Hilfe der Übertragungsfunktion (25) wurde - nach dem Kriterium best mögliche Genauigkeit bei bescheidenem Aufwand zu erzielen - die folgende Wahl getroffen:

- Gaußsche Kovarianzfunktion

$$b(t) = c_0 e^{-c_1 t^2} ; \quad t = \frac{d}{\Delta x} \leq 4 \quad (62)$$

- Stützpunktfenster von der Größe $\delta \Delta x$, d.h. $r=\delta$ Stützwerte für jeden interpolierten Punkt, also die Länge δ für den Vektor der Stützwerte \mathbf{g} in (61).
- $c_0 = (1-10^{-6})$ um numerischen Problemen aus dem Weg zu gehen (8), ohne dadurch spürbar zu filtern. Im Zusammenhang mit den Untersuchungen zur Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers wird darüber hinaus die Methode nach kleinsten Quadraten auch mit ausgeprägter Filterung (KF) betrachtet, also mit einem Wert c_0 , der sich merkbar von Eins unterscheidet. In Abb. 3.14.a ist die ÜF für $c_0 = 0.998985$ und $c_0 = 0.7$ aber ansonsten gleichen Parameterwerten wie für KQ dargestellt.
- $c_1 = 0.1$ ergab sich aus den experimentellen Interpolationen der drei Profile als bester Kompromiß für den untersuchten Bereich der Abtastintervallgrößen bei $r=\delta$. Eine Bestätigung dieses Werts läßt sich auch - unabhängig von irgendeinem Testprofil - aus der Analyse der nach der Fehlerfortpflanzungsformel (11), errechneten Varianzen anführen:

$$\tilde{\sigma}_j^2 = (c_0 - \mathbf{b}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}_j) V ; \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (63)$$

Für jeden der q interpolierten Punkte in einem Intervall (x_l, x_{l+1}) liefert die Formel (63) einen mittleren Fehler. Der Summe V aus Nutz- und Störsignalvarianz kommt dabei die Wirkung eines Maßstabfaktors zu. $\tilde{\sigma}_q$ ist der mittlere Fehler in den Intervallendpunkten, also in einem Stützpunkt, $\tilde{\sigma}_{q/2}$ der mittlere Fehler im Intervallzentrum.

Eine Änderung von c_1 in (62) bedeutet andere Matrizen b, B in (61) und (63), somit andere Werte $\tilde{\sigma}_j$. Dabei zeigt sich, daß solange $c_1 < 0.1$ ist ($c_0 = 0.999999, r=8$), $\tilde{\sigma}_j$ nahezu gleich groß ist für alle Zwischenpunkte und langsam ansteigt mit wachsendem c_1 . Bei $c_1 = 0.1$ entsteht ein augenfälliger Bruch: $\tilde{\sigma}_q$ hat in etwa den Sollwert $(1-c_0)V$ erreicht und $\tilde{\sigma}_{q/2}^2$ wird nun für weiter wachsendes c_1 deutlich der Größte unter den $\tilde{\sigma}_j$ und steigt sprunghaft an (siehe Abb. 3.13).

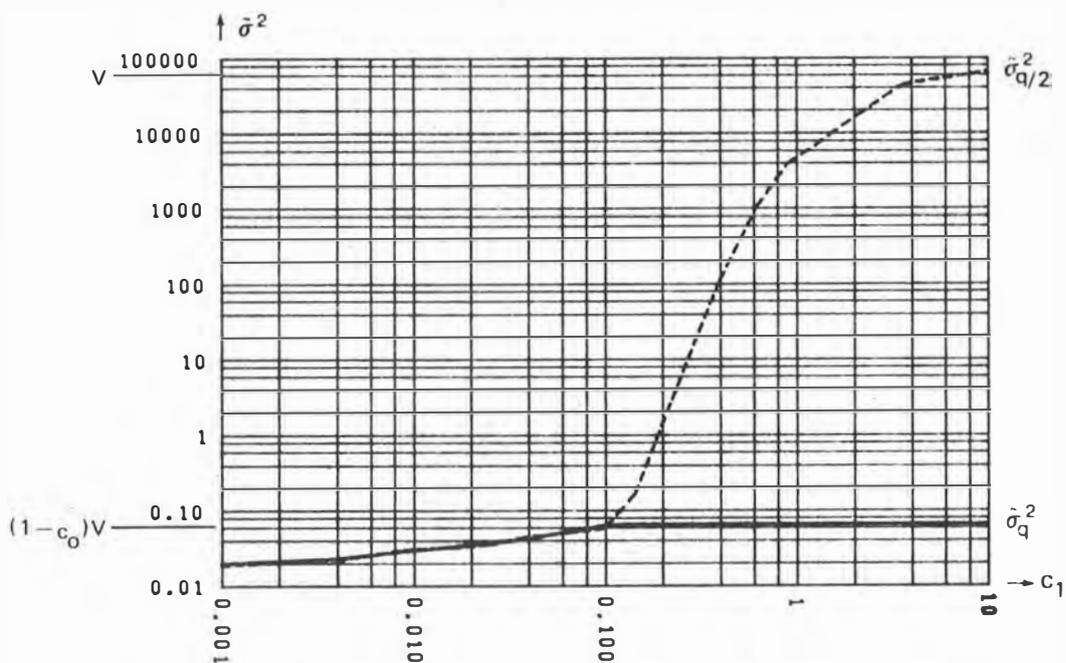


Abb. 3.13: Mittleres Fehlerquadrat $\tilde{\sigma}_q^2, \tilde{\sigma}_{q/2}^2$ bei $r=8, c_0 = 1-10^{-6}$.

Es ist selbstverständlich, daß eine andere Parameterwahl zu anderen Ergebnissen führen kann, somit können die mit KQ und KF erhaltenen Resultate auch nicht als allgemein gültig für die Methode nach kleinsten Quadraten angesehen werden. Erwähnenswert ist noch, daß sich mit der von Kratky (9) angegebenen Gewichtsfunktion (Gewichtsfunktion von Whittakers Interpolation (Abb. 2.6.a) abgeschwächt mit einer Gaußschen Funktion)

$$\alpha(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} e^{-\frac{4\pi t^2}{c^2}}; \quad t = \frac{d}{\Delta x} \quad (64)$$

eine ÜF ergibt, die sich in Abb. 3.12 nicht von jener für KQ unterscheidet, wenn $c=8$ gewählt wird bei $r=8$.

4. Gleitendes Mittel (GM): Als einfache Filterungsmethode wird ein gewogenes Mittel der Stützwerte innerhalb eines Stützpunktfensters zur Rekonstruktion verwendet. Um eine steil abfallende, aber nicht unter Null sinkende ÜF zu erhalten, wurde die folgende Parameterwahl getroffen:

- Gaußsche Gewichtsfunktion

$$a(t) = e^{-ct^2} ; \quad t = \frac{d}{\Delta x} \leq 4 \quad (65)$$

- Stützpunktfenster von $r\Delta x$, $r=8$.

- $c = 0.3$

Wie für KQ gilt auch für GM, daß die Ergebnisse von der Parameterwahl abhängen. In Abb. 3.14.a sind zum Vergleich neben der ÜF für GM die ÜF für zwei weitere Filterungsmethoden dargestellt, die bei gleichem Stützpunktfenster in etwa zur gleichen Filterungsrate führen: KF mit $c_0 = 0.7$, $c_1 = 0.1$ und KM, ein gleitendes Mittel mit der Gewichtsfunktion

$$a(t) = \frac{\sin 2\pi\nu_* t}{2\pi\nu_* t} e^{-\frac{4\pi t^2}{c^2}} ; \quad t = \frac{d}{\Delta x} \quad (66)$$

Die Funktion (66) bietet sich als Verallgemeinerung von (64) an. Die Grenzfrequenz ν_* ist 0.2 für Abb. 3.14.a; der Wert von c ist 8. Wählt man $\nu_* = 0.12$ so erhält man eine ÜF, die sich fast mit derjenigen von GM deckt.

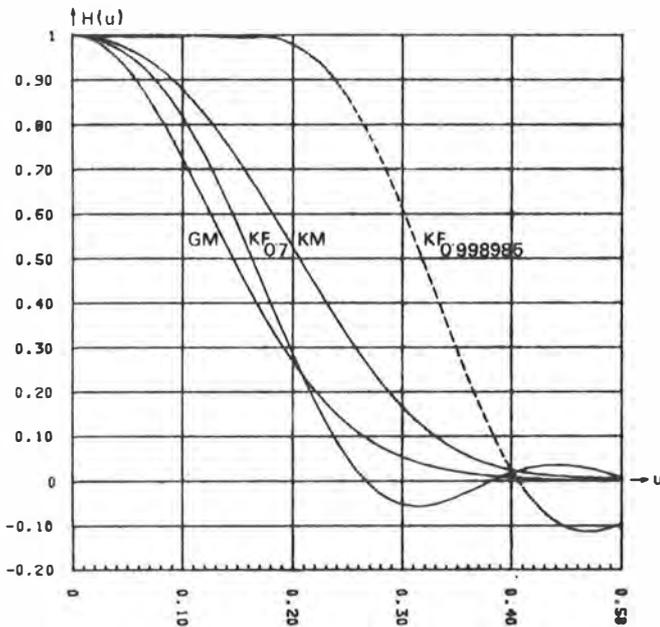


Abb. 3.14.a: ÜF von drei Filteransätzen mit $r=8$.

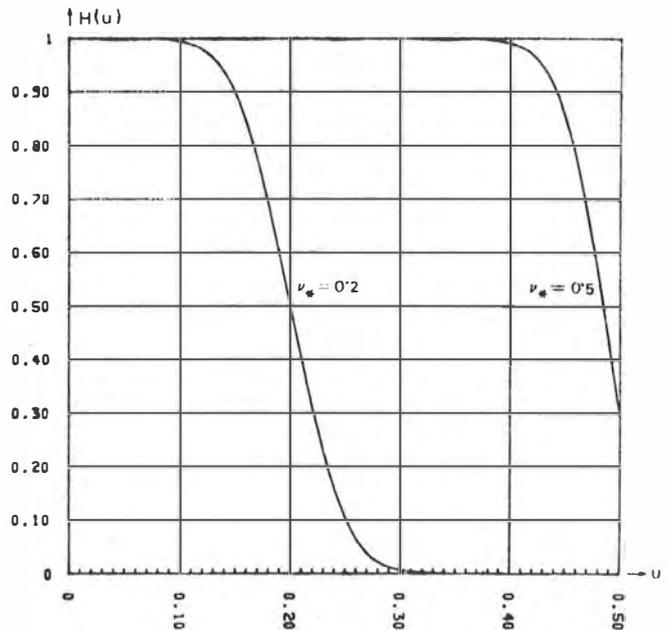


Abb. 3.14.b: ÜF für die Gewichtsfunktion (66) mit zwei unterschiedlichen Grenzfrequenzen bei $c=80$, $r=80$.

Der Vergleich von Abb. 3.14.b mit Abb. 3.14.a und Abb. 3.12 zeigt, daß ein gleitendes Mittel mit der Gewichtsfunktion (66) durch ein größeres Stützpunktfenster (und angepaßtem Parameterwert c) günstiger wird. Die ÜF der Abb. 3.14.b kommen den idealen ÜF (Beispiele auf Seite 15) schon recht nahe.

3.1.2.2. Dreidimensionaler Fall

Zur Flächeninterpolation werden die entsprechenden Verallgemeinerungen der Verfahren LI, KI und KQ eingesetzt:

1. Bilineare Interpolation (BLI): Die Gewichtsfunktion der BLI ist in Abb. 2.16 dargestellt, die ÜF in Abb. 3.15. Zum Vergleich zeigt die Abb. 3.17 die Näherungsfunktion $\bar{h}(u, v)$ (siehe 2.2.2.).
2. Bikubische Interpolation (BKI): Anstelle eines vollständigen Polynoms 1. Grads per Stützpunktrastermasche wie bei BLI, wird ein vollständiges Polynom 3. Grads verwendet. Durch die Vorgabe des Funktionswerts, der ersten Ableitung in der x- sowie der y-Richtung und der gemischten zweiten Ableitung in jedem Rasterpunkt entsteht eine stetige Fläche mit einer stetigen ersten Ableitung in x wie in y über das Gesamtgebiet $LX.LY$ (27). Für eine Masche lx, ly gilt:

$$\hat{f} = X^T C Y \quad ; \quad C = W Z W^T \quad (67)$$

mit

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 \end{pmatrix} ; \quad \bar{x} = \frac{x - x_{lx}}{\Delta x}$$

$$Y^T = \begin{pmatrix} 1 & \bar{y} & \bar{y}^2 & \bar{y}^3 \end{pmatrix} ; \quad \bar{y} = \frac{y - y_{ly}}{\Delta y}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \quad ; \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Z = \begin{pmatrix} f_1 & y^f_1 & f_2 & y^f_2 \\ x^f_1 & xy^f_1 & x^f_2 & xy^f_2 \\ f_4 & y^f_4 & f_3 & y^f_3 \\ x^f_4 & xy^f_4 & x^f_3 & xy^f_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_1 = f(x_{lx}, y_{ly}) \\ f_2 = f(x_{lx}, y_{ly+1}) \\ f_3 = f(x_{lx+1}, y_{ly+1}) \\ f_4 = f(x_{lx+1}, y_{ly}) \end{matrix}$$

Die zwei ersten Ableitungen x^f , y^f und die gemischte zweite Ableitung xy^f in einem Stützpunkt werden aus dem Polynom 2. Grads gerechnet, das durch die umliegenden neun Stützpunkte bestimmt ist:

$$x^f_1 = \frac{f(x_{lx+1}, y_{ly}) - f(x_{lx-1}, y_{ly})}{2}$$

$$y^f_1 = \frac{f(x_{lx}, y_{ly+1}) - f(x_{lx}, y_{ly-1})}{2}$$

$$xy^f_1 = \frac{f(x_{lx-1}, y_{ly-1}) + f(x_{lx+1}, y_{ly+1})}{4} - \frac{f(x_{lx-1}, y_{ly+1}) + f(x_{lx+1}, y_{ly-1})}{4}$$

Die Werte in den übrigen Eckpunkten der Masche ergeben sich analog mit einer entsprechenden Indexvariation. Die ÜF dieses bikubischen Pseudosplines ist in Abb. 3.16 dargestellt, die entsprechende trennbare Funktion $\bar{H}(u, v)$ in Abb. 3.18.

3. Interpolation nach kleinsten Quadraten (BKQ): Bei analoger Vorgehensweise zu KQ wird folgende Parameterzuweisung benutzt:

- Gaußsche Kovarianzfunktion

$$b(t) = c_0 e^{-c_1 t^2}; \quad t = \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{\Delta x^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{\Delta y^2}} \leq 4\sqrt{2} \quad (68)$$

Im Fall eines Quadratrasters ($\Delta x = \Delta y = \Delta xy$) ist $t = d/\Delta xy$, wobei d die Absolutdistanz zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist.

- Stützpunktfenster mit der Ausdehnung $\delta\Delta x$ mal $\delta\Delta y$, d.h. $r=8$ Stützwerte pro Koordinatenrichtung (für BLI gilt $r=2$, für BKI $r=4$).

- $c_0 = 1 \cdot 10^{-6}$

- $c_1 = 0.2$. Sowohl die Varianzen, die mit Formel (63) für verschiedene Parameterwerte c_1 gerechnet wurden, als auch eine beschränkte Anzahl von Interpolationen für T1 und T6, deuteten darauf hin, daß der günstigste Wert c_1 bei 0.2 liegen müßte.

Abb. 3.21.a zeigt die Profile $H(u, v=0)$ und $H(u, v=u)$ der ÜF für BKQ, Abb.

3.21.b den Unterschied zwischen der ÜF der BKQ und der in Abb.

3.19 dargestellten Näherung $\bar{H}(u, v)$ für $u=v$. $\bar{H}(u, v) = H(u)H(v)$, wobei

$H(u) = H(u, v=0)$. Zum Vergleich ist in Abb. 3.20 die ÜF für die Methode nach kleinsten Quadraten mit einer hyperbolischen Kovarianzfunktion gezeigt; die Parameter sind:

$$b(t) = \sqrt{ct^2 + 1}, \quad c = 1, \quad r = 8$$

Die Abb. 3.22-3.24 zeigen die Differenz zwischen der tatsächlichen und der trennbaren ÜF für BLI, BKI und die Interpolation nach kleinsten Quadraten mit der hyperbolischen Kovarianzfunktion.

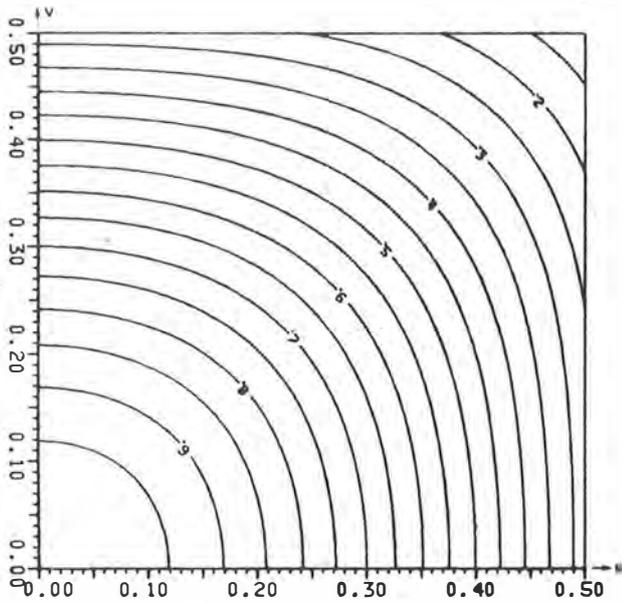


Abb. 3.15: $\ddot{U}F H(u, v)$ BLI

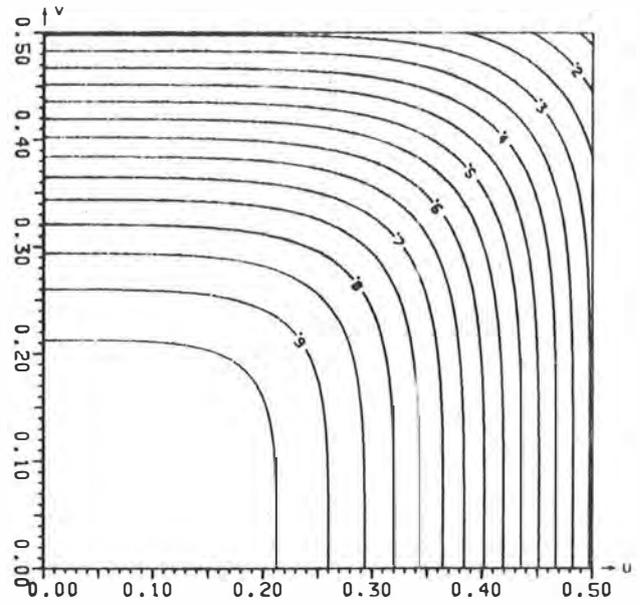


Abb. 3.16: $\ddot{U}F H(u, v)$ BKI

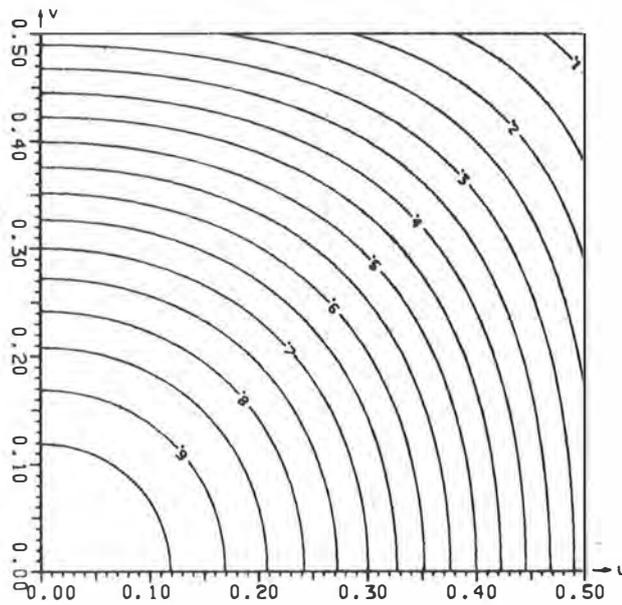


Abb. 3.17: Trennbare Funktion $\bar{H}(u, v)$ BLI

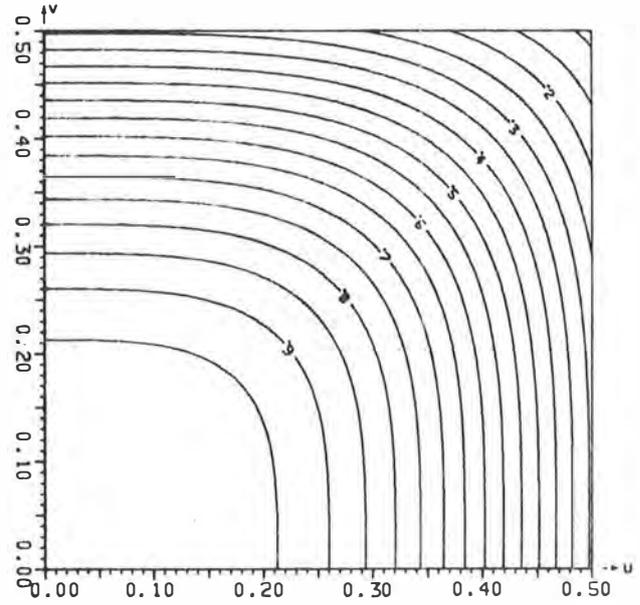


Abb. 3.18: Trennbare Funktion $\bar{H}(u, v)$ BKI

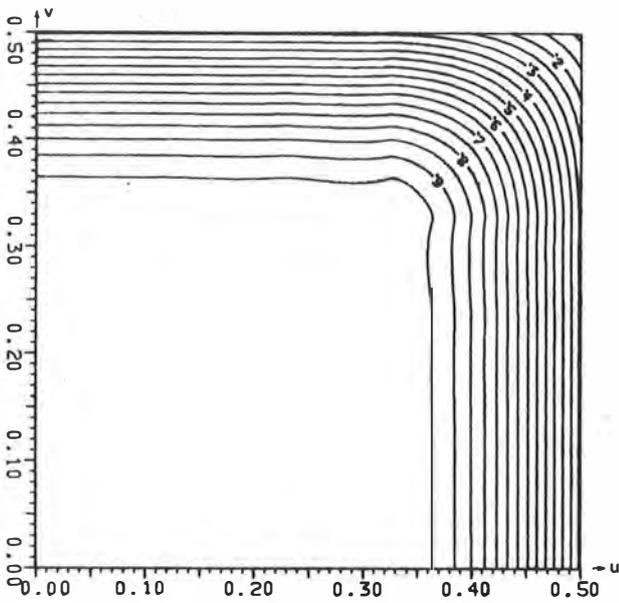


Abb. 3.19: Trennbare Funktion
 $\bar{H}(u,v)$ BKQ

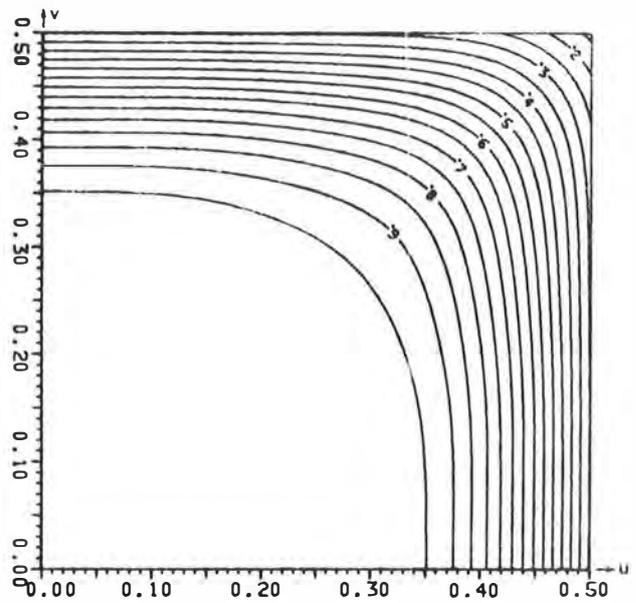


Abb. 3.20: ÜF $H(u,v)$ der Interpolation nach kleinsten Quadraten mit einer Hyperbel

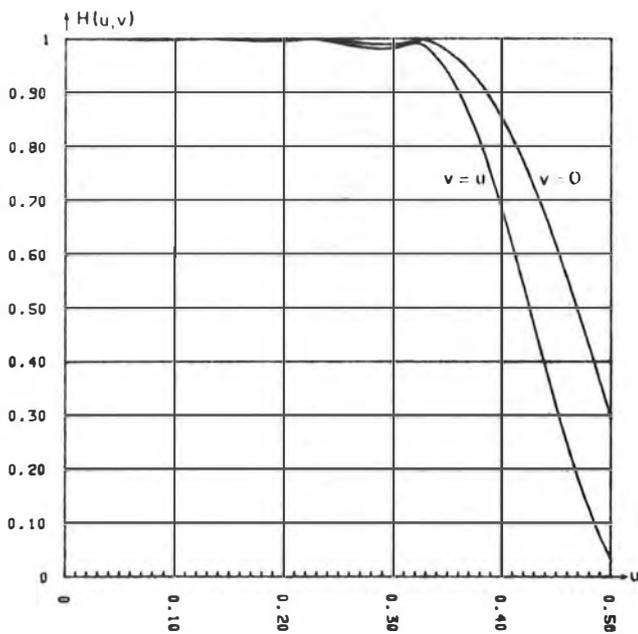


Abb. 3.21.a: Zwei Profile der
ÜF für BKQ

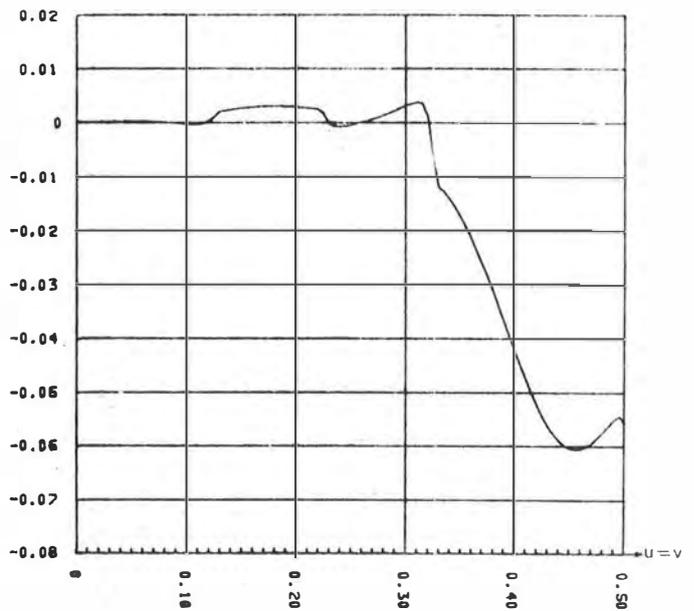


Abb. 3.21.b: Differenzprofil
 $H(u,v) - \bar{H}(u,v)$ BKQ

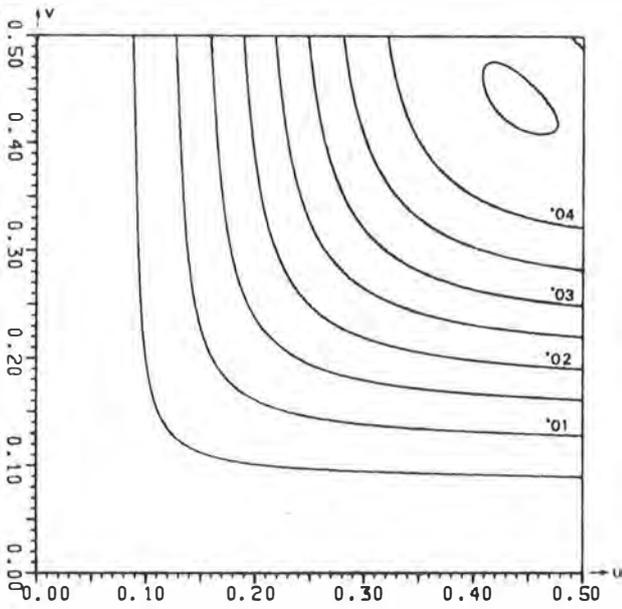


Abb. 3.22: $H(u,v) - \bar{H}(u,v)$ BLI

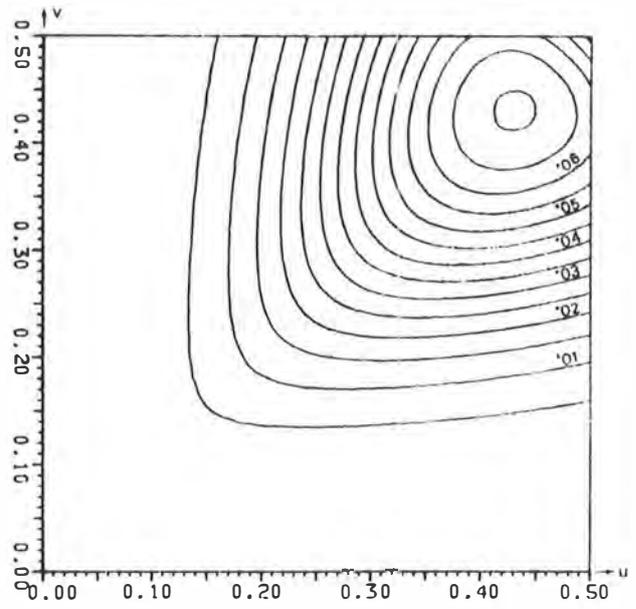


Abb. 3.23: $H(u,v) - \bar{H}(u,v)$ BKI

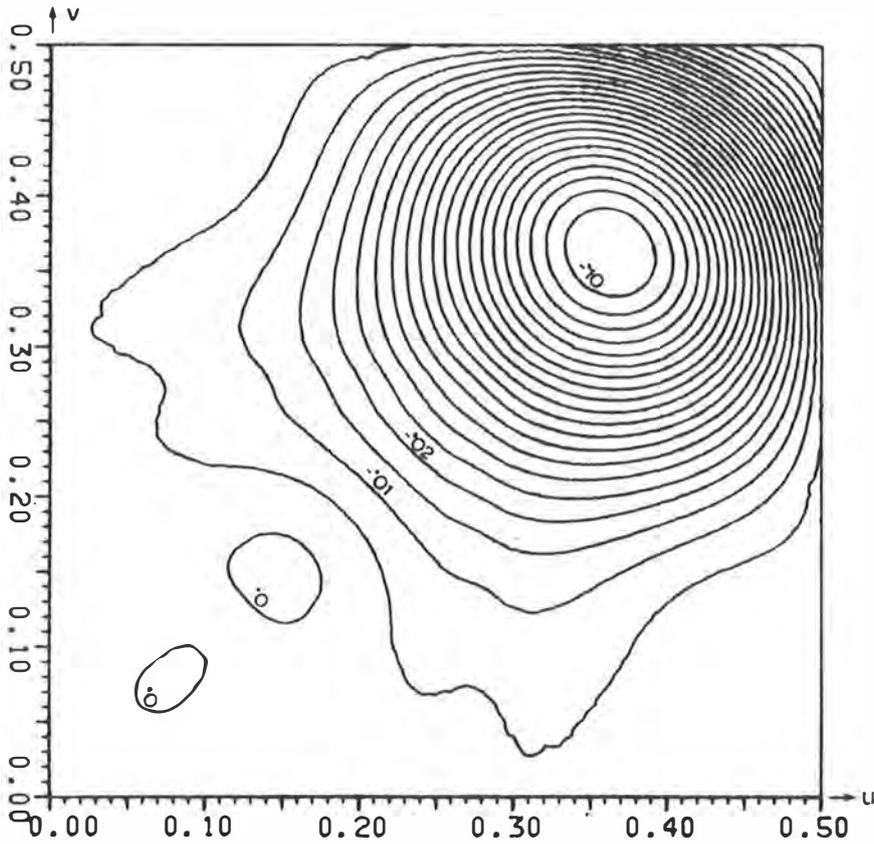


Abb. 3.24: $H(u,v) - \bar{H}(u,v)$ der Interpolation nach kleinsten Quadraten mit einer Hyperbel

3.2. Beschreibung der Experimente

3.2.1. Zweidimensionaler Fall

Die Berechnungen gelten den folgenden vier Aspekten:

- i) AR-Fehler: Der mittlere Höhenfehler σ_S , der sich aus Abtasten der Profile T1, T5, T6 und Rekonstruktion mit der jeweiligen RV (LI, KI, KQ, GM) ergibt. Dazu werden die 15 Abtastintervallgrößen $\{\Delta x: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120, 150, 200, 250, 300, 600, 1000 \text{ m}\}$ betrachtet. Die im FB geschätzten AR-Fehler (22) werden mit den im OB gerechneten (7) verglichen, womit ein Bild über die Hinlänglichkeit der Schätzformel (22) gewonnen werden kann. Als Maß wird der Unterschied zwischen geschätztem Fehler (FB) und tatsächlichem Fehler (OB) verwendet, ausgedrückt in Prozent des geschätzten Fehlers:

$$\varepsilon = \frac{\hat{\sigma}_S - \sigma_S}{\hat{\sigma}_S} 100\% \quad (69)$$

- ii) Meßfehlerauswirkung: Der Beitrag, den ein rein zufälliger Meßfehler zur Varianz des DHM-Fehlers bei unendlicher Profillänge und endlichem Abtastintervall leisten würde, wird mit Formel (14) für die vier RV abgeschätzt. Um einen Eindruck von der tatsächlichen Auswirkung zu bekommen, werden die abgetasteten Werte des Profils endlicher Länger mit einer Zufallsfolge überlagert (generiert nach der Normalverteilung mit Mittelwert Null und Varianz σ_M^2). Für jedes Abtasten wird eine neue Zufallsfolge generiert. Drei verschiedene Meßfehlergrößen $\{\sigma_M: 0.2, 0.5, 8 \text{ m}\}$ werden betrachtet.

Das "Messen" eines Profils (bestimmtes Intervall Δx^* und Genauigkeit σ_M^*) hat die Meßfehlerauswirkung

$$\rho_I = \sigma_I^2 - \sigma_S^2 \quad (70)$$

zur Folge, wobei σ_S der im OB gerechnete AR-Fehler für Δx^* also der mittlere DHM-Fehler für den Fall von fehlerfreien Referenzdaten ist. σ_I ist der mittlere DHM-Fehler aus den fehlerbehafteten Referenzdaten. "Mißt" man dasselbe Profil ein zweites Mal ($\Delta x^*, \sigma_M^*$), so wird sich - der endlichen Zahl von gemessenen Werten wegen - ein zweiter, zu meist anderer Wert $\rho_2 = \sigma_2^2 - \sigma_S^2$ ergeben. Um die Schwankungen der Meßfehlerauswirkung aufzuzeigen, wird der Mittelwert ρ aus 50 Profilmessungen berechnet

$$\rho = \frac{1}{50} \sum_{j=1}^{50} \rho_j \quad \text{bezw.} \quad R = \frac{\rho}{\sigma_M^2} \quad (71)$$

und die Streuung der relativen Meßfehlerauswirkung R_j um den Mittelwert R

$$\theta_R = \sqrt{\frac{1}{49} \sum_{j=1}^{50} (R_j - R)^2} \quad ; \quad R_j = \frac{\rho_j}{\sigma_M^2} \quad (72)$$

sowie die maximale Abweichung $\theta_R = |R_j - R|_{max}$ ermittelt.

Da ρ_j für große Abtastintervalle negative werden kann, wird auch nach dem kleinsten Abtastintervall gesucht, bei dem für zumindest ein gemessenes Profil (aus den 50) der Meßfehler einen kleineren mittleren DHM-Fehler σ_j bewirkt, als durch den AR-Fehler σ_S vorgegeben ist. Die Berechnungen umfassen alle Profile und RV.

iii) Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des AR-Fehlers:

Ausgehend von einem Abtastintervall von $\Delta = 10$ m und einer Meßgenauigkeit von $\sigma_M = 0.5$ m bei der Datenbeschaffung für die Spektrumbestimmung nach (21), wird die Verfälschung der AR-Fehlerschätzung (22) durch einen rein zufälligen Meßfehler mit Formel (26) berechnet. Zum Vergleich wird das Spektrum tatsächlich aus fehlerbehafteten Referenzdaten gerechnet und der damit resultierende Schätzwert $\hat{\sigma}_{Sj}^2$ dem aus fehlerfreien Daten geschätzten Wert $\hat{\sigma}_S^2$ gegenübergestellt.

$$\zeta_j = \hat{\sigma}_{Sj}^2 - \hat{\sigma}_S^2 \quad (73)$$

Da ζ von einer Profilmessung zur anderen nur wenig variiert, werden nur jeweils 10 "Messungen" der drei Profile zur Berechnung des Mittelwerts

$$\zeta = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \zeta_j \quad (74)$$

der Streuung

$$\theta_\zeta = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{j=1}^{10} (\zeta_j - \zeta)^2} \quad (75)$$

und der maximalen Abweichung $\theta_{\zeta} = |\zeta_j - \zeta|_{max}$ verwendet.

Dabei werden die AR-Fehlerschätzungen für alle vier RV und alle 15 Abtastintervallgrößen berücksichtigt.

- iv) Abtastintervall zur Spektrumbestimmung: Für die oben beschriebenen Experimente zur Schätzung des AR-Fehlers wird das Spektrum $|F(k)|^2$ für alle drei Profile aus den mit $\Delta = 10$ m abgetasteten Daten gerechnet. Da die DFT eine periodische Fortsetzung des Signals $f(x)$ außerhalb des Intervalls $(0,L)$ impliziert, werden die abgetasteten Profile - bevor sie der FFT (21) unterworfen werden - horizontiert, sodaß die Profilendpunkte dieselbe Höhe erhalten. Damit wird eine Unstetigkeit im Signalverlauf vermieden, die als Sägezahn in die spektrale Darstellung eingehen und dadurch die für die Genauigkeitsschätzung relevante Information verfälschen würde.

Der einheitlichen Ausgangsposition wegen wird für alle Profile dasselbe Abtastintervall zur Spektrumbestimmung gewählt, und zwar so, daß das Profil mit der größten Bewegtheit, d.i. T6, hinreichend erfaßt wird. Vorausgehend wurden die Spektren aus einer Abtastung mit $\{\Delta: 1,10,20,40,100 \text{ m}\}$ gerechnet und die AR-Fehler nach (22) für LI geschätzt.

3.2.2. Dreidimensionaler Fall

Da die Berechnungen für den dreidimensionalen Fall doch wesentlich aufwendiger als die Profilberechnungen sind, ist die Anzahl Experimente hierzu geringer:

- i) Der AR-Fehler wird im FB für jedes der drei "Gelände" mittels (52) geschätzt. Dies für ein Abtasten in einem Quadratraster mit sechs verschiedenen Maschenweiten $\{\Delta xy: 20,40,80,100,200,1000 \text{ m}\}$ und die Rekonstruktion mit drei verschiedenen Verfahren. Dazu werden für BLI und BKI die tatsächlichen ÜF (Abb. 3.25, 3.16) sowie die trennbaren (Abb. 3.17, 3.18) verwendet. Der AR-Fehler im Fall von BKQ wird nur mit der trennbaren ÜF (Abb. 3.19) geschätzt.

Das Spektrum wird für jedes "Gelände" nach (51) aus einem 20 m Raster gerechnet (ein 10 m Raster wäre von der Speicherkapazität her nicht möglich). Um eine Unstetigkeit der Fläche am Rand des Gebiets $LX.LY$ zu vermeiden, werden vor Bestimmung des Spektrums - analog zum zweidimensionalen Fall - die Profile in der x-Richtung sowie in der y-Richtung horizontiert, sodaß

$$f(0, y_l) = f(LX, y_l) \quad ; \quad y_l = l\Delta, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{LY}{\Delta}$$

und

$$f(x_l, 0) = f(x_l, LY) \quad ; \quad x_l = l\Delta, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{LX}{\Delta}$$

Zur empirischen Beurteilung der Brauchbarkeit der so erhaltenen Schätzwerte werden die AR-Fehler auch in OB gerechnet (37), der Rechenzeiten wegen jedoch nur für $\Delta xy = 40$ m und größer; ausschließlich für den Fall der BLI wird die Kontrollrechnung auch für das 20 m Raster durchgeführt.

- ii) Die Meßfehlerauswirkung wird für die drei RV mittels (44) abgeschätzt. Außerdem wird das 'Nullgelände' ($f(x, y) = 0$ auf $LX.LY$) je einmal mit den Rasterweiten $\{\Delta xy: 10, 20, 40$ m} und einer Genauigkeit von $\sigma_M = 8$ m "gemessen" und anschließend mit BLI rekonstruiert, um mit $\rho_1 = \sigma_1^2$ (vergl. (70)) eine Angabe über die tatsächliche Meßfehlerauswirkung zu erhalten.
- iii) Der Einfluß, den ein rein zufälliger Meßfehler über das Spektrum auf die AR-Fehlerschätzung hat, wird mit Formel (56) abgeschätzt. Darüber hinaus wird T1 mit $\Delta = 40$ m abgetastet und einer Genauigkeit von $\sigma_M = 0.5$ m "gemessen". Der Schätzwert $\hat{\sigma}_{S1}$ für BLI aus dem durch den Meßfehler verformten Spektrum wird $\hat{\sigma}_S$ gegenübergestellt (vergl. (73)).

3.3. Ergebnisse des zweidimensionalen Falls

Die aus den Berechnungen erhaltenen Ergebnisse werden zum überwiegenden Teil in graphischer Form präsentiert, um einen besseren Gesamteindruck des Genauigkeitsverhaltens zu vermitteln. Nur dort, wo die einzelne Zahl von Interesse ist, wird eine tabellarische Darstellung vorgezogen. Die Analyse der hier zusammengestellten Resultate folgt in Abschnitt 4.

3.3.1. AR-Fehler

In Abb. 3.25 - 3.28 sind die geschätzten mittleren Fehler per Rekonstruktionsverfahren in Abhängigkeit von der Abtastintervallgröße dargestellt. $\hat{\sigma}_S$ sowie Δx sind in Meter angegeben und in einem logarithmischen Maßstab gezeichnet, wobei die 15 Werte pro Kurve geradlinig verbunden sind, um einen kontinuierlichen und damit lesbaren Verlauf zu erzielen.

In Abb. 3.29 - 3.32 sind die prozentuellen Fehler der Schätzwerte gemäß (69) dargestellt. σ_S wurde nach (7) mit $\Delta x' = 0.1\Delta x$ und $\sigma_{M'} = 0$ bestimmt. ϵ wurde mit T multipliziert (siehe Tabelle 3.1), um für alle vier RV den gleichen Variationsbereich zu erzielen.

3.3.2. Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers

In Tabelle 3.1 sind die Abschätzungen \hat{R} der relativen Meßfehlerauswirkung zusammengestellt.

RV	\hat{R}	T
LI	0.59	0.12
KI	0.71	0.08
KQ	0.83	0.05
GM	0.22	0.60
KF	0.57	
.998985		
KF	.7	0.25

Tabelle 3.1:

$$\hat{R} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} H^2(u) du$$

$$T = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-H(u))^2 du$$

Die nach (71) gemittelten relativen Meßfehlerauswirkungen R sind in Abb. 3.33-3.36 in Abhängigkeit von der Abtastintervallgröße dargestellt. Dabei sind die Werte für die Profile T1 und T5 bei $\sigma_M = 8$ m nicht abgebildet, da sie sich nur unwesentlich von jenen für T6 unterscheiden; auch die Werte für $\sigma_M = 0.2$ m sind weggelassen, da der Einfluß der Meßfehlergröße schon aus den präsentierten Resultaten augenfällig wird. Dafür ist in Abb. 3.33 zusätzlich R für KF mit $c_0 = 0.998985$ angegeben. Der Wert für c_0 ist berechnet als Verhältnis zwischen der Varianz des Nutzsymbols (Profil T6) und der Varianz von Nutz- plus Störsymbol (Meßfehler mit der Varianz σ_M^2) - vergl. Seite 51 - $c_0 = V_{T6} / (V_{T6} + \sigma_M^2)$; $V_{T6} = 63000$ m², $\sigma_M = 8$ m.

Abb. 3.37 zeigt die Streuung θ_R (72) und die maximale Abweichung θ_R für das Profil T6 und $\sigma_M = 8$ m. Aus Abb. 3.38 - 3.40 ist die Streuung θ_R für alle drei Profile und die vier RV bei $\sigma_M = 0.5$ m ersichtlich.

In Tabelle 3.2 sind die kleinsten Abtastintervalle angeführt, bei denen ein negativer Wert für die Meßfehlerauswirkung gefunden wurde.

σ_M (m)	T1				T5				T6			
	LI	KI	KQ	GM	LI	KI	KQ	GM	LI	KI	KQ	GM
0.2	80	100	100	20	40	60	60	20	30	30	30	<10
0.5	150	120	150	40	80	100	80	20	60	60	60	20
8	1000	>1000	>1000	200	600	600	600	120	300	600	300	100

Tabelle 3.2: Δx_{min} (m) mit $\rho_j < 0$

Da $\sigma_S = \sigma_M$ eine markante Stelle im Verhalten der Meßfehlerauswirkung ist, sind in Tabelle 3.3 die Abtastintervalle angegeben, bei denen der AR-Fehler die Größenordnung des mittleren Meßfehlers erreicht.

σ_S (m)	T1				T5				T6			
	LI	KI	KQ	GM	LI	KI	KQ	GM	LI	KI	KQ	GM
~0.2	30	30-40	30-40	10	10-20	20	20	<10	10	10	10	<10
~0.5	50	60	60-70	20	30	30	30-40	10	10-20	10-20	10-20	5-10
~8	600	600	600	300	250	250	250	100	150	150	150	60

Tabelle 3.3: Δx (m) wo $\sigma_S \approx \sigma_M$

3.3.3. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des AR-Fehlers

Die Formel (26) wurde für $\frac{\Delta x}{\Delta}$ aus (1,100) in Intervallen von 1 für die vier RV ausgewertet und als Abb. 3.41 gezeichnet.

Die tatsächlichen, gemittelten Einflüsse ζ (74) sind - differenziert nach den drei Profilen - in Abhängigkeit der 15 verwendeten Intervallgrößen in den Abb. 3.42 - 3.44 dargestellt.

Die entsprechenden Werte für die Streuung θ_ζ (75) und die maximale Abweichung θ_ζ sind für T1 und T6 in Abb. 3.45 - 3.46 gezeigt. Die für $\Delta = 1$ m und $\Delta = 40$ m erhaltenen Werte sind nicht abgebildet, wohl aber in der Analyse berücksichtigt.

3.3.4. Einfluß der Abtastintervallgröße zur Spektrumbestimmung auf die Schätzung des AR-Fehlers

In Abb. 3.47 - 3.50 sind die relativen Abweichungen η_ε der geschätzten AR-Fehler (22) von den tatsächlichen AR-Fehlern (7) für den Fall der LI bei verschiedenen Intervallgrößen Δ per Profil aufgezeigt. Die für $\Delta = 10$ m erhaltenen Abweichungen sind in Abb. 3.29 gezeigt.

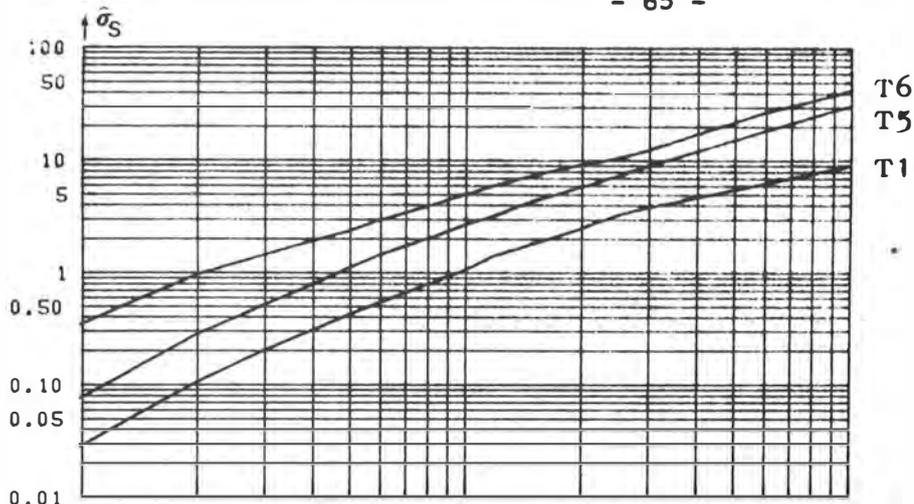


Abb. 3.25: Geschätzte AR-Fehler, LI

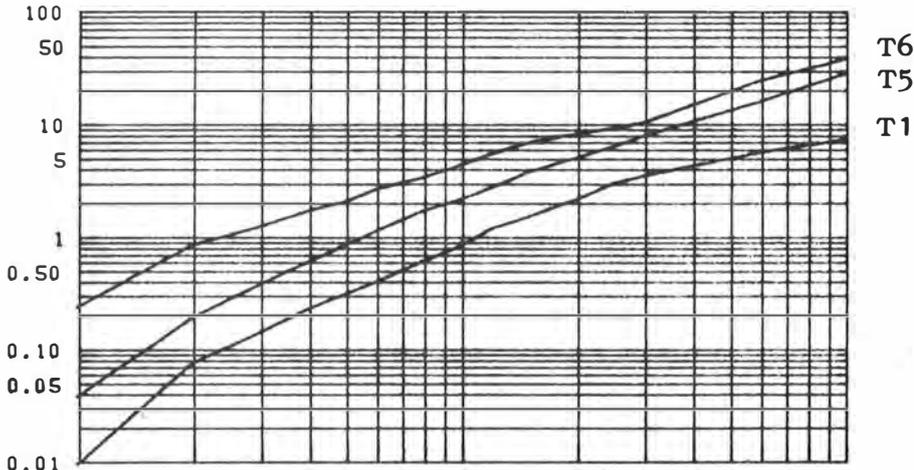


Abb. 3.26: Geschätzte AR-Fehler, KI

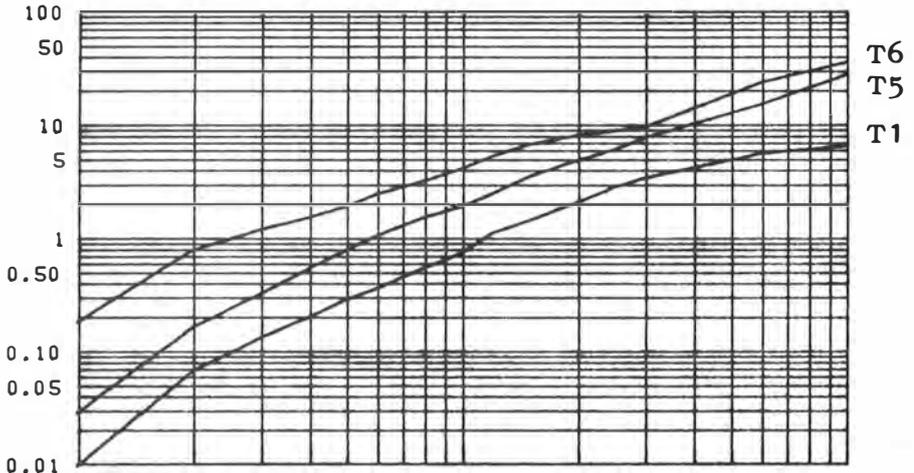


Abb. 3.27: Geschätzte AR-Fehler, KQ

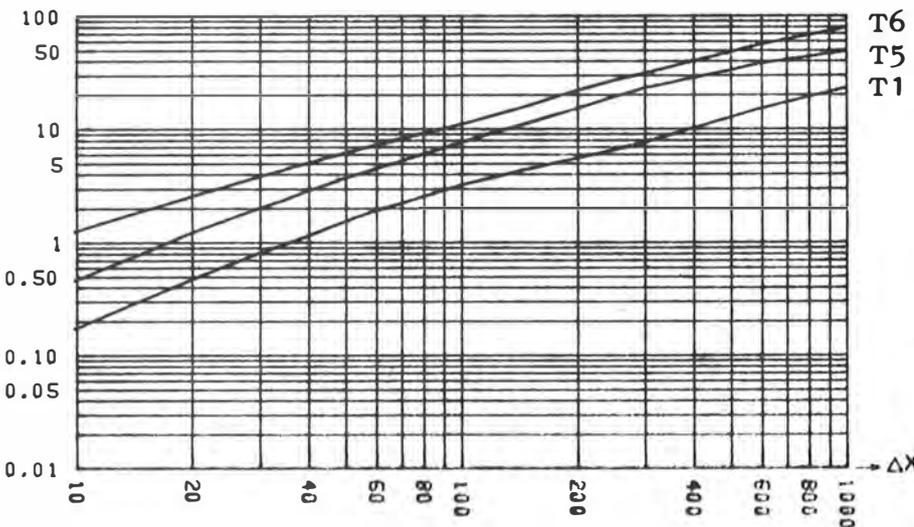


Abb. 3.28: Geschätzte AR-Fehler, GM

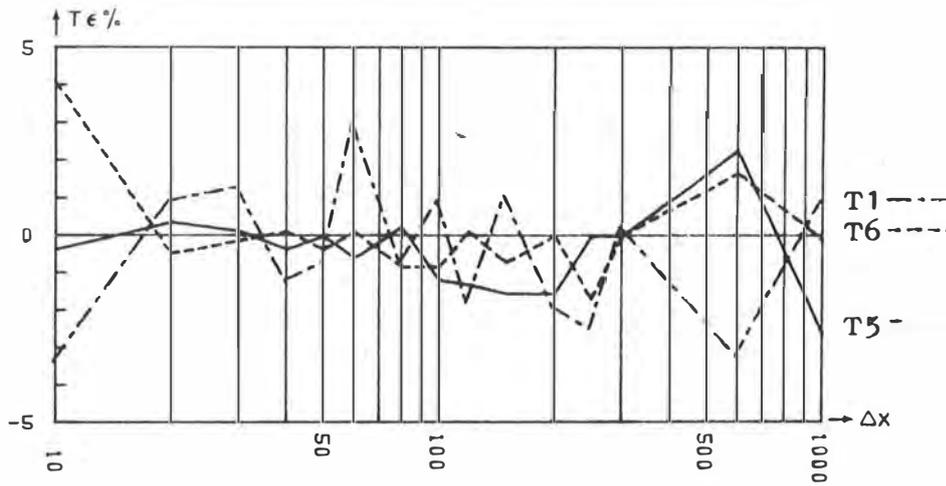


Abb. 3.29: Relative Abweichung der geschätzten AR-Fehler $T\epsilon$; LI, $\Delta = 10$ m

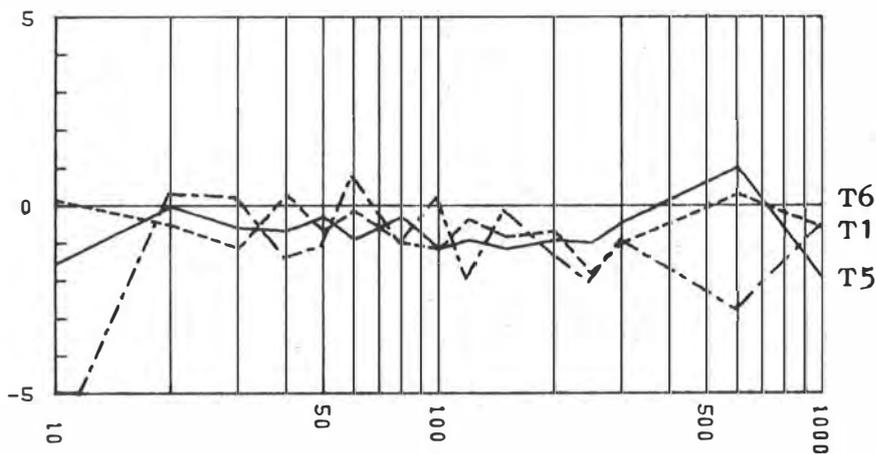


Abb. 3.30: $T\epsilon$; KI, $\Delta = 10$ m

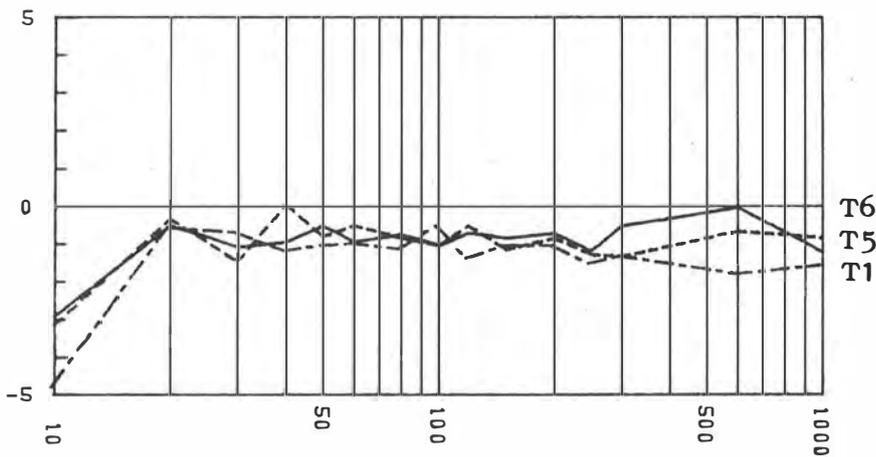


Abb. 3.31: $T\epsilon$; K_Q , $\Delta = 10$ m

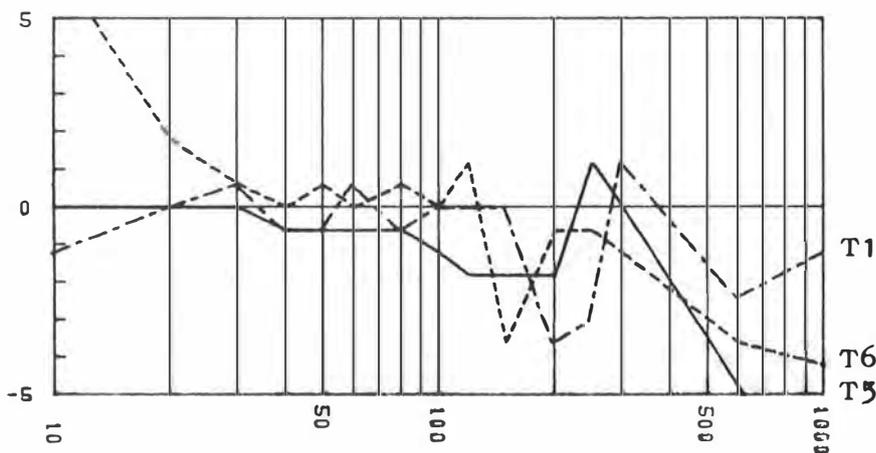


Abb. 3.32: $T\epsilon$; GM, $\Delta = 10$ m

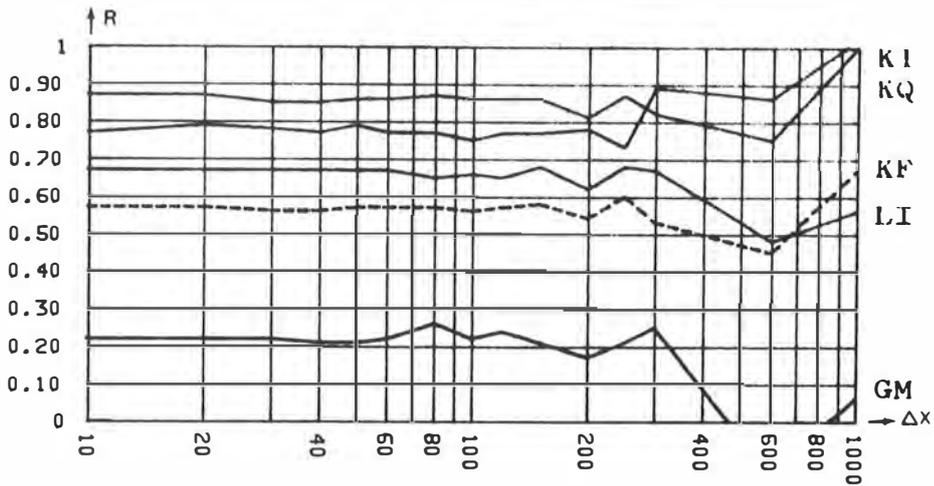


Abb. 3.33: R für T6,

$\sigma_M = 3$ m

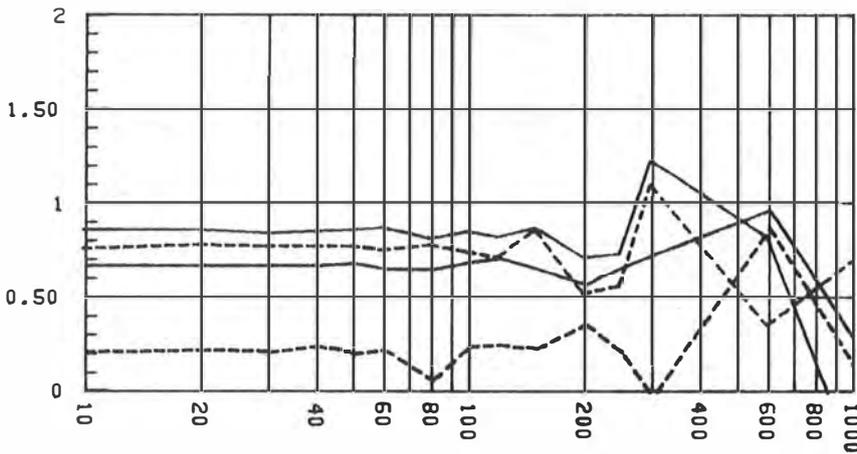


Abb. 3.34: R für T1,

$\sigma_M = 0.5$ m

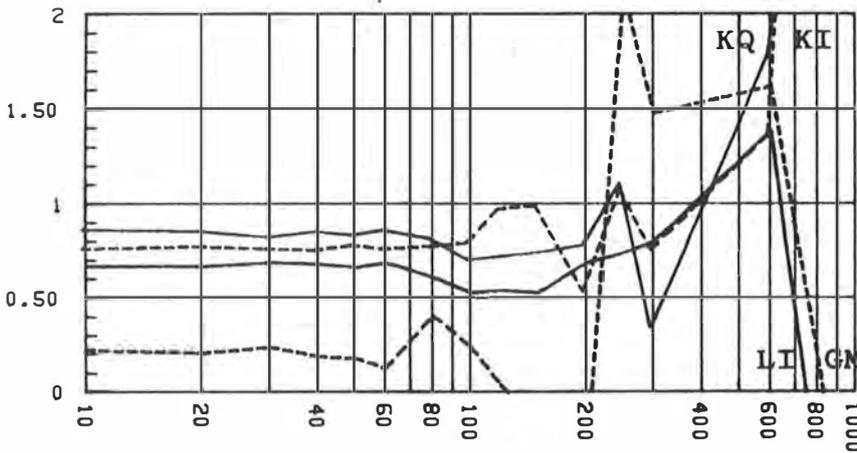


Abb. 3.35: R für T5,

$\sigma_M = 0.5$ m

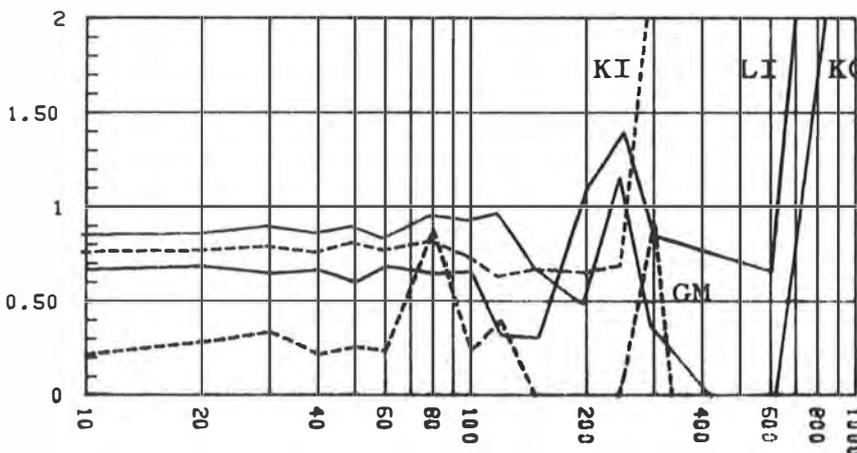


Abb. 3.36: R für T6,

$\sigma_M = 0.5$ m

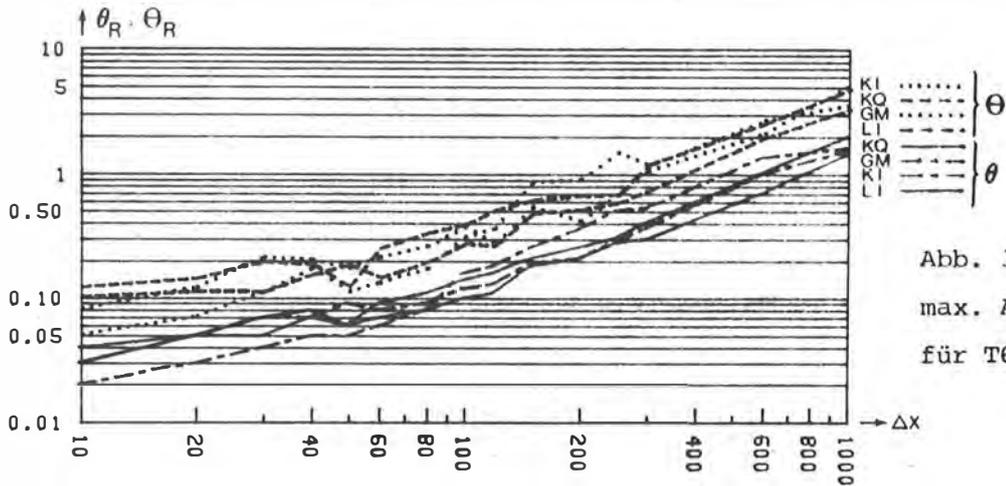


Abb. 3.37: Streuung und max. Abweichung von h'_j für T6, $\sigma_M = 8$ m

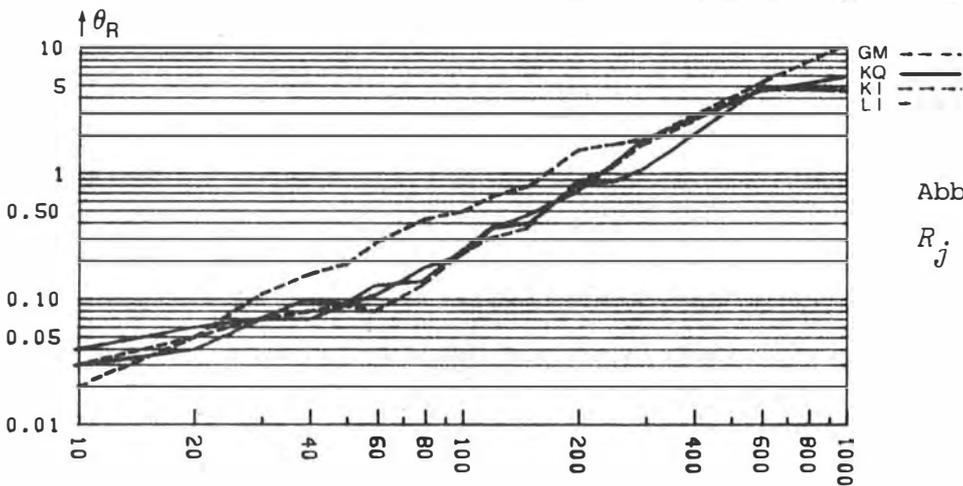


Abb. 3.38: Streuung von R_j für T1, $\sigma_M = .5$ m

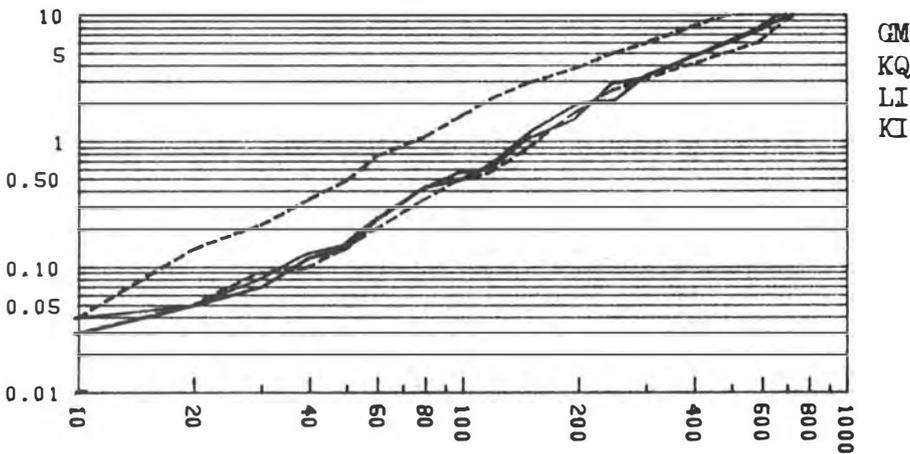


Abb. 3.39: Streuung von R_j für T5, $\sigma_M = .5$ m

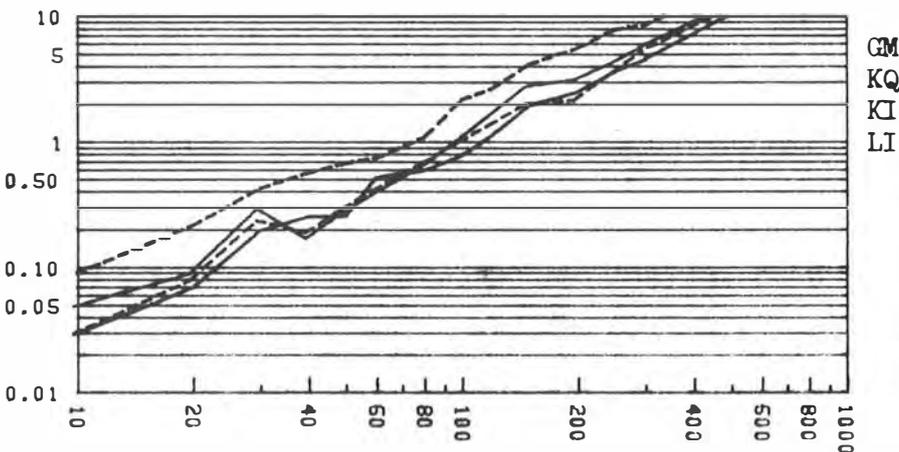
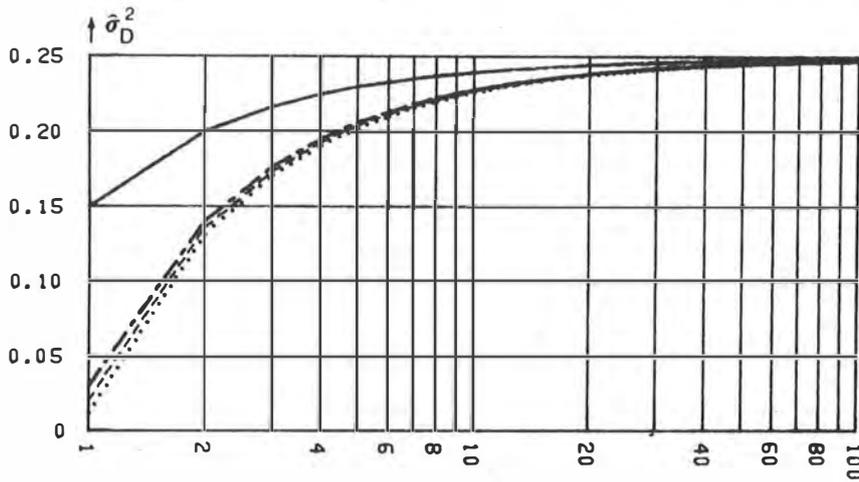
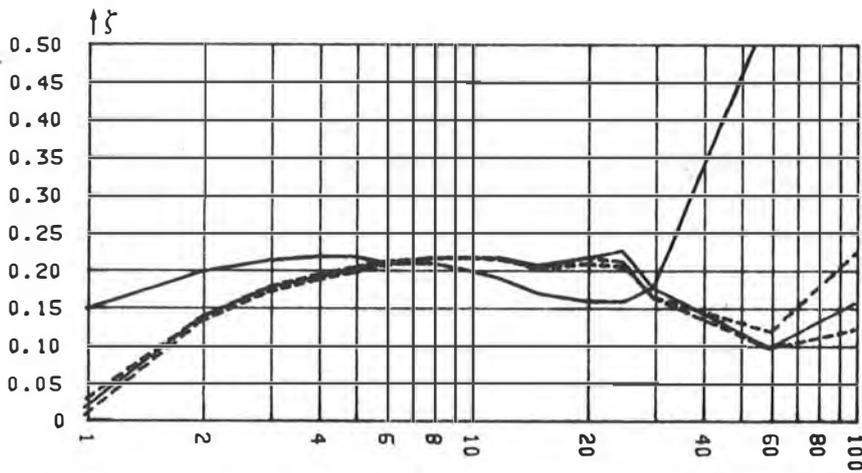


Abb. 3.40: Streuung von R_j für T6, $\sigma_M = .5$ m



GM —
LI - - -
KI - · -
KQ ····

Abb. 3.41: Abschätzung des Einflusses eines zufälligen Meßfehlers mit der Varianz $\sigma_M^2 = 0.25 \text{ m}^2$



GM

LI

KI Abb. 3.42: ζ für T1,

KQ $\Delta = 10 \text{ m}, \sigma_M = 0.5 \text{ m}$

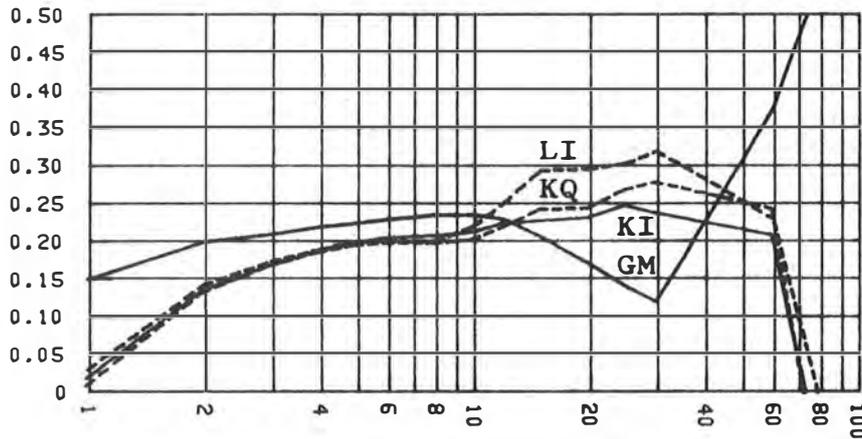
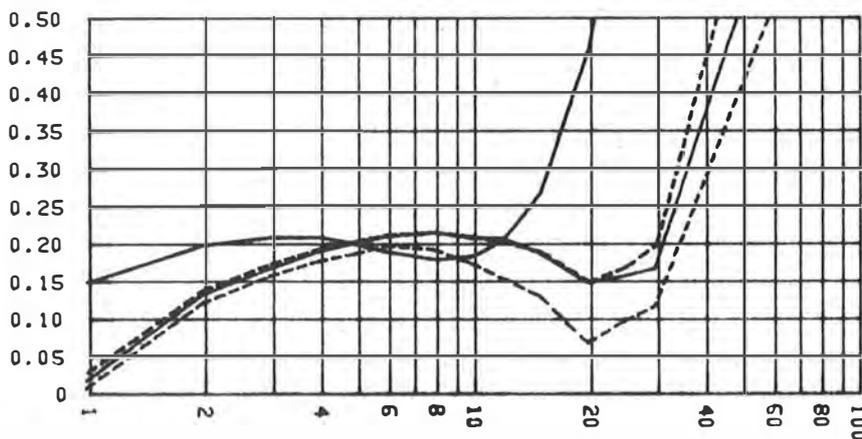


Abb. 3.43: ζ für T5,

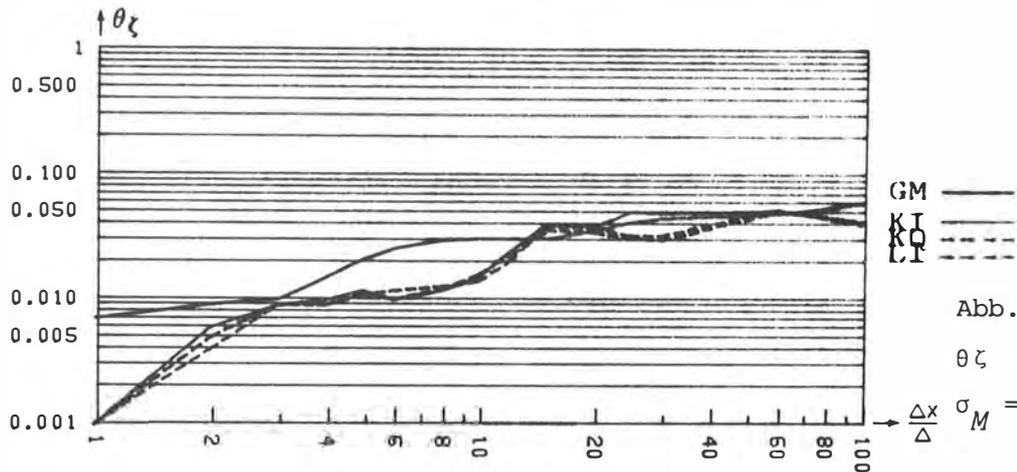
$\Delta = 10 \text{ m}, \sigma_M = 0.5 \text{ m}$



GM —
LI - - -
KI - · -
KQ - · -

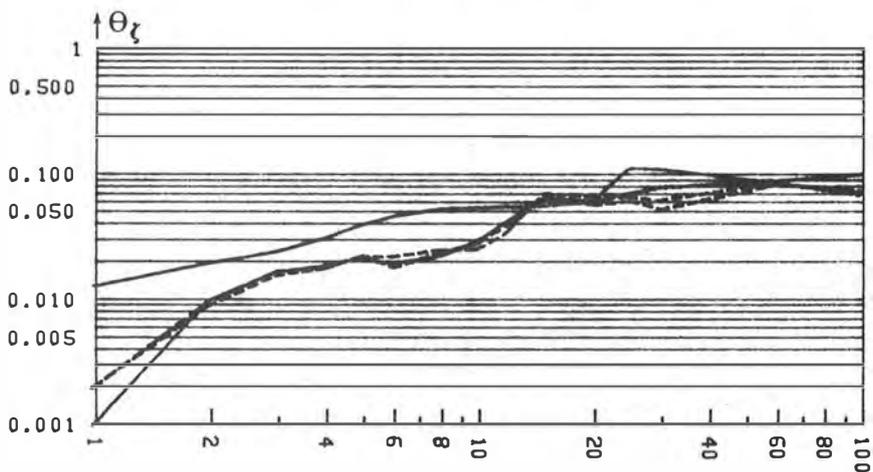
Abb. 3.44: ζ für T6,

$\Delta = 10 \text{ m}, \sigma_M = 0.5 \text{ m}$



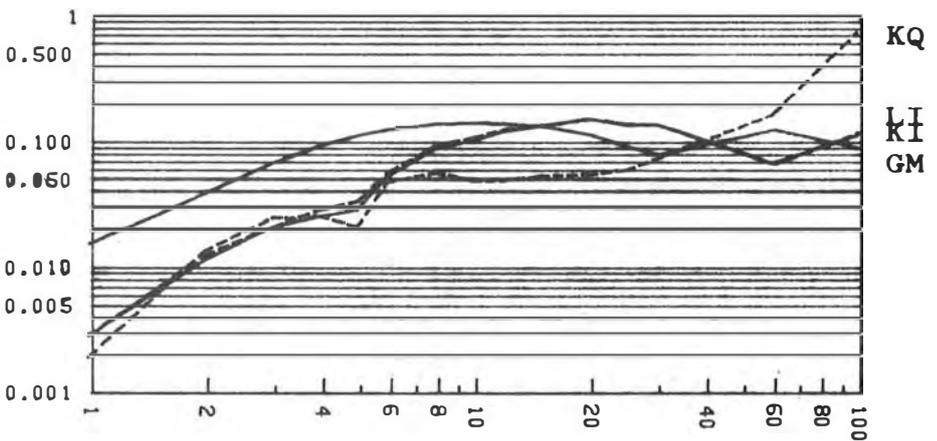
GM
KI
LI

Abb. 3.45.a: Streuung θ_z für T1, $\Delta = 10$ m, $\sigma_M = .5$ m



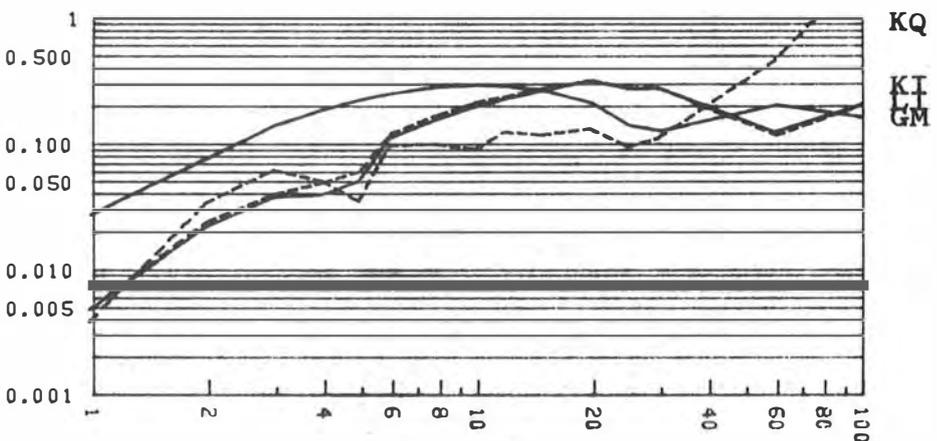
GM
KI
LI

Abb. 3.45.b: Max. Abweichung θ_z für T1, $\Delta = 10$ m, $\sigma_M = .5$ m



KQ
KI
GM

Abb. 3.46.a: Streuung θ_z für T6, $\Delta = 10$ m, $\sigma_M = .5$ m



KQ
KI
GM

Abb. 3.46.b: Max. Abweichung θ_z für T6, $\Delta = 10$ m, $\sigma_M = .5$ m

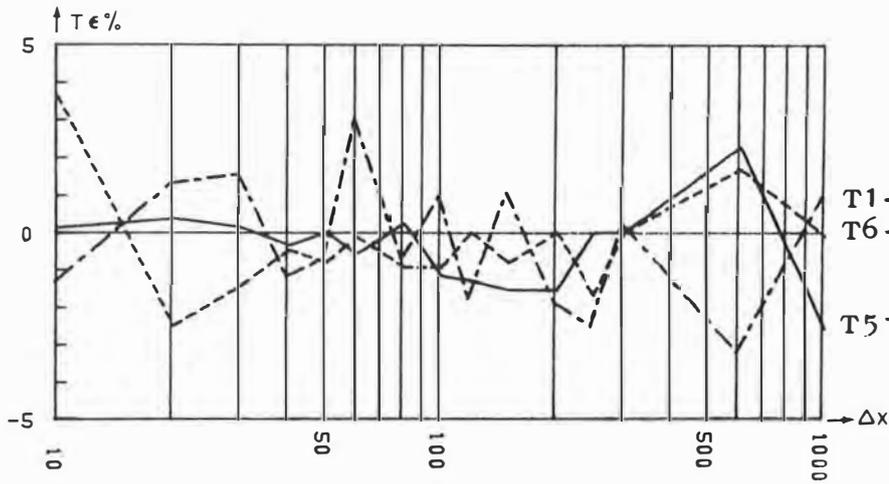


Abb. 3.47: Relative Abweichung der geschätzten AR-Fehler $T\epsilon$; LI, $\Delta = 1$ m

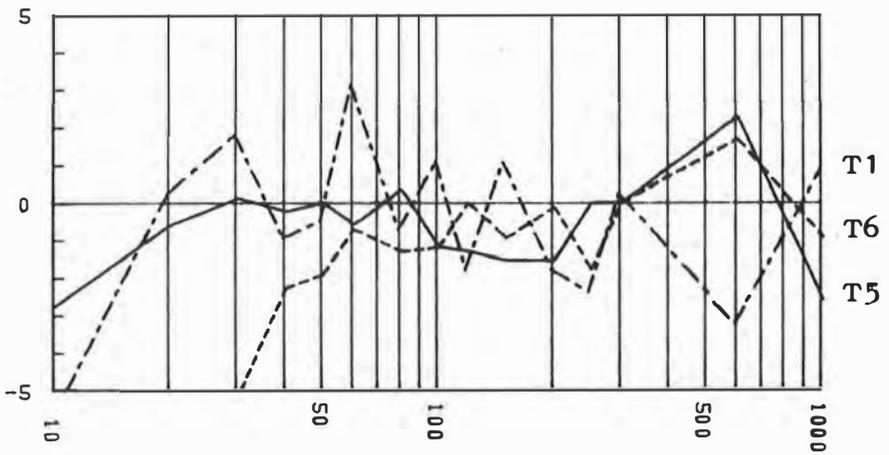


Abb. 3.48: $T\epsilon$; LI, $\Delta = 20$ m

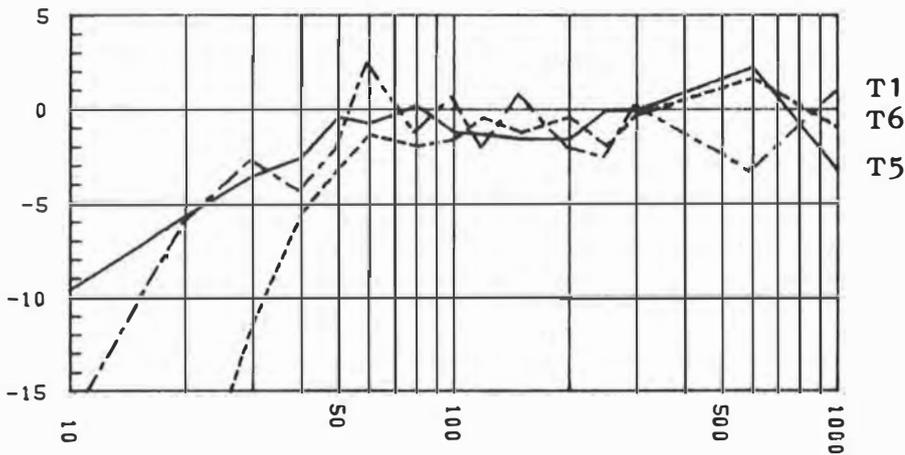


Abb. 3.49: $T\epsilon$; LI, $\Delta = 40$ m

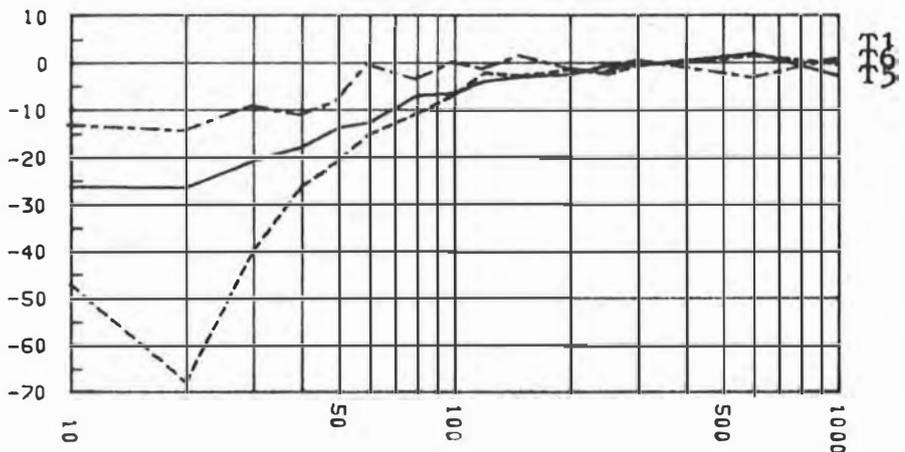


Abb. 3.50: $T\epsilon$; LI, $\Delta = 100$ m

3.4. Ergebnisse des dreidimensionalen Falls

3.4.1. AR-Fehler

In Abb. 3.51 - 3.53 sind die im FB für sechs Maschenweiten geschätzten mittleren Fehler $\hat{\sigma}_S$ per "Gelände" und RV dargestellt. $\hat{\sigma}_S$ für BLI und BKI ist nach (52) mit $H(u,v)$ berechnet, $\hat{\sigma}_S$ für BKQ mit $\bar{H}(u,v)$. $\hat{\sigma}_S$ sowie Δxy sind in Meter angegeben.

Im OB wurden die AR-Fehler nach (37) mit $\Delta x' = \Delta y' = 0.1 \Delta xy$ und $\sigma_{M'} = 0$ gerechnet. Damit ergeben sich nach (69) die prozentuellen Abweichungen der Abb. 3.54 - 3.56. Die Werte von T (57) für die drei RV sind in Tabelle 3.4 angeführt. Abb. 3.57 - 3.58 zeigen den prozentuellen Unterschied in den Schätzwerten aus der strengen ÜF $H(u,v)$ und der approximativen ÜF $\bar{H}(u,v)$ für BLI und BKI.

3.4.2. Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers

Die Näherungswerte \hat{R} bzw. \bar{R} der relativen Meßfehlerauswirkung sind in Tabelle 3.4 gegeben.

RV	\hat{R}	\bar{R}	T	\bar{T}
BLI	0.36	0.35	0.25	
BKI	0.52	0.50	0.16	
BKQ		0.73		0.08

Tabelle 3.4:

$$\hat{R} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} H^2(u,v) du dv$$

$$\bar{R} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \bar{H}^2(u,v) du dv$$

$$T = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-H(u,v))^2 du dv$$

$$\bar{T} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\bar{H}(u,v))^2 du dv$$

Die tatsächlichen relativen Meßfehlerauswirkungen $R = \rho_1 / \sigma_M^2$ - für ELI und $\sigma_M = 8$ m berechnet - sind in Tabelle 3.5 für drei Maschenweiten angeführt.

Δxy	R
10	0.449
20	0.447
40	0.446

Tabelle 3.5:

R für BLI über 8×12 km²

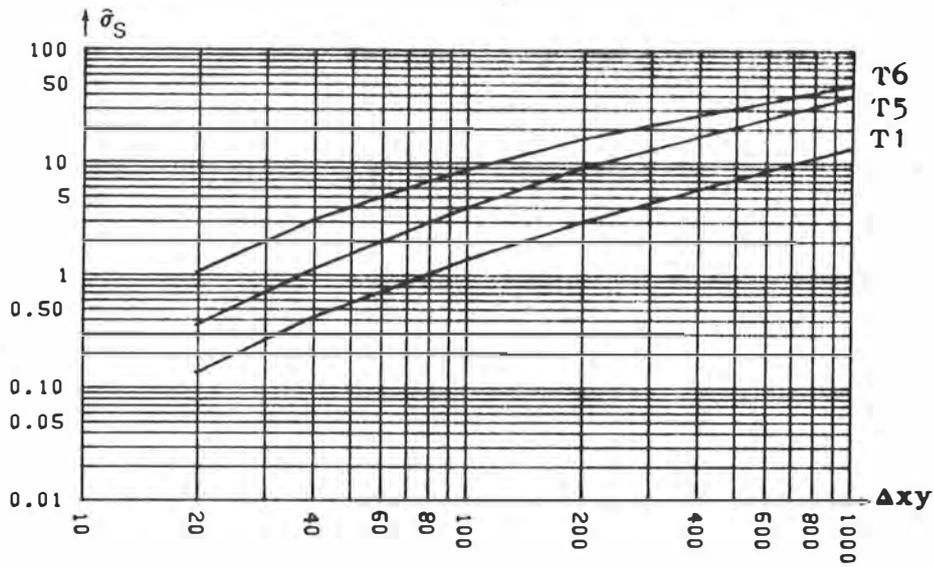


Abb. 3.51: Geschätzte
AR-Fehler, BLI

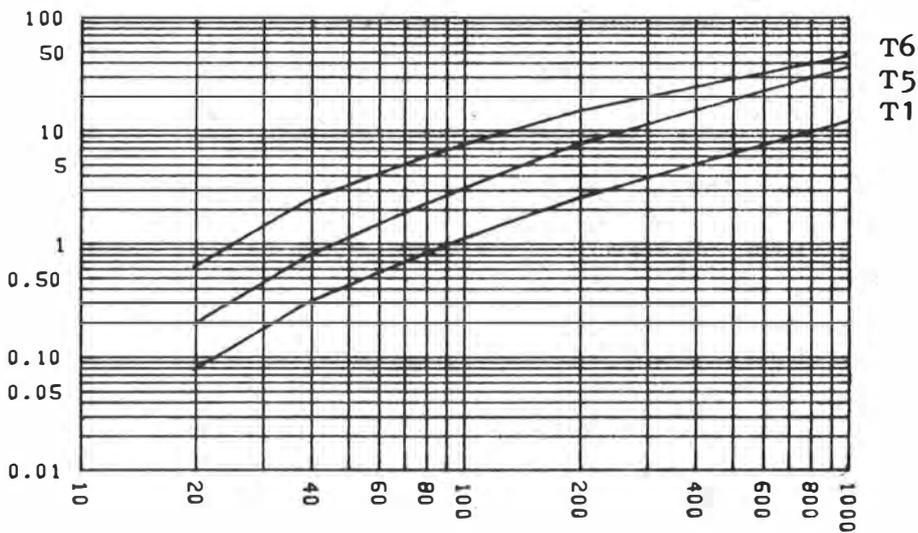


Abb. 3.52: Geschätzte
AR-Fehler, BKI

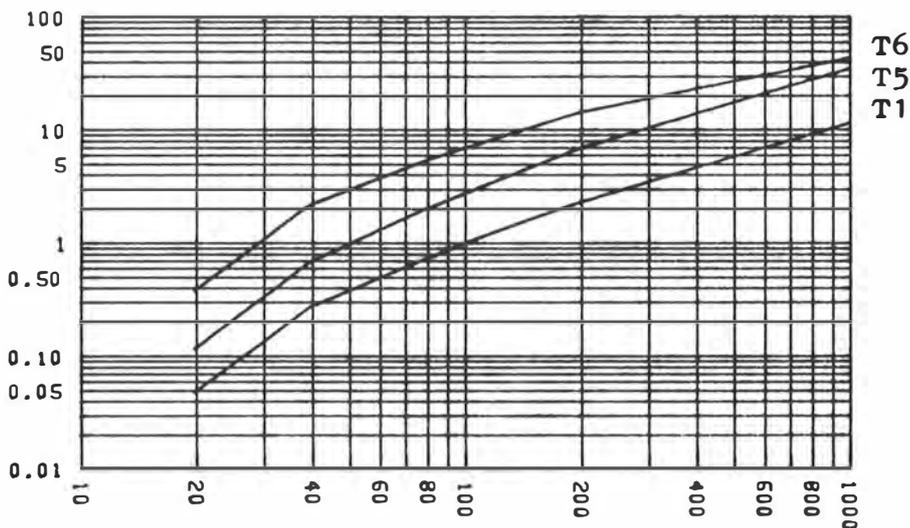


Abb. 3.53: Geschätzte
AR-Fehler, BKQ

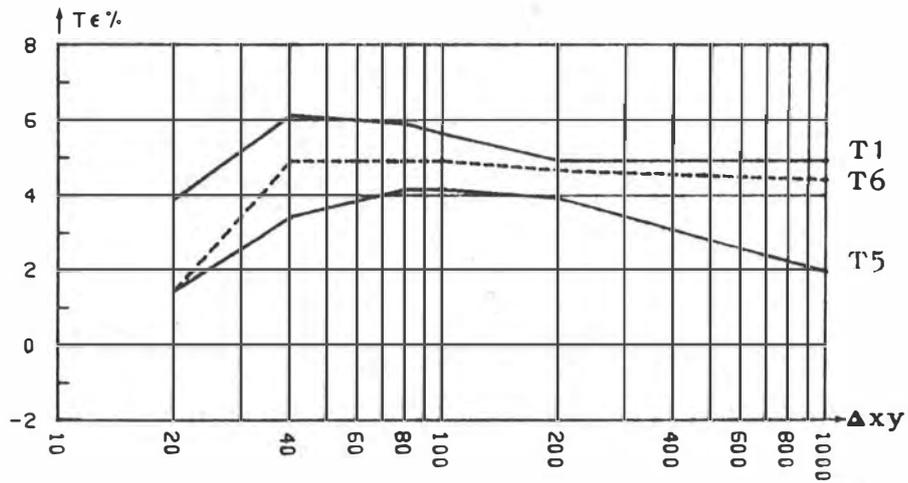


Abb. 3.54: $T\epsilon$; BLI, $\Delta = 20$ m

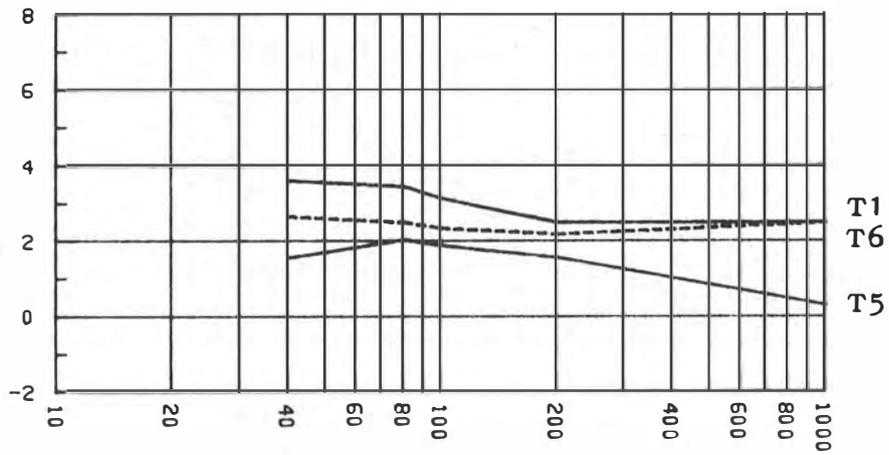


Abb. 3.55: $T\epsilon$; BKI, $\Delta = 20$ m

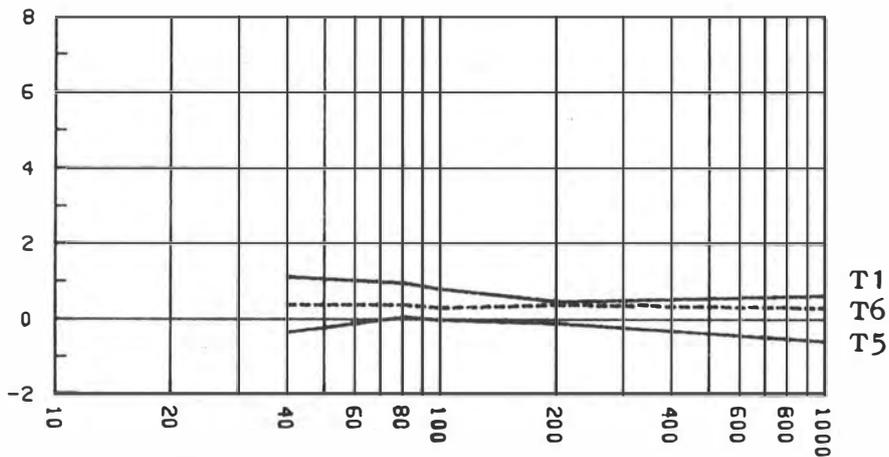


Abb. 3.56: $T\epsilon$; BKQ, $\Delta = 20$ m

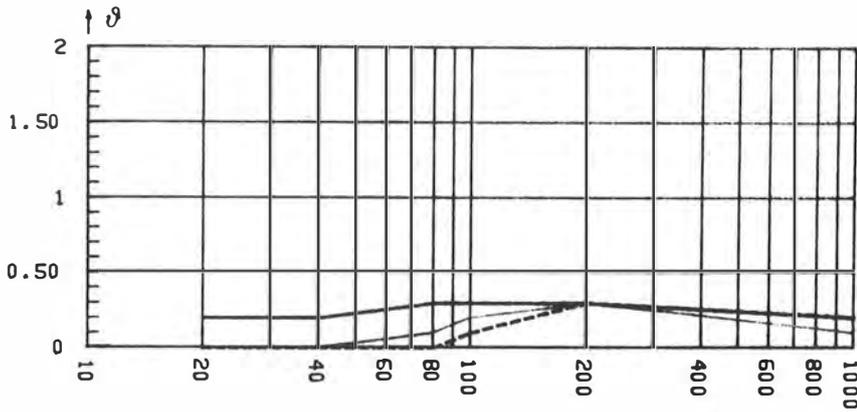


Abb. 3.57:

$$\vartheta = \frac{\overline{\sigma_S} - \hat{\sigma}_S}{\sigma_S} 100\%, \text{ BLI}$$

T6
T5

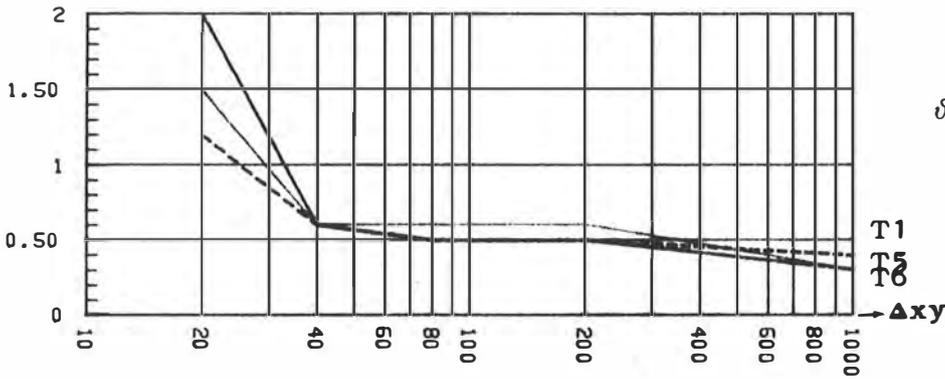
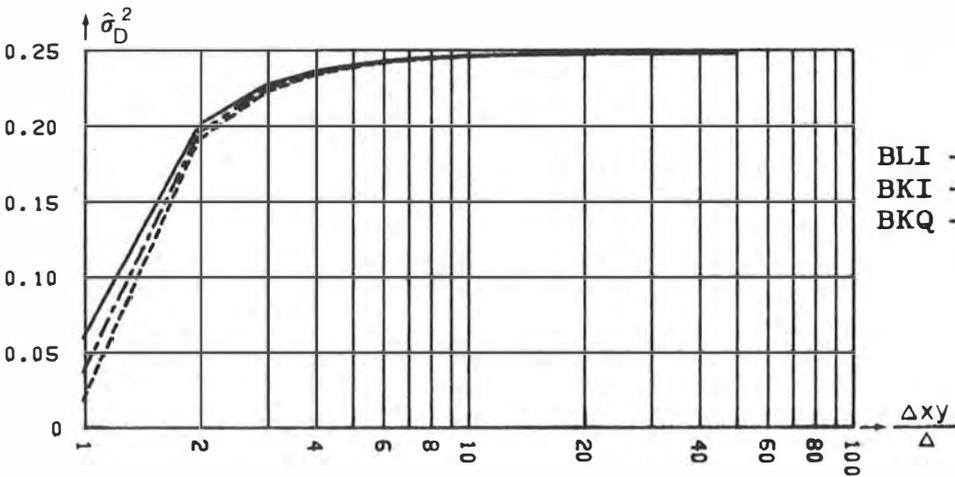


Abb. 3.58:

$$\vartheta = \frac{\overline{\sigma_S} - \hat{\sigma}_S}{\sigma_S} 100\%, \text{ BKI}$$

T1
T2
T3



BLI —
BKI - - -
BKQ - · -

Abb. 3.59: Abschätzung des Einflusses eines zufälligen Meßfehlers mit der Varianz $\sigma_M^2 = 0.25 \text{ m}^2$

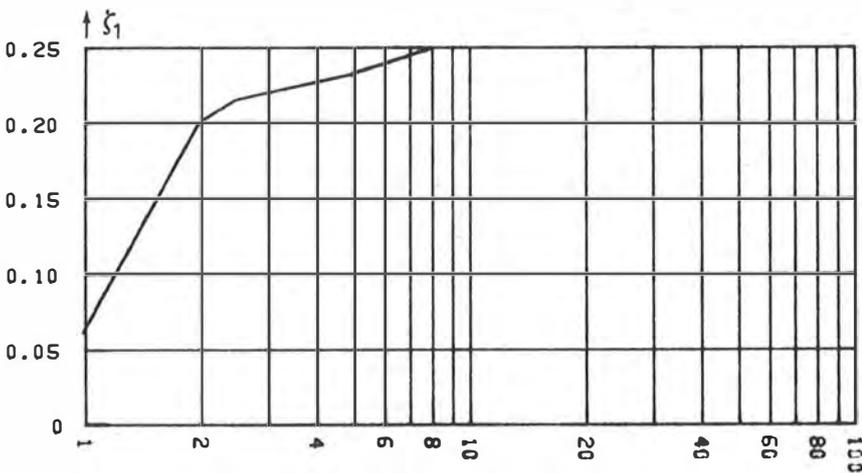


Abb. 3.60: ζ_1 für T1, $\Delta = 40 \text{ m}$, $\sigma_M = 0.5 \text{ m}$; BLI

3.4.3. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des AR-Fehlers

Die sich aus Formel (56) ergebenden Werte sind in Abb. 3.59 für die Maschenweitenverhältnisse $\Delta xy/\Delta$ in Schritten von 1 dargestellt. 'I' für die drei RV sind in Tabelle 3.4 angegeben.

Der tatsächliche Einfluß $\zeta_1 = \hat{\sigma}_{S1}^2 - \hat{\sigma}_S^2$ bestimmt aus einer einzigen "Messung" von T1, ist in Abb. 3.60 für fünf Maschenweiten Δxy dargestellt.

3.4.4. Vergleich mit den Resultaten des zweidimensionalen Falls

BLI zur Rekonstruktion einer in einem Rechteckraster abgetasteten Fläche ist das direkte Analogon zur LI für die Rekonstruktion eines Profils. In Abb. 3.61 sind die prozentuellen Unterschiede

$$\gamma = \frac{\sigma_{S,2D} - \sigma_{S,3D}}{\sigma_{S,2D}} 100\%$$

der im OB gerechneten AR-Fehler für sechs Intervallgrößen $\{\Delta x = \Delta xy: 20, 40, 80, 100, 200, 1000 \text{ m}\}$ dargestellt. $\sigma_{S,2D}$ sind die AR-Fehler für die Profile T1, T5 und T6, $\sigma_{S,3D}$ die der Flächen T1, T5 und T6.

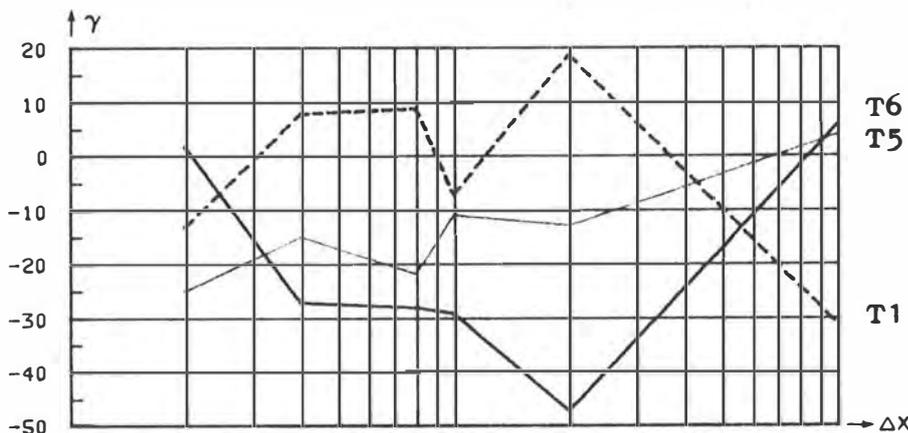


Abb. 3.61: γ für lineare Interpolation

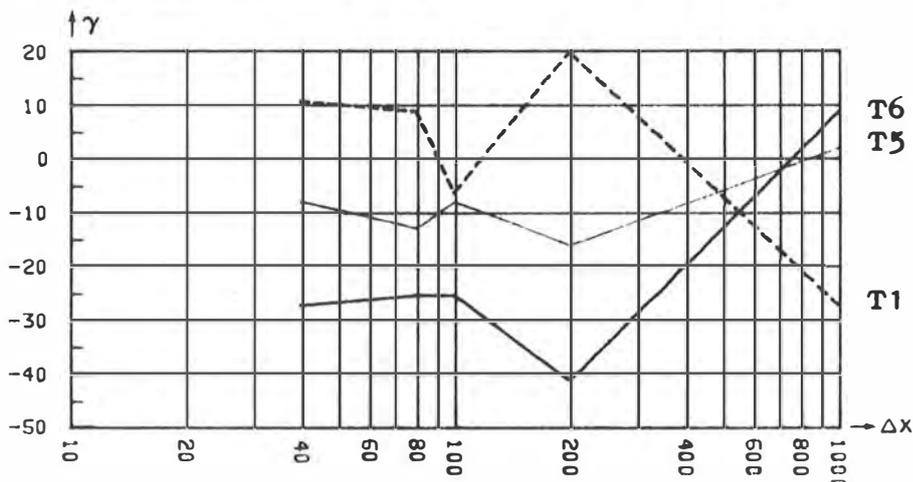


Abb. 3.62: γ für kubische Interpolation

Zwar ist die verwendete KI nur näherungsweise die zweidimensionale Variante der BKI, jedoch der Unterschied zwischen $H(u, v=0)$ der BKI und $H(u)$ der KI ist so gering (vergl. 3.1.2.1.), daß sich auch für die kubische Interpolation der Vergleich zwischen den Resultaten des zweidimensionalen und jenen des dreidimensionalen Falls anstellen läßt (Abb. 3.62).

4. ANALYSE DER ERGEBNISSE

Eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse der empirischen Untersuchungen zum zweidimensionalen Fall ist in (26) zu finden. Im folgenden werden daher die Resultate der Profiluntersuchungen nur zusammenfassend besprochen. Auf den dreidimensionalen Fall hingegen wird detaillierter eingegangen, wobei vor allem auch die Parallelen zum zweidimensionalen Fall beleuchtet werden. Zunächst werden die einzelnen Einflußfaktoren der Genauigkeit eines DHM betrachtet (Abschnitt 4.1.), sodann wird in Abschnitt 4.2. die Genauigkeit der Schätzung im Frequenzbereich unter die Lupe genommen.

4.1. Einflußfaktoren der Genauigkeit eines DHM

4.1.1. Abtastdichte

Das monotone Absinken der ÜF mit abnehmender Abtastdichte (d.h. $u=v\Delta x \rightarrow 1/2$ bzw. $u=v\Delta x \rightarrow 1/2$ und $v=\mu\Delta y \rightarrow 1/2$; siehe Abb. 3.12 sowie Abb. 3.15 - 3.16) läßt - im Hinblick auf Beziehung (13) bzw. (43) - erwarten, daß bei vorgegebenem Gelände und einer bestimmten RV die Genauigkeit des DHM mit wachsendem Abtastintervall monoton fällt. Dies zumindest für ein unendliches Gebiet und bei begrenztem Spektrum, also $F(v) = 0$ für $|v| \geq 1/2\Delta x$ bzw. $F(v, \mu) = 0$ für $|v| \geq 1/2\Delta x$, $|\mu| \geq 1/2\Delta y$ (siehe Abb. 2.12). Gemäß Formel (22) und (52) ($H = 0$ für $|u|, |v| \geq 1/2$) müssen die geschätzten AF-Fehler für die in der empirischen Untersuchung verwendeten RV ebenfalls monoton mit Δx bzw. Δxy steigen (siehe Abb. 3.25 - 3.23 und Abb. 3.51 - 3.53). Die Nichtmonotonie im Absinken der ÜF für BKQ (Abb. 3.21.a - 3.19) ist so gering, daß sie in den berechneten AR-Fehlern nicht zum Ausdruck kommt. Der Anstieg des AR-Fehlers mit größer werdendem Abtastintervall erwies sich in allen Fällen als näherungsweise linear, eine Erscheinung, die auch von experimentellen Untersuchungen an wirklichem Gelände berichtet wurde (1, 21).

Andererseits zeigen die Abb. 3.25 - 3.28 und Abb. 3.51 - 3.53 deutlich, daß bei vorgegebenem Abtastintervall der AR-Fehler mit der Geländevariation zunimmt. T6 weist sowohl die größte Bewegtheit der drei "Gelände" (d.h. größte Frequenzbreite) als auch die größten Höhenunterschiede auf (d.h. im Durchschnitt die größten Amplituden) - siehe Abb. 3.6 - 3.11, sowie Beispiel 2.1.5. zum Vergleich.

Der Vergleich von Abb. 3.25 - 3.26 mit Abb. 3.51 - 3.52 zeigt, daß sich der Einfluß der Abtastdichte auf die Genauigkeit der Flächendarstellung in den Genauigkeitsangaben der Profile widerspiegelt. Für die untersuchten Profile, deren Lage willkürlich gewählt wurde, sind die im FB geschätzten AR-Fehler kleiner als die entsprechenden Schätzwerte für den dreidimensionalen Fall; dieser Unterschied nimmt deutlich mit der Geländevariation zu (siehe auch Abb. 3.61 - 3.62). Der relative Unterschied zwischen den 2D- und 3D-Schätzwerten (in Prozent des Schätzwerts für das Profil) nimmt nur geringfügig mit der Abtastintervallgröße zu und ist für die lineare Interpolation unbedeutend größer als für die kubische. Je glatter und homogener ein Gelände, umso kleiner werden die Unterschiede zwischen den AR-Fehlern von Profilen in unterschiedlichen Richtungen sein; umso repräsentativer ist sodann ein einzelnes Profil für die ganze Fläche. Daß der AR-Fehler für die Fläche im Durchschnitt größer ist als der für ein einzelnes Profil, läßt sich an Hand der ÜF (Abb. 3.15 - 3.16) und des Wellblechmodelles (Abb. 2.18) veranschaulichen: Der AR-Fehler für die Fläche bei einer Abtastung in einem Quadratraster mit Δxy_0 ist durch $H(u_0, v_0)$ bestimmt ($u_0 = \Delta xy_0 (\cos\beta)/\lambda$, $v_0 = \Delta xy_0 (\sin\beta)/\lambda$). Ein Profil des Wellblechs - abgetastet mit $\Delta = \Delta xy_0$ - hat je nach Profilrichtung eine reziproke Abtastdichte u zwischen Null und $\Delta/\lambda = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. Für monoton fallende ÜF ist $H(u) = H(u, v=0) > H(u_0, v_0)$, zumindest wenn $u \leq u_0$ ist. Da der Bereich $(0, u_0)$ größer ist als $(u_0, \sqrt{u_0^2 + v_0^2})$, ist bei zufälliger Profillage der AR-Fehler für ein Profil eher kleiner als der für die Fläche. Dies ist bei BLI ausgeprägter als bei BKI, da bei BLI die Linien gleicher Übertragungsverhältnisse kreisförmiger sind als bei BKI. Dadurch ist der Richtungsbereich für die Profile, für die $H(u) < H(u_0, v_0)$ ist, kleiner.

Nicht behandelt wurde in dieser Arbeit der Einfluß der Abtastrichtung (Rotation des Koordinatensystems in bezug auf die zu erfassende Fläche) auf die Genauigkeit des DHM. Erwähnt sei hier nur, daß ein "Wellblech" (Abb. 2.18) - abgetastet in einem Quadratraster mit bestimmtem Δxy - dann am genauesten durch das DHM dar-

gestellt wird, wenn die Abtastrichtung so gewählt wird, daß $\beta = 45^\circ$ ist. Je weiter die Schichtlinien der ÜF von der Kreisform abweichen, umso ausgeprägter werden die Genauigkeitsunterschiede in Funktion von β sein.

4.1.2. Rekonstruktionsverfahren

Wie die Abb. 3.25 - 3.28 und Abb. 3.51 - 3.53 zeigen, ist die Rekonstruktionsvorschrift - solange sie nur sinnvoll in bezug auf die vorliegenden Referenzdaten und das erwünschte Ergebnis - im Vergleich zur Abtastdichte von untergeordneter Bedeutung für die Genauigkeit eines DHM. Es ist z.B., um einen AR-Fehler von $\sigma_S \approx 4$ m zu erreichen, bei linearen Interpolation eine Abtastung des Profils T1 mit $\Delta x \approx 300$ m erforderlich, wogegen T6 mit einem Intervall von etwa 80 m abgetastet werden müßte. Interpoliert man mit KQ statt LI, so läßt sich die gleiche mittlere Genauigkeit erzielen, wenn T1 mit $\Delta x \approx 250$ m und T6 ebenfalls mit $\Delta x \approx 80$ m abgetastet wird. Wichtigere Kriterien für die Wahl der RV als die Genauigkeit sind: Anordnung der Stützpunkte, Art der erzeugten Linie oder Fläche, Rechenaufwand, Flexibilität und Zuverlässigkeit in der Datenverarbeitung.

Gemäß den ÜF und der Formel (22) bzw. (52) muß der geschätzte AR-Fehler beim Übergang von linearer zu kubischer und weiter zur kleinsten Quadrate Interpolation kleiner werden. Die tatsächlichen mittleren Höhenfehler zeigten bei hinreichender Abtastdichte dasselbe Verhalten; bei zu geringer Abtastdichte ($|F(v, \mu)|$ weit von Null für $|v| > 1/2\Delta x$, $|\mu| > 1/2\Delta y$) kam es aber wiederholt vor, daß z.B. KQ schlechter abschnitt als LI, oder BKQ schlechter als BKI. Diese Diskrepanz zwischen tatsächlichen und geschätzten AR-Fehlern bei geringer Abtastdichte erklärt sich aus der Unzulänglichkeit der Formeln (15), (22) bzw. (45), (52), da sie den Verflechtungseffekt nicht berücksichtigen (siehe 2.1.2. und 2.2.1.).

Der prozentuelle Genauigkeitsgewinn durch kubische statt linearer Interpolation war für alle drei "Gelände" größer als derjenige durch die kleinste Quadrate Interpolation statt der kubischen. Außerdem war der Genauigkeitsgewinn bei kleiner Abtastdichte spürbarer (d.h. mit kleiner werdendem Abtastintervall sowie für glatteres Gelände). Den ÜF zu Folge sollte der Unterschied zwischen den RV bei noch kleineren Abtastintervallen als den verwendeten ($\Delta x = 10$ m, $\Delta xy = 20$ m) für alle "Gelände" verschwinden, somit bleibt nur ein relativ schmaler Bereich für die Abtastdichte, in dem aufwendigere RV als z.B. LI zu etwas höheren Genauigkeiten führen. Darauf wurde bereits in (15) hingewiesen.

Mit Kratkys Ansatz (64) und KQ wurden praktisch idente Genauigkeitswerte erzielt. Ein Vergleich der $\ddot{U}F$ von Abb. 3.14.b mit Abb. 3.12 weist darauf hin, daß sich mit Kratkys Ansatz bzw. der Method nach kleinsten Quadraten noch bessere Resultate erreichen ließen, wenn mit einem größeren Stützpunktfenster operiert würde (ausreichende Abtastdichte vorausgesetzt).

Zu den untersuchten Filterungsverfahren läßt sich folgendes sagen: Die AR-Fehler im Fall von GM sind erwartungsgemäß ansehnlich größer als die für LI (Abb. 3.12 und Abb. 3.25, 3.28); die Absicht von GM ist ja auch, kleinräumige Geländevariationen weitgehend zu unterdrücken (Tiefpaßfilter). Die AR-Fehler im Fall von KF ($c_0 = 0.7, c_1 = 0.1$) sind geringfügig kleiner oder gleich jenen für GM. Wie die $\ddot{U}F$ andeuten (Abb. 3.14.a), sind die Unterschiede einerseits für die kleinen Abtastintervalle ausgeprägter und zum anderen für einen glatteren Profilverlauf. Daß die $\ddot{U}F$ für KF etwas unter Null sinkt, kommt in dem Globalmaß, das der AR-Fehler darstellt, nicht zum Ausdruck. Es bedeutet aber, daß konvexe Formen in diesem Spektralband leicht konkav bzw. die konkaven schwach konvex werden.

Eine Vergrößerung des Stützpunktfensters (mit entsprechender Anpassung des Parameterwerts c der Gaußschen Gewichtsfunktion) bewirkt beim gleitenden Mittel ein schnelleres Absinken der $\ddot{U}F$, somit eine größere Filterungsrate; bei der Methode nach kleinsten Quadraten läßt sich dasselbe durch eine Verringerung von c_0 erreichen. Zumindest beim gewählten Ansatz wird dabei die Filterungsrate nicht ausschließlich durch c_0 bestimmt, sondern durch die Kombination von c_0 und c_1 (bei gleichbleibender Stützpunktfenstergröße). Die $\ddot{U}F$ von GM und KF sowie die geschätzten Genauigkeiten machen deutlich, daß die zwei RV eine Eliminierung eines rein zufälligen Meßfehlers nicht ermöglichen. Die Reduktion des zufälligen Meßfehlers wird gleichzeitig mit einer weitgehenden Unterdrückung der in Relation zum Abtastintervall hochfrequenten Anteile des Nutzsignals erreicht.

4.1.3. Meßfehler

Bedingt durch die Zufälligkeit des hier untersuchten Meßfehlers, läßt sich sein Beitrag zum Gesamtfehler des DHM nur im Fall einer großen Datenmenge (d.h. $L/\Delta x, LX/\Delta x, LY/\Delta y$ groß) sicher angeben (siehe Abb. 3.33 - 3.40, Tabelle 3.2 und Tabelle 3.5 sowie Anhang 4).

Liegt eine nur geringe Anzahl gemessener Werte vor (d.h. Δx , Δxy groß, da l , $LZ.LY$ in den Untersuchungen nicht variiert wurde kann die Meßfehlerauswirkung weit vom Erwartungswert abweichen. Die Abweichung kann umso größer ausfallen, je größer die Geländevariation, je kleiner der Meßfehler und je schlechter die RV (d.h. je größer T' (27), (57)). Bemerkenswert ist, daß die Abhängigkeit der Meßfehlerauswirkung von Geländevariation, Meßfehlergröße und RV erst augenfällig wird, wenn $\sigma_S > \sigma_M$ (siehe Abb. 3.33 - 3.40 in Zusammenhang mit Tabelle 3.3).

Damit läßt sich die Grenze zwischen großer und kleiner Datenmenge durch jenes Abtastintervall - bei vorgegebener Profillänge - festlegen, bei dem der AR-Fehler die Größenordnung des mittleren Meßfehlers erreicht. Das kleinste Abtastintervall, bei dem infolge eines zufälligen Meßfehlers ein kleinerer mittlerer DHM-Fehler auftreten kann als ohne Meßfehler (Tabelle 3.2) ist ca. dreimal so groß wie das "Grenzintervall" (Δx wo $\sigma_S \approx \sigma_M$, siehe Tabelle 3.3).

Die Abb. 3.33 - 3.36 zusammen mit Abb. 3.37 - 3.40 zeigen, daß im Fall von GM der zufällige Meßfehler bei einer großen Datenmenge nur zu etwa 20% in die Varianz des DHM-Fehlers eingeht. Für KF mit $c_0 = 0.7$ sind es vergleichsweise 25% von σ_M^2 . Wählt man hingegen $c_0 = 0.998985$ - entsprechend dem Verhältnis der Varianz der Geländehöhen von Profil T6 zur Varianz der Referenzwerte bei $\sigma_M = 8$ m (siehe Seite 63) - so scheinen in der Varianz des DHM-Fehlers immerhin noch ca. 60% von σ_M^2 auf (siehe Abb. 3.33). Im Vergleich dazu ist die Meßfehlerauswirkung bei LI, die nicht auf Filterung ausgelegt ist, ca. 70% der Meßfehlervarianz.

4.2. Genauigkeit der Schätzung

4.2.1. Schätzung des AR-Fehlers

4.2.1.1. ϵ bei hinreichend großer Abtastdichte zur Spektrumbestimmung

Die Abb. 3.29 - 3.32 und Abb. 3.54 - 3.56 geben einen Einblick in die Güte der AR-Fehlerschätzung mit Formel (22) bzw. (52). Die DFT wurde aus der Abtastung der "Gelände" mit einem Intervall gleich groß wie die kleinste der untersuchten DHM-Rasterweiten berechnet ($\Delta = \Delta x_{min} = 10$ m, $\Delta = \Delta xy_{min} = 20$ m).

Zunächst einmal fällt auf, daß sich ϵ - der Unterschied zwischen geschätztem (im FB gerechnet) und tatsächlichem (im OB gerechnet) mittleren Höhenfehler in Prozent des geschätzten AR-Fehlers - für den zweidimensionalen Fall anders verhält als

für den dreidimensionalen Fall. An den untersuchten Profilen zeigt ϵ eine deutliche Abhängigkeit von der RV: Je besser die Rekonstruktion (gemessen am AR-Fehler), umso größer kann ϵ sein. Es zeigt sich, daß die prozentuellen Unterschiede für die vier verwendeten RV durch Multiplikation mit T (Tabelle 3.1) dieselbe Größenordnung erreichen. Die integrierte Varianzfunktion V ist - bei hinreichend kleiner Abtastdichte - ein Maß für die Qualität der Rekonstruktion.

Weiters zeigen die Abb. 3.29 - 3.32 die Neigung der mit (22) geschätzten AR-Fehler, kleiner zu sein als die tatsächlichen mittleren Fehler. Dieser Optimismus nimmt mit abnehmenden T zu. Unabhängig von der RV zeigt ϵ eine geringfügige Tendenz, mit dem Abtastintervall größer zu werden, wobei sich für T1 wiederholt größere Werte ergeben als für T6. Offensichtlich wirkt sich die Nichtberücksichtigung des Verflechtungseffekts durch (22) umso stärker aus, je besser die RV. Die durchgeführten Profiluntersuchungen deuten jedoch an, daß sich die Größenordnung des Unterschieds ϵ mit Hilfe der ÜF bzw. T gut angeben läßt.

Die gerechneten Abweichungen des geschätzten AR-Fehlers vom tatsächlichen - bei der beschriebenen Vorgehensweise zur Genauigkeitsschätzung im dreidimensionalen Fall - werden von BLI zu BKI zu BKQ kleiner. Dabei wurde die AR-Fehler für BKQ nach (52) mit der Näherungsübertragungsfunktion $\bar{H}(u,v)$ geschätzt. Durch die Multiplikation mit T (Tabelle 3.4) werden die Unterschiede zwischen den relativen Abweichungen für die drei RV noch verstärkt. Außerdem sind in allen Fällen, mit Ausnahme der Rekonstruktion von T5 mit BKQ, die geschätzten AR-Fehler größer als die tatsächlichen. Die Abb. 3.54 - 3.56 zeigen auch die geringfügig fallende Tendenz von ϵ mit größer werdender Rasterweite. Für die BLI war ϵ jeweils für $\Delta xy = \Delta = 20$ m am kleinsten.

ϵ , berechnet für BLI und BKI am periodischen Signal des Beispiels 2.2.4., zeigt hingegen genau dieselben Eigenschaften, wie sie für den zweidimensionalen Fall konstatiert wurden: ϵ ist bei zu geringen Abtastdichten ($\nu \Delta xy > 1/2$ oder $\mu \Delta xy > 1/2$, d.h. $\Delta xy > 100$ m) für BKI größer als für BLI; die Werte $T\epsilon$ sind von derselben Größenordnung. Ebenso waren die geschätzten AR-Fehler kleiner als die tatsächlichen, der Unterschied zeigte steigende Tendenz mit wachsendem Δxy . Das demgegenüber unterschiedliche Verhalten von ϵ an den drei Testflächen läßt sich als Folge der Spektrumbestimmung erklären. Die Horizontierung der Profile in der x- und y-Richtung bewirkt eine noch zu wenig weitgehende Abspaltung von Flächenkomponenten, die sich auf die Genauigkeitsschätzung störend auswirken. Es wäre zu untersuchen,

ob etwa die Abspaltung eines Trends \bar{f} vorteilhafter wäre, der die Laplace Gleichung $\nabla^2 \bar{f}(lx, ly) = 0$ erfüllt. Dies unter der Bedingung, daß die parallelen Ränder der übrigbleibenden Fläche gleich sind.

$$(\nabla^2 \bar{f}(lx, ly) = \bar{f}(lx+1, ly) + \bar{f}(lx-1, ly) + \bar{f}(lx, ly+1) + \bar{f}(lx, ly-1) - 4\bar{f}(lx, ly)).$$

Die Unterschiede in den Schätzwerten, zum einen gerechnet mit der strengen ÜF zum anderen mit der trennbaren, sind für BLI und BKI und die drei Testflächen so gering (Abb. 3.57 - 3.58), daß sie im Hinblick auf die Unsicherheit der Schätzung (Abb. 3.54 - 3.55, Tabelle 3.4) als unbedeutend bezeichnet werden können.

4.2.1.2. Einfluß der Abtastdichte zur Spektrumbestimmung

Der Vergleich von Abb. 3.29 mit Abb. 3.47 macht deutlich, daß sich durch Verringerung des Abtastintervalls zur Spektrumbestimmung von $\Delta = 10$ m auf $\Delta = 1$ m für die untersuchten Profile keine Verbesserung der Schätzwerte erreichen läßt. Solange das Intervall Δ hinreichend klein ist, sodaß die für die Genauigkeitsschätzung wesentlichen kleinräumigen Geländevariationen erfaßt werden (Bedingung (9)), läßt sich der AR-Fehler mit Formel (22) gut schätzen. Dies ist etwa für T6 mit $\Delta = 20$ m kaum noch der Fall (Abb. 3.48). Ist Δ zu groß, so kommt es vor allem für $\Delta x < \Delta$ zu beträchtlicher Fehlschätzungen wegen der Verflechtung des Spektrums (siehe Abb. 3.49 - 3.50). Die Schätzwerte für die geringen DHM-Dichten ($\Delta x \gg \Delta$) hingegen werden kaum beeinträchtigt, was nicht verwunderlich ist, da für die gegebenen Profile mit $\Delta = 100$ m etwa die Gesamtvarianz der Höhen noch gut erfaßt wird, zu der das geschätzten AR-Fehlerquadrat mit wachsendem Δx konvergiert.

4.2.1.3. Einfluß eines zufälligen Meßfehlers

Die Referenzwerte zur Spektrumbestimmung werden in der praktischen Anwendung zumindest mit einem zufälligen Meßfehler behaftet sein. Wie ein Vergleich von Abb. 3.41 bzw. 3.59 mit den Abb. 3.42 - 3.44 bzw. Abb. 3.60 zeigt, läßt sich der Einfluß eines zufälligen Meßfehlers auf die Schätzung des AR-Fehlers sehr gut mit Formel (26) bzw. (56) angeben - solange Δx klein ist bei festem Δ . Die abgebildeten Streuungswerte θ_{ζ} sowie die maximalen Abweichungen θ_{ζ} (Abb. 3.45 - 3.46) weisen ebenfalls daraufhin, daß der Meßfehlereinfluß mit wachsendem Δx ($\Delta = 10$ m) in zunehmendem Maß vom Erwartungswert abweichen kann. Dies ist nicht

verwunderlich, da ja die Varianzfunktion $(1-H(u))^2$ monoton mit Δx steigt, somit "Fehlannahmen" bezüglich des Spektrums des Meßfehlers (siehe 2.1.6.) umso deutlicher zum Ausdruck kommen, je größer Δx ist.

Andererseits kann das tatsächliche Spektrum des zufälligen Meßfehlers umso mehr von dem angenommenen konstanten Wert σ_M^2/N abweichen, je größer Δ , also je weniger Werte N zur Spektrumbestimmung vorliegen. Dementsprechend zeigte sich auch, daß die Abweichung von ζ gegenüber $\hat{\sigma}_D^2$ sehr gering ist, wenn $\Delta = 1$ m für die drei Profile (z.B. für T1 und LI maximal 6% von $\hat{\sigma}_D^2$ über die 15 untersuchten Intervallgrößen, wogegen bei $\Delta = 10$ m der maximale Unterschied 50% ist). Auch die Streuwerte waren äußerst klein (z.B. für T1: $\theta_\zeta = 0.003$ für alle Intervallgrößen Δx und alle vier RV). Bei $\Delta = 40$ m können größere Abweichungen von ζ gegenüber $\hat{\sigma}_D^2$ als bei $\Delta = 10$ m auftreten, dies bei gleichem $\Delta x/\Delta$. Außerdem ist der Anstieg der Streuung θ_ζ mit zunehmenden Δx bedeutend steiler. Im dreidimensionalen Fall ist nach Abb. 3.60 bei $\Delta = 40$ m für T1 noch eine recht gute Abschätzung von ζ durch $\hat{\sigma}_D^2$ möglich,

Wie Abb. 3.42 - 3.46 aufzeigen, nimmt die mögliche Abweichung des Meßfehlerinflusses von der Abschätzung $\hat{\sigma}_D^2$ nicht nur mit Δx zu, sondern auch mit der Geländevariation sowie schlechter werdender RV - eine Erscheinung, wie sie auch für die Meßfehlerauswirkung (4.1.3.) registriert wurde. Überdies weist die Berechnung von ζ , θ_ζ und Θ_ζ für T1 mit $\Delta = 10$ m und $\sigma_M = 8$ m bei linearer Interpolation auch darauf hin, daß die Abweichung von ζ gegenüber $\hat{\sigma}_D^2$, ausgedrückt in Prozent von $\hat{\sigma}_D^2$, geringer ist, je größer σ_M ist. Das Verhältnis der Streuwerte sowie der maximalen Abweichungen bei $\sigma_M = 0.5$ zu $\sigma_M = 8$ war für $\Delta x = \Delta = 10$ m etwa gleich dem Verhältnis der Meßfehlervarianzen. Der Anstieg von θ_ζ bzw. Θ_ζ mit Δx war für $\sigma_M = 8$ m jedoch wesentlich geringer als für $\sigma_M = 0.5$ m. Dies läßt darauf schließen, daß für den Meßfehlerinfluß Ähnliches gilt wie für die Meßfehlerauswirkung: Bei vorgegebenem Δ wird ab einem bestimmten Δx der Unterschied zwischen dem tatsächlichen und dem geschätzten Meßfehlerinfluß beachtlich. Diese Grenze für Δx hängt von der Geländevariation, der RV und der Meßfehlergröße ab.

4.2.2. Schätzung der Meßfehlerauswirkung

Mit \hat{R} , berechnet durch Integration der $\ddot{U}F$ (Tabelle 3.1), läßt sich ein Näherungswert für die Auswirkung eines zufälligen Meßfehlers im Fall einer großen Datenmenge ($L/\Delta x \rightarrow \infty$) angeben. Für LI z.B. ist der Erwartungswert $(2/3)\sigma_M^2$ (siehe Seite 12 sowie Abb. 3.33 - 3.36), der nach (14) berechnete Näherungswert für die

Meßfehlerauswirkung $0.59\sigma_M^2$. Vergleicht man R für $\Delta x = 10$ m (Abb. 3.33 - 3.36) mit \hat{R} , so sieht man, daß für die untersuchten RV der Näherungswert kleiner ist als der Erwartungswert und umso weniger von Erwartungswert abweicht, je kleiner T ist. Solange $\sigma_S < \sigma_M$ (siehe 4.1.3.) ist somit der Beitrag eines rein zufälligen Meßfehlers zur Varianz des DHM-Fehlers durch $\hat{R}\sigma_M^2$ ausreichend beschrieben. Die Übertragungsfunktion verschafft also eine sehr einfache und gute Bestimmungsmöglichkeit der Meßfehlerauswirkung.

Sind auch die durchgeführten Untersuchungen zur Meßfehlerauswirkung im dreidimensionalen Fall sehr beschränkt, so läßt sich doch annehmen, daß oben Gesagtes auch hierfür gilt (vergleiche Tabelle 3.4 mit Tabelle 3.5). Wie die Tabelle 3.4 zeigt, sind die Unterschiede zwischen \hat{R} (berechnet auf Grund der strengen ÜF) und \bar{R} (mit der trennbaren ÜF gerechnet) für BLI und BKI unbedeutend.

5. ANWENDUNG DER GENAUIGKEITSSCHÄTZUNG

In diesem Abschnitt werden - gestützt auf die vorangegangene Untersuchung und Analyse - einfache Verfahrensregeln zur Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle mittels Spektralanalyse angegeben.

5.1. Genauigkeit eines DHM und davon abgeleiteter Größen

5.1.1. Schätzung der Genauigkeit eines bestehenden DHM

Übersichtsmäßig ist der Vorgang der Berechnung des mittleren Fehlers eines DHM im Frequenzbereich durch Abb. 5.1 dargelegt.

Zur näheren Erläuterung zunächst folgendes Zahlenbeispiel: Es soll der mittlere Fehler eines DHM aus dem Profil T6, abgetastet mit $\Delta x = 10$ m bei einer Meßgenauigkeit von $\sigma_M = 0.5$ m und rekonstruiert mit LI, geschätzt werden:

Nach der Profilhorizontierung (sodaß $g(0) = g(N)$, $N = 1200$) wird gemäß (21) das Spektrum aus den (mit einem zufälligen Fehler behafteten) Höhenkoten gerechnet.

Ist die ÜF gegeben, so läßt sich der Vektor der Varianzfunktion mit

$u_k = k\Delta x/L = k/1200$ aufstellen. Mit (22) erhält man sodann den Schätzwert $\hat{\sigma}_{S1}^2 = 0.161$ ($= 0.363^2 + 0.029$; siehe (73), Abb. 3.25 und Abb. 3.44).

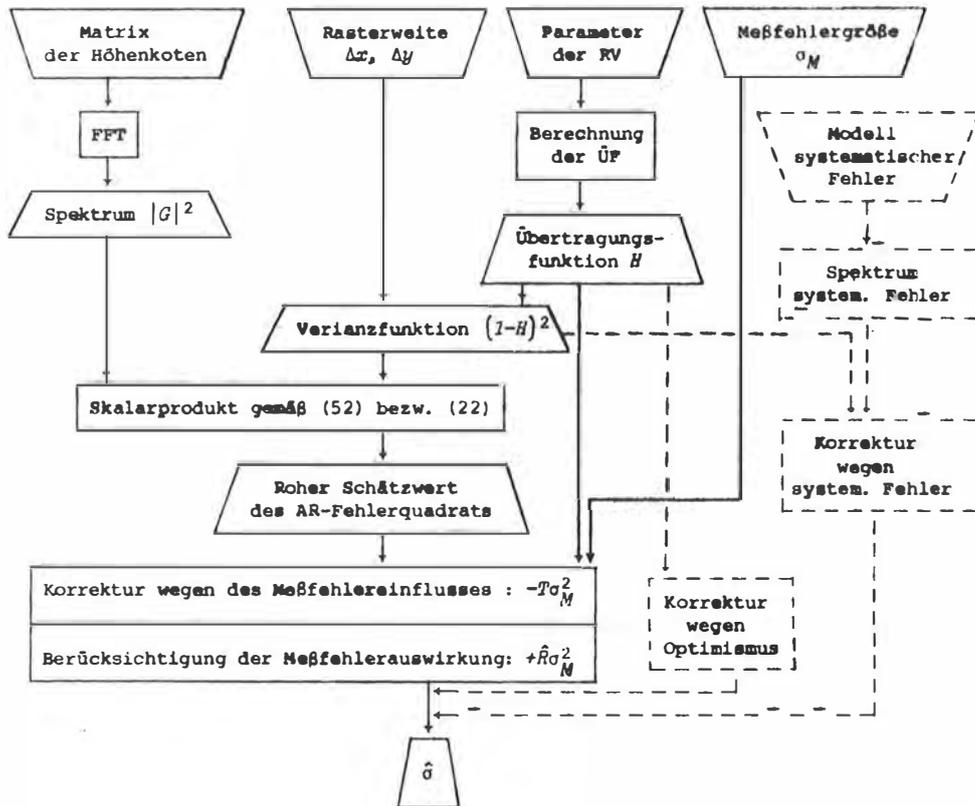


Abb. 5.1: Diagramm des Schätzvorgangs

Als Korrektur der Fehlschätzung wegen des vorhandenen Meßfehlers erhält man mit Formel (26): $\hat{\sigma}_D^2 = T\sigma_M^2 = 0.030$ (siehe Abb. 3.41). Damit ergibt sich der Schätzwert der AR-Fehlerquadrats $\hat{\sigma}_S^2 = 0.131$, zu dem man noch einen gewissen Betrag addieren könnte, da man mit Formel (22) eher optimistische als pessimistische Genauigkeitsangaben erhält (siehe 4.2.1.1.). Die Addition der Abschätzung für die Meßfehlerauswirkung $\hat{R}\sigma_M^2 = 0.148$ (siehe (14) und Tabelle 3.1) liefert schließlich die geschätzte Varianz des DHM-Fehlers $\hat{\sigma}^2 = 0.279$. Der geschätzte mittlere Höhenfehler $\hat{\sigma} = 0.53$ m stimmt gut mit dem tatsächlichen mittleren Fehler des DHM überein ($\sigma = 0.47$ m, siehe Abb. 3.25, 3.29 und 3.36).

Für ein Flächenmodell scheint es naheliegend, die Formeln des dreidimensionalen Falls anzuwenden. Bei einer photogrammetrischen Datenerfassung läßt sich als Recheneinheit das Stereomodell benutzen. Bei einem Photomaßstab von 1:50.000 und 60% Längsüberdeckung etwa wird ein Gebiet von ca. $7 \times 11,5$ km² gedeckt, das sind ungefähr die Ausmaße der untersuchten Testgebiete.

Schwierigkeiten bei der Anwendung der FFT (2.2.3.) können sich aus der Datenmenge ergeben, abhängig von dem zur Verfügung stehenden Programm und der Speicherkapazität des Rechners. So war es z.B. nicht möglich, das Spektrum der Testgelände aus einem 10 m Raster zu rechnen (siehe (26)). Anstatt zu kleine Recheneinheiten zu verwenden, kann es ratsam sein, die Genauigkeit auf Grund von Profilen maximaler Länge zu bestimmen.

Die Berechnung der bivariaten ÜF (2.2.2.) benötigt beachtliche CPU-Zeiten. Zwar muß die ÜF für eine bestimmte RV (mit bestimmten Parameterwerten) nur einmal gerechnet werden und kann dann für jede neue Anwendung aus einer Bibliothek abgerufen werden; dennoch ist es um ein Vielfaches weniger aufwendig, die trennbare ÜF zu bestimmen. Dazu muß lediglich die strenge ÜF $H(u,v)$ für $v=0$ gerechnet werden. Um abschätzen zu können, inwieweit die strenge ÜF von der trennbaren $\bar{H}(u,v)$ abweicht und sich dieser Unterschied auf die AR-Fehlerschätzung auswirkt, ist es zweckdienlich, $H(u,v)$ noch zusätzlich für $u=v$ zu bestimmen (siehe 2.2.2. und 3.1.2.2.). Für die untersuchten RV ist - solange die Amplituden (Höhenunterschiede) nicht größer sind als die der Testflächen - die Diskrepanz zwischen $H(u,v)$ und $\bar{H}(u,v)$ unbedeutend. Zu einer Abschätzung des Einflusses von $(H(u,v) - \bar{H}(u,v))$ auf $\hat{\sigma}_S^2$ bei gegebenem Spektrum lassen sich die entsprechenden Techniken der numerischen Mathematik einsetzen.

Liegt die ÜF vor - etwa als Matrix von 100×100 Werten (d.h. in einem Raster mit der Maschenweite $\Delta u = \Delta v = 0.005$) - so kann man die Matrix der Varianzfunktion für die Rasterweite des vorgegebenen DHM durch bilineare Interpolation berechnen; es werden die Funktionswerte für $u_{kx} = kx \Delta x/LX$ und $v_{ky} = ky \Delta y/LY$ benötigt. Der rohe Schätzwert des AR-Fehlerquadrats errechnet sich sodann als Spur des Matrixprodukts aus Spektrum und Varianzfunktion (Formel 25)).

Die zur Korrektur des rohen Schätzwerts notwendigen Größen T und \hat{R} müssen durch numerische Integration aus der ÜF bestimmt werden (siehe (57), (44) und Tabelle 3.4). Auf die Berücksichtigung eines nicht rein zufälligen, also eines korrelierten oder systematischen Meßfehlers wurde in dieser Arbeit nicht eingegangen. Grundsätzlich ließe sich ein systematischer Fehler auf die gleiche Weise wie ein zufälliger behandeln - es muß nur das Spektrum des Fehlers bekannt sein. Es wäre einerseits zu untersuchen, inwieweit sich unter Zuhilfenahme der Theorie der Zufallsfunktionen ausreichende Modellannahmen bezüglich des systematischen Fehlers machen lassen, und andererseits, ob es überhaupt die Mühe lohnt, falls geeignete Techniken zur Reduktion von systematischen Fehlern bei der Datenerfassung angewandt werden.

Für die drei Testflächen ergaben sich durch die Profilhorizontierung vor der Spektrumberechnung mit einer einzigen Ausnahme durchwegs zu pessimistische AR-Fehlerschätzungen. Zumindest für die Testflächen wäre eine Korrektur wegen Optimismus fehl am Platz; ob und in welchem Maß sich das auf wirklich vorkommende Geländetypen verallgemeinern läßt, ist eine noch offene Frage.

Durch Austausch der Übertragungsfunktion läßt sich mit sehr geringem Aufwand prüfen, inwiefern eine andere RV bei vorgegebenen DHM-Daten (Gelände, Rasterweite, Meßfehlergröße) zu einer anderen Darstellungsgenauigkeit der Geländeoberfläche führen würde.

Anstatt die Schätzformeln des dreidimensionalen Falls anzuwenden, ist es sicherlich weniger aufwendig, die Genauigkeit des DHM an Hand einiger Profile zu schätzen. Da die abgeleiteten Formeln für primäre Referenzdaten gelten (d.h. für ein abgestastetes Signal, das mit einem unkorrelierten Meßfehler behaftet ist, aber nicht für ein durch Rekonstruktion und erneutes Abtasten gewonnenes Signal, also interpolierte Höhenkoten), kommen für ein Flächenmodell nur Profile in der x-, in der y- oder in der Diagonalrichtung in Frage. Die Genauigkeit eines Profils kann entsprechend dem Diagramm der Abb. 5.1 geschätzt werden. Dabei ist die Matrix der Höhenwerte eindimensional, also ein Vektor, und die Rasterweite ist je nach Profilrichtung entweder das Abtastintervall in der x-Richtung (Δx), oder Δy , oder $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Die ÜF ist dann für das zweidimensionale Analogon der dreidimensionalen RV zu berechnen (z.B. für LI, wenn BLI zur Rekonstruktion der Fläche aus dem diskreten Signal benutzt werden soll). Das innere Produkt aus Spektrumvektor (berechnet als FFT des horizontierten Profils) und Varianzfunktionsvektor liefert nach Abzug von $T\sigma_M^2$ den Schätzwert für das AR-Fehlerquadrat des Profils. T ist nach (27) durch numerische Integration aus der univariaten ÜF zu rechnen.

In den Profiluntersuchungen wurde eine deutliche Tendenz der geschätzten AR-Fehler zum Optimismus festgestellt (Abb. 3.29 - 3.32, Abb. 3.47 - 3.50). Da man in der Regel lieber eine pessimistische Genauigkeitsangabe im Kauf nimmt, ist es ratsam, $\hat{\sigma}_S$ um $(1/T)\%$ bis $(5/T)\%$ zu vergrößern, je nach "Sicherheitsbedürfnis ($T\varepsilon = -1\%$ entspricht der mittleren relativen Abweichung der in der Untersuchung geschätzten AR-Fehler, $T\varepsilon = -5\%$ in etwa der maximalen relativen Abweichung, solange Δ nicht zu groß ist). Z.B. Profil T6 bei $\Delta x = \Delta y = 10$ m und LI (Beispiel auf Seite 85):

$\hat{\sigma}_S = 0.36$ m; Korrektur mit $(1/T)\%$: $\Delta\hat{\sigma}_S = \hat{\sigma}_S/100T = 0.03$. In diesem Fall weicht der korrigierte Schätzwert (0.39 m) noch mehr vom tatsächlichen AR-Fehler ($\sigma_S = 0.24$ m) ab. Für die Abtastung von T6 mit $\Delta x = \Delta = 40$ m hingegen ergibt sich bei LI $\hat{\sigma}_S = 1.4$ m und mit der $(5/T)\%$ Korrektur (vergl. Abb. 3.49) als korrigierter Schätzwert 2 m ($\sigma_S = 2$ m)!

In der empirischen Untersuchung wurde für die Testflächen nur jeweils ein Profil zum Vergleich herangezogen; dennoch bot der AR-Fehler eines einzigen Profils eine gut Indikation für den AR-Fehler der Testfläche (siehe Abb. 3.61 - 3.62). Als Beispiel hierfür diene der Fall, daß das DHM der Flächen T1, T5 und T6 bei Rekonstruktion durch BLI einen AR-Fehler von $\sigma_S = 2.5$ m hat. Dazu muß T1 mit $\Delta xy = 200$ m abgetastet werden, T5 mit $\Delta xy = 80$ m und T6 mit $\Delta xy = 40$ m (Abb. 3.51, 3.54). Die AR-Fehler der Profile T1, T5, T6 bei $\Delta x = 200, 80, 40$ m und LI weichen um weniger als 1/4 ihres Wertes von $\sigma_S = 2.5$ m ab. Geht es um die Beurteilung der Genauigkeit der Flächendarstellung, ist es jedoch naheliegend, nicht nur ein Profil zur Schätzung heranzuziehen und die Anzahl zu prüfender Profile von der Homogenität des Geländes abhängig zu machen. Dabei kann man erwarten, daß sich für die einzelnen Profile unterschiedliche AR-Fehler ergeben; auf Grund von 4.1.1. ist anzunehmen, daß der mittlere Fehler für die Fläche eher den größeren als den kleineren Profilfehlern entspricht. Dazu, wie auch zur Optimismuskorrektur des geschätzten AR-Fehlers für ein Profil, sind jedoch noch weitere Untersuchungen wünschenswert.

Der Beitrag schließlich, den ein rein zufälliger Meßfehler zur Varianz des Fehlers der Flächendarstellung liefert, läßt sich als $\bar{R}\sigma_M^2$ angeben. \bar{R} kann aus der trennbaren ÜF bzw. als \hat{R}^2 berechnet werden, wobei \hat{R} aus der ÜF des zweidimensionalen Analogons der dreidimensionalen RV bestimmt wird (vergl. Tabelle 3.1, 3.4). Damit erhält man eine optimistische Abschätzung - für ein DHM mit einer großen Zahl gemessener Höhenkoten (siehe 4.2.2.). Z.B. für BLI: $0.35 \sigma_M^2$ statt $(2/3)^2 \sigma_M^2$.

Die Einfachheit der beschriebenen Vorgehensweise birgt die Gefahr in sich, daß zu grobe Schätzwerte resultieren. Erstens kann es zu beträchtlichen Fehlschätzungen des AR-Fehlers kommen, wenn zur Spektrumbestimmung eine zu geringe Abtastdichte vorliegt. Dazu folgendes Beispiel: Um eine DHM-Genauigkeit von $\sigma = 3$ m zu erreichen, ist es ausreichend, die Fläche T6 mit $\Delta xy = 40$ m und einem zufälligen Meßfehler von $\sigma_M = 2.5$ m abzutasten und mit BLI zu rekonstruieren ($\sigma_S = 2.5$ m, $\sigma_R = 1.67$).

Bei gleicher Meßgenauigkeit und RV aber einem zulässigen Gesamtfehler von $\sigma = 8$ m, wäre eine Rasterweite von 100 m hinlänglich ($\sigma_S = 7.2$). Für das Profil T6 zeigt sich bei $\Delta x = \Delta = 40$ m, daß der geschätzte AR-Fehler gerade noch um etwas weniger als die Hälfte seines Betrags falsch ist; bei $\Delta x = \Delta = 100$ m ist ϵ bereits größer als 50% (Abb. 3.49 - 3.50). Wird aber das Spektrum aus $\Delta = 10$ m bestimmt, dann ist der geschätzte AR-Fehler bloß um 4% ($\Delta x = 40$ m) bzw. 8% ($\Delta x = 100$ m) falsch (Abb. 3.29). Zwar lassen sich die Fehlschätzungen für diese Beispiel noch redlich durch die oben vorgeschlagene Korrektur $\Delta \hat{\sigma}_S$ auffangen, eine sichere, wenn auch aufwendigere Vorgehensweise wäre jedoch, die Profile, die zur Genauigkeitsschätzung herangezogen werden sollen, mit einem Intervall zu messen, das kleiner ist als das DHM-Intervall Δxy . Dies vor allem im Fall von verhältnismäßig groben DHM-Rastern, durch die augenscheinlich eine Vielzahl kleinräumiger Geländevariationen nicht erfaßt werden (z.B. $\Delta xy \geq 100$ m für T6).

Zweitens ist die Korrektur wegen des Einflusses eines zufälligen Meßfehlers als $T\sigma_M^2 = \hat{\sigma}_D^2$ nur dann zuverlässig, wenn eine ausreichend große Datenmenge zur Spektrumbestimmung vorliegt (siehe 4.2.1.3.). So ist beispielsweise bei $\Delta x = \Delta = 10$ m die mittlere Abweichung des tatsächlichen Meßfehlereinflusses von $\hat{\sigma}_D^2$ nur 3% von $\hat{\sigma}_D^2$ für T1 bei LI und ca. 10% für T6 (Abb. 3.41 - 3.46). Bei $\Delta x = \Delta = 40$ m ist θ_ζ ca. 20% von $\hat{\sigma}_D^2$ für T1 aber für T6 bereits gleich groß wie $\hat{\sigma}_D^2$. Bestimmt man das Spektrum von T6 aus einer Abtastung mit $\Delta = 100$ m, so kann die Abweichung des Meßfehlereinflusses von $\hat{\sigma}_D^2$ bis zu $10\hat{\sigma}_D^2$ betragen. Bei geringen Abtastdichten ist also mit erheblichen Unsicherheiten der Schätzwerte zu rechnen. Es wäre nützlich, diese Unsicherheit etwa in der Art von Konfidenzintervallen anzugeben - abhängig von Geländevariation, Abtastintervall und RV; dazu bedarf es jedoch weiterer Untersuchungen.

Geht man von den durchgeführten Experimenten aus, ist drittens eine zuverlässige Schätzung des Beitrags eines rein zufälligen Meßfehlers zum Gesamtfehler zur möglich, wenn der Meßfehler etwa gleich groß oder größer als der AR-Fehler ist (demnach müßten sich Daten, wie man sie z.B. vom Gestaltsystem erhält, besonders zur vorgeschlagenen Genauigkeitsschätzung eignen). Z.B. ist für T6 und LI die mittlere Abweichung der tatsächlichen Meßfehlerauswirkung vom Erwartungswert σ_R^2 kleiner als 15% des Erwartungswert für $\Delta x = 100$ m und $\sigma_M = 8$ m (Abb. 3.33, 3.37). Für dasselbe Abtastintervall aber $\sigma_M = 0.5$ m ist die mittlere Abweichung das 1.2 Fache von σ_R^2 (Abb. 3.36, 3.40). Für $\Delta x = 10$ m hingegen, wobei $\sigma_S < \sigma_M = 0.5$ m, ist die mittlere Abweichung lediglich 6% von $(2/3)\sigma_M^2$. Obwohl die Meßfehlerauswirkung unbedeutend wird, wenn der mittlere Meßfehler wesentlich kleiner als der AR-Fehler ist, so wären

dennoch auch hier Angaben über die Zuverlässigkeit der Abschätzung wünschenswert, sowohl für den Fall daß $\sigma_S > \sigma_M$ als auch für den Fall einer kleinen Anzahl gemessener Werte.

5.1.2. Schätzung der Genauigkeit vom DHM abgeleiteter Größen

Digitale Höhenmodelle lassen sich für eine breite Palette von Aufgaben im Ingenieurwesen anwenden. Hier seien nur zwei Beispiele herausgegriffen: Die Berechnung von Volumina und die Erstellung von Orthophotos. Grundsätzlich läßt sich sagen, daß je nach der Art der abgeleiteten Größe die beste Bestimmungsweise für ihre Genauigkeit gewählt werden sollte - wenn möglich, die einfachste Form der Fehlerfortpflanzung.

5.1.2.1. Genauigkeit von Volumina

Das unter einer Oberfläche liegende Volumen auf einem rechteckigen Gebiet $RX.RY$ ist durch das Integral der Oberfläche über $RX.RY$ definiert. Der mittlere Fehler des aus dem DHM gerechneten Volumens ist somit:

$$\int \int_{RX RY} f(x,y) dx dy - \int \int_{RX RY} \hat{f}(x,y) dx dy$$

Integration läßt sich als Faltung formulieren und als solche in die Genauigkeits-schätzung im FB einbauen. Für den mittleren Fehler des Volumens über einer Rastermasche ($RX = \Delta x$, $RY = \Delta y$) bietet sich dabei eine recht einfache Abschätzung an. Berechnet man das Volumen als Grundfläche mal Mittelwert der Rasterhöhen einer Masche

$$V_{lk} = \Delta x \Delta y \frac{g_{l,k} + g_{l+1,k} + g_{l,k+1} + g_{l+1,k+1}}{4}, \quad (76)$$

so ist dies gleichbedeutend mit der Rekonstruktion der Oberfläche aus den Referenzdaten g_{lk} durch bilineare Interpolation und der Integration der so erhaltenen Fläche $\hat{f}(x,y)$ über $\Delta x \Delta y$. Wenn der Meßfehler unbedeutend klein ist (d.h. $g_{lk} = f_{lk}$), dann gibt der AR-Fehler für BLI multipliziert mit $\Delta x \Delta y$ eine obere Grenze für den mittleren Fehler des nach obiger Regel berechneten Volumens an:

$$\sigma_V \leq \Delta x \Delta y \sigma_S \quad (77)$$

Die Ableitung dieser Beziehung im OB ist im Anhang 7 gegeben. Die Schätzformel für den mittleren Volumenfehler über ein beliebiges Gebiet ($RX = jx\Delta x$, $RY = jy\Delta y$; jx , jy sind beliebige ganze Zahlen) ist sehr komplex. Die durchgeführten Untersuchungen geben jedoch zur Vermutung Anlaß, daß mit $\sqrt{jx}\sqrt{jy} \Delta x \Delta y \sigma_S$ eine praktikable Abschätzung für die obere Grenze von σ_V gegeben ist.

Der Volumenberechnung entspricht die Berechnung des Flächeninhalts zwischen Profil und Datum im zweidimensionalen Fall. Der mittlere Fehler des Flächeninhalts I über dem Abtastintervall Δx , gerechnet nach der zu (26) analogen Formel

$$I_l = \Delta x \frac{f_l + f_{l+1}}{2} \quad , \quad (78)$$

läßt sich im FB nach (79) schätzen, unter den gleichen Bedingungen wie sie für (22) gelten.

$$\hat{\sigma}_I^2 = \Delta x^2 \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (1-J(u_k))^2 |F(k)|^2 \quad (79)$$

Die Übertragungsfunktion für die Flächeninhaltsberechnung sie hier ohne Herleitung angeführt:

$$J(u) = 1 - \frac{\sin \pi u}{\pi u} \left[1 - \frac{\pi u}{\tan \pi u} \right] \quad ; \quad |u| < 1/2 \quad (80)$$

$J(u)$ ist in Abb. 5.2 dargestellt, zusammen mit der ÜF für LI. Da $J(u) \underline{>} H(u)$ gilt:

$$\sigma_I \leq \Delta x \sigma_S \quad (81)$$

Dabei ist σ_S der AR-Fehler für die lineare Interpolation (siehe Anhang 7 für die Ableitung im OB). Für eine beliebige Basis zur Flächeninhaltsberechnung ($R = j\Delta x$; j ist eine beliebige ganze Zahl), scheint auf Grund vorläufiger Untersuchungen $\sqrt{j}\Delta x \sigma_S$ eine brauchbare Abschätzung der oberen Grenze für σ_I zu sein.

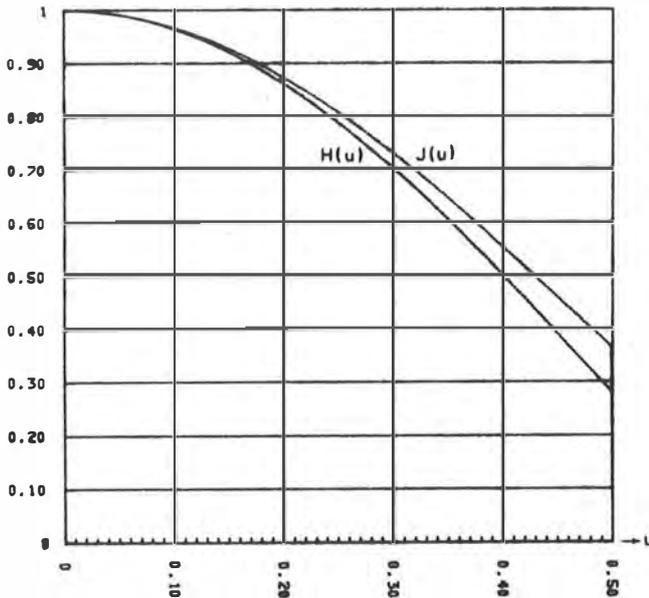


Abb. 5.2: ÜF für LI und für die Flächeninhaltsberechnung nach (78).

Wird der Flächeninhalt mit Formel (78) nicht aus den primären DHM-Daten gerechnet, sondern aus interpolierten Höhen (Verdichtung des abgetasteten Profils), so entspricht dies einer zweistufigen Rekonstruktion (wie in 2.1.7. ausgeführt) mit LI als zweiter Interpolation. In der Abschätzung (81) ist dann für σ_S der AR-Fehler, wie er sich für die zweistufige Rekonstruktion ergibt, einzusetzen.

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß sich die Genauigkeitsschätzung von Neigungsangaben auf analoge Weise behandeln ließe.

5.1.2.2. Genauigkeit von Orthophotos

Ein wesentlicher Faktor, der die Genauigkeit eines Orthophotos beeinflusst, ist der Höhenfehler der abgetasteten Profile, bzw. die Genauigkeit des DHM, das zur Orthophotoerzeugung benutzt wird (3, 12, 20). Ist der mittlere Höhenfehler des DHM bekannt, so läßt sich auf recht einfache Weise der entsprechende mittlere Lagefehler im Orthophoto abschätzen. Die empirischen Untersuchungen (20) haben gezeigt, daß mit der Fehlerfortpflanzung des Höhenfehlers sehr gute Näherungswerte angegeben werden können. Nicht nur die Lagegenauigkeit, sondern auch die Höhen-genauigkeit von Stereoorthophotos läßt sich durch Fehlerfortpflanzung bestimmen, vorausgesetzt, die Höhengenaugkeit des DHM ist gegeben (siehe (3)).

5.2. Planung eines DHM

Für welche Zwecke auch immer ein DHM zu erstellen ist, es werden in irgendeiner Form Spezifikationen bezüglich der gewünschten Genauigkeit vorliegen. Die zu beantwortende Frage ist, mit welchem Punktabstand und welcher Meßgenauigkeit muß das Gelände erfaßt werden, damit eine für das DHM vorgeschriebene Genauigkeit erreicht wird.

Ist die Genauigkeit des DHM nur indirekt spezifiziert, indem z.B. der einzuhalten- de mittlere Lagefehler des Orthophotos oder eine Toleranz für den Volumenfehler angegeben ist, so muß eine derartige Angabe zuerst in ein direktes Genauigkeits- maß für das DHM umgerechnet werden (Inversion der Beziehungen in 5.1.2.). Besonders leicht zu beantworten wäre die Frage nach dem Punktabstand, wenn als Genauigkeits- maß die Güte spezifiziert würde, mit der die kleinste noch wichtige Geländeform durch das DHM dargestellt werden soll (15). Z.B. eine Geländeform mit einer Perio- denlänge von $\lambda=1/\nu= 20$ m soll mit einer Güte von mindestens 80% dargestellt werden. Mit Hilfe der ÜF läßt sich dann das dafür notwendige Abtastintervall angeben: Für LI $\Delta x < 5$ m, für KQ $\Delta x < 8$ m (siehe Abb. 3.12).

Als kleinste noch wichtige Geländeform sollen nicht Bruchkanten spezifiziert werden, denen definitionsgemäß sehr hohe Frequenzen zukommen und die in der Regel am effi- zientesten separat gemessen werden können, sondern Details der Oberfläche, die durch ein Raster erfaßt werden sollen. Wie in (15) ausgeführt wurde, ließe sich auch die notwendige Meßgenauigkeit bestimmen, wenn nur die Güte der Darstellung für die kleinste Geländeamplitude vorgeschrieben wäre. Der Vorteil einer derartigen Ge- nauigkeitsspezifikation für das DHM liegt darin, daß zur Planung der Geländeauf- nahme keine Information über das Gelände nötig ist, sondern die Kenntnis der ÜF ausreicht. Zumindest für einige Anwendungsgebiete bedeutet dies jedoch eine Ver- lagerung des Problems der adequate Festlegung von Punktabstand und Meßgenauig- keit auf die Spezifikationsformulierung. Ist nämlich der mittlere Höhenfehler von Interesse - ein einfaches und in Spezifikationen häufig verwendetes Genauigkeits- maß - so läßt sich das kleinste Geländedetail und die Güte, mit der es dargestellt werden muß, nur aus der Kenntnis der Geländegeometrie angeben.

Wenn die Geländegeometrie in Form des Spektrums des aufzunehmenden Geländes be- kannt ist, kann Abtastintervall und Meßgenauigkeit so festgelegt werden, daß ein vorgeschriebener mittlerer Fehler des DHM eingehalten wird. Die Bestimmung von $(\Delta x, \Delta y)$ und σ_M ist in Abb. 5.3 schematisch dargestellt.

sich nur mehr in einem engen Bereich variieren (Wahl des Auswertegeräts und Operateurs, stationäre oder dynamische Abtastung). Die ÜF ist in Abb. 5.3 als Eingabe angedeutet; es lassen sich verschiedene RV, die bezüglich Verwendungszweck des DHM, Rechenaufwand, etc. in Frage kommen, bereits im Planungsstadium auf Genauigkeit hin überprüfen - dies gilt für einstufige Rekonstruktionen genauso wie für zwei-stufige (siehe 2.1.7.).

Diverse Korrekturen (vergl. 5.1.1.) sind in Abb. 5.3 strichliert umrandet, da sie nur dann aktuell sind, wenn das Spektrum aus einer tatsächlichen Geländeabtastung gewonnen wurde. Schließt man automatische Datenerfassungssysteme aus, ist es freilich nicht sinnvoll, das gesamte Gelände mit großer Dichte abzutasten, um dann über Spektrum und ÜF herauszufinden, daß eine geringere Abtastdichte ausgereicht hätte. Demnach bleibt nur die Möglichkeit ein (oder mehrere) Profil(e) zur Spektrumbestimmung zu messen - was bei photogrammetrischer Datenerfassung schon vorhandene Photographie voraussetzt - oder das Spektrum, sei es profil- oder flächenbezogen, aus einer Geländeklassifikation zu bestimmen. Nur solche Klassifizierungen scheinen dafür in Frage zu kommen, die nicht auf umfangreichen Messungen basieren.

5.2.1. Spektrum aus einem gemessenen Profil

Auf Grund der durchgeführten Untersuchungen läßt sich annehmen, daß sich an Hand eines gemessenen Profils, das zur Spektrumbestimmung dient, gute Genauigkeitsvorhersagen für das Flächen-DHM machen lassen. Aus Genauigkeits- und Kostengründen kommt für eine Profilmessung zu Planungszwecken im allgemeinen nur das photogrammetrische Stereomodell in Frage (direkte Höhenmessung im Feld ist meistens zu kostspielig, Digitalisierung einer Höhenlinienkarte zu ungenau, es sei denn, es liegt eine im Vergleich zum geplanten DHM großmaßstäbige Kartierung vor).

Da das Auflösungsvermögen des Spektrums durch die Profillänge festgelegt ist ($\Delta v = 1/L$), soll sich das zu messende Profil möglichst über das ganze Stereomodell erstrecken, wobei Lage und Richtung so ausgesucht werden sollen, daß durch das Profil die stärkste im Modell vorkommende Geländevariation erfaßt wird. Dies, da der Flächenfehler eher größer als der Profilfehler ist (siehe 4.1.1.). Das Abtastintervall Δ ist so zu wählen, daß damit die wichtigen kleinräumigen Geländeformen erfaßt werden. Kleinformen mit einer Halbperiode kürzer als Δ bewirken eine Spektrumverformung (Verflechtung). Die Periodenlänge des kleinsten noch wichtigen Details kann aus seinem maximalen Anstieg und minimalen Krümmungsradius abgeleitet werden:

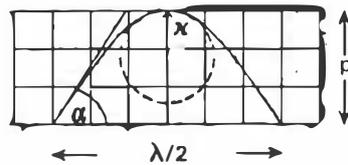


Abb. 5.4: Maximaler Anstieg und minimaler Krümmungsradius bzw. Amplitude und Halbperiode einer Kleinform.

Eine kleine Kuppe etwa kann durch eine halbe Sinuswelle angenähert werden. Für eine Sinuswelle mit der Amplitude p und der Periode λ - $s(x) = p \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x)$ - gilt:

Maximaler Anstieg: $\tan\alpha = \left(\frac{ds}{dx}\right)_{max} = s'_{max} = p\frac{2\pi}{\lambda}$

Krümmung: $\frac{s''}{(1+s'^2)^{3/2}} = \frac{-p(\frac{2\pi}{\lambda})^2 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x)}{\left(1 + p^2(\frac{2\pi}{\lambda})^2 \cos^2(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right)^{3/2}}$

Die Krümmung ist maximal für $x=\lambda/4$, damit ergibt sich für den minimalen Krümmungsradius als Reziprokwert des Absolutbetrags der maximalen Krümmung:

$$\kappa = \frac{1}{p} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 = \frac{p}{\tan^2\alpha}$$

Daraus folgt:

$p = \kappa \tan^2\alpha$	$\lambda = 2\pi\kappa \tan\alpha$
---------------------------	-----------------------------------

Jede Kleinform, deren Halbperiode kleiner als Δ ist, bedingt einen Beitrag zum AR-Fehlerquadrat von näherungsweise $p^2/2$. Im Schätzwert $\hat{\sigma}_G^2$ scheint die Summe dieser Beiträge nicht auf und darüber hinaus verursacht noch die auftretende Verflechtung eine Fehlschätzung (vergl. Abb. 2.4, 2.5).

Liegen die gemessenen Profilhöhen vor, kann nach der Profilhorizontierung das Spektrum als FFT gerechnet werden und sodann gemäß Abb. 5.3 der AR-Fehler für verschiedene Intervalle Δx_i geschätzt werden. Für Abtastintervalle $\Delta x < \Delta$ werden sich nur sinnvolle Schätzwerte ergeben, wenn das Geländeprofil keine Komponenten mit Frequenzen höher als $1/2\Delta$ enthält. Die Korrektur der Schätzwerte wegen eines zufälligen Meßfehlers, der den Höhen zur Spektrumbestimmung anhaftet, kann mit Formel (26) berechnet werden. Die übrigen Korrekturen lassen sich wie in 5.1.1. beschrieben anbringen. Beim Schluß vom AR-Fehler des Profils auf den der Fläche läßt sich noch ein gewisser "Sicherheitszuschlag" anbringen (vergl. 5.1.1.).

Im allgemeinen wird man nur an einem Quadratraster interessiert sein, es sei denn, das Gelände weist in der x-Richtung eine ausgeprägt andere Variation als in der y-Richtung auf. Für diesen Fall sollte je ein Profil in x und in y gemessen werden. Die erforderliche Meßgenauigkeit σ_M muß aus $\hat{R}^2 \sigma_M^2$ abgeschätzt werden, wenn \hat{R} nach (14) aus der univariation ÜF gerechnet wird.

Zur näheren Erläuterung kann das auch in 5.1.1. angeführte Beispiel (Seite 89) dienen: Für "Gelände" T6 sei ein DHM zu erstellen, das bei bilinearer Interpolation einen mittleren Fehler von $\sigma = 3$ m haben soll. Bei vorliegender Weitwinkelphotographie vom Maßstab 1:50.000 wäre $\sigma_M = 2.5$ m (= 0.33% der Flughöhe) eine realisierbare Höhenmeßgenauigkeit. Damit läßt sich eine Meßfehlerauswirkung von $(2/3)^2 \sigma_M^2 = 2.8$ erwarten (vergl. Seite 32 und Tabelle 3.5). Die Abschätzung mit Hilfe der ÜF der LI ergibt: $\hat{R}^2 \sigma_M^2 = 2.2$. Somit muß Δxy so gewählt werden, daß $\sigma_S < 2.5$ m (= $\sqrt{9-2.8}$) ist.

Den folgenden Berechnungen wird nun eine Abtastung des Profils T6 mit $\Delta = 10$ m und $\sigma_M^* = 0.5$ m zu Grunde gelegt: Aus einem Experiment zur Bestimmung von ζ (siehe Abb. 3.25, 3.44) wurden für $\{\Delta x = 10, 30, 40, 50\}$ m die rohen AF-Fehlerquadrate $\{0.161, 2.514, 4.348, 6.660\}$ erhalten. Durch die Korrektur mit $\hat{\sigma}_D^2$ (siehe Abb. 3.41) ergibt sich $\{\hat{\sigma}_S^2 = 0.131, 2.34, 4.15, 6.45\}$. Mit einer $(1/T)\%$ Optimismuskorrektur (siehe 5.1.1.) folgt sodann: $\hat{\sigma}_S(\Delta x=40) = 2.2$ m, $\hat{\sigma}_S(\Delta x=50) = 2.8$ m. Demnach müßte $\Delta xy = 40$ m ausreichend sein; der tatsächliche AR-Fehler für BLI und $\Delta xy = 40$ m wurde als 2.5 m errechnet.

Würde man das Profil T6 mit einer Genauigkeit von $\sigma_M^* = 8$ m messen, so könnten sich für $\{\Delta x = 30, 40, 50\}$ m z.B. die rohen AR-Fehlerquadrate $\{48.33, 54.55, 59.50\}$ ergeben. Daraus nach der Korrektur mit $\hat{\sigma}_D^2$: $\{\hat{\sigma}_S^2 = 3.09, 4.62, 6.76\}$. Mit der $(1/T)\%$ Optimismuskorrektur erhält man dann: $\hat{\sigma}_S(\Delta x=40) = 2.3$ m, $\hat{\sigma}_S(\Delta x=50) = 2.8$ m. In diesem Fall würde man somit selbst bei relativ ungenauer Profilmessung noch eine richtige Einschätzung der geeigneten Rasterweite erhalten. Je größer aber Δx , umso mehr kann der tatsächliche Meßfehlereinfluß von $\hat{\sigma}_D^2$ abweichen - wie die empirischen Untersuchungen gezeigt haben - und absolut gesehen wird die Abweichung umso spürbarer, je größer σ_M^* . Ganz wesentlich für eine gute Schätzung des AR-Fehlers ist aber vorallem ein hinreichend kleines Abtastintervall Δ -

5.2.2. Geländeklassifizierung

Eine wenig aufwendige Möglichkeit der Geländeklassifizierung bietet sich an, wenn man auf "DHM-Erfahrung" zurückgreifen kann. Man könnte nämlich aus jedem einmal erstellten DHM das Spektrum des betreffenden Geländes berechnen und dieses entweder direkt oder in parametrisierter Form abspeichern. Anstatt das Spektrum der erfaßten Oberfläche zu bestimmen, wird es in der Regel ausreichend sein, das Spektrum eines charakteristischen Profils, nötigenfalls mehrerer Profile, zu berechnen. Liegt für ein neu zu erstellendes DHM Geländeinformation vor - in der Form einer topographischen Karte oder eines Stereomodells - läßt sich das "neue" Gelände einem "alten" auf Grund eines visuellen Vergleichs zuordnen. Das Spektrum des ähnlichen Geländes wird sodann zur Genauigkeitsschätzung nach Abb. 5.3. herangezogen.

Bei einer derartigen visuellen Klassifizierung muß auf zweierlei geachtet werden. Einerseits sind die vorhandenen Höhenunterschiede ausschlaggebend, da sie die Amplitudengröße beeinflussen, andererseits die Geländebewegtheit, da die Ausdehnung von Kleinformen die Frequenzbreite festlegt (siehe Beispiel 2.1.5. sowie Abb. 3.1 - 3.4 und Abb. 3.6 - 3.11). Eine recht einfache Parametrisierung eines Profilspektrums wäre durch seine Approximation mit einer Gaußschen Funktion, $c_0 \exp(-c_1 v^2)$, gegeben. Damit wäre c_0 ein Maß für die Amplitudengröße und c_1 ein Maß für die Frequenzbreite. Je größer c_0 und je kleiner c_1 , desto größer der zu erwartende AR-Fehler bei festem Abtastintervall.

Eine rein visuelle Zuordnung eines Geländes zu einem anderen oder zu einer Geländeklasse hat zwar den Vorteil, daß keinerlei Messungen erforderlich sind, aber sicherlich den Nachteil, daß damit nur grobe Abschätzungen zu Planungszwecken ermöglicht werden. Eine Verfeinerung der Klassifikation in verschiedenen Stufen ist möglich, indem das Gelände mehr und mehr quantifiziert wird. Dabei läßt sich an Krümmungs- und Neigungsbestimmung relevanter Kleinformen sowie dominierender Geländeformen denken (siehe 5.2.1.), oder etwa an die Bestimmung der Anzahl Wendepunkte in einem Profil (1) und des mittleren Höhenbereichs zwischen zwei Wendepunkten, und letztendlich an die Profilabtastung.

Die Beurteilung der Geländegeometrie wird sehr effizient bei der Datenerfassung nach der Methode von "Progressive Sampling" (18) durchgeführt. In Folge der schrittweisen Geländeaufnahme in einem stets kleineren Raster ist eine gestufte Geländeanalyse möglich, die eine Geländeklassifizierung vor der Messung über-

flüssig macht. Es muß lediglich die kleinste erreichbare Rasterweite definiert werden, womit sich die Abtastparameter (Größe der Teilgebiete und Anzahl der Meßdurchgänge) bestimmen lassen. Die Auswahl der zu messenden Höhen (Festlegung der lokalen Rasterweite) geschieht auf Grund der Analyse der Daten aus dem vorangegangenen Meßdurchgang nach dem Kriterium, daß das Gelände zwischen zwei gemessenen Höhen nicht mehr von der linearen Verbindung abweichen soll, als ein vorgegebener Schwellenwert.

6. SCHLUSS UND AUSBLICK

Die Zielsetzung der Untersuchung war, ein Verfahren zur Genauigkeitsschätzung eines DHM auszuarbeiten. Die theoretischen Überlegungen wurden durch kontrollierte Experimente an synthetischen Geländeoberflächen ergänzt, um sowohl die Zusammenhänge und Einflüsse im Genauigkeitsverhalten zu verdeutlichen, als auch um die Anwendbarkeit sowie die Grenzen der Möglichkeiten des Verfahrens an Beispielen aufzuzeigen.

In Übereinstimmung mit anderen theoretischen und experimentellen Untersuchungen zur Genauigkeit der Geländedarstellung durch ein DHM wurde deutlich, daß die Abtastdichte von ausschlaggebender Bedeutung für die Genauigkeit ist und im Vergleich dazu der Interpolationsmethode eine untergeordnete Rolle zukommt. Der Beitrag, den ein zufälliger Fehler bei der Messung der Geländehöhen zum mittleren Fehler des DHM liefert, konnte in Abhängigkeit der Interpolations- bzw. Filtermethode formuliert werden. Keine der üblichen Methoden vermag eine vollständige Unterdrückung eines rein zufälligen Meßfehlers. Weiters weisen die angestellten Untersuchungen darauf hin, daß die Ergebnisse einer Profilanalyse den Schluß auf die Genauigkeit der Flächendarstellung zulassen. Dies eröffnet eine günstige Perspektive für die praktische Durchführung von Genauigkeitsschätzungen, da der zweidimensionale Fall in jeder Hinsicht leichter hantierbar ist.

Das vorgeschlagene Verfahren zur Genauigkeitsschätzung basiert auf der Konzeption der spektralen Zerlegung einer stetigen Funktion einer oder zweier Variablen. Daraus ergeben sich für die Anwendung auf eine Geländeoberfläche begrenzter Ausdehnung Nachteile. Die Fourieranalyse eignet sich vorzüglich zur Beschreibung periodischer Funktionen (siehe Beispiele 2.1.5. und 2.2.4.), aber für einen Geländeausschnitt wird die Summe einer endlichen Zahl harmonischer Komponenten kaum jemals etwas anderes als eine Näherung sein. Aus der DFT einer beschränkten Anzahl von Geländehöhen kann dadurch nur ein Näherungswert für die Genauigkeit eines

DHM erwartet werden. Die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen lassen jedoch hoffen, daß sich mit der FFT der abgetasteten Höhen - nicht weiter aufbereitet als horizontalisiert - brauchbare Abschätzungen ergeben, ausreichende Abtastdichte vorausgesetzt.

Wenn die Genauigkeitsansprüche an das DHM gering sind, ist ein in bezug auf die Geländevariation grobes Raster hinreichend. In diesem Fall ist es jedoch ratsam, zusätzliche Höhenmessungen zur Spektrumbestimmung heranzuziehen. Ein Vorteil der Berechnung des AR-Fehlers aus FFT und ÜF liegt in der einfachen Durchführbarkeit. Die angegebenen Schätzformeln berücksichtigen der Einfachheit halber nicht den Verflechtungseffekt. Die Beispielrechnungen haben gezeigt, daß sich die dadurch bedingte Unsicherheit in vertretbaren Grenzen hält. Die Einbeziehung des Verflechtungseffekts hätte ansehnlich komplexere Formeln zur Folge. In gewissem Sinn stellt auch die Beschreibung eines zufälligen Meßfehlers durch ein Spektrum mit einem konstanten Wert eine Vereinfachung dar. Nur für ein DHM mit einer großen Anzahl gemessener Höhen gewährleistet dieser Erwartungswert eine gute Abschätzung des Meßfehlerauswirkung.

Das Hauptaugenmerk der Abhandlung galt der Schätzung des mittleren Fehlers eines DHM. Nun ist der mittlere Höhenfehler als Globalmaß für die Genauigkeit der Geländedarstellung durch das DHM sicherlich für einige Aufgabenstellungen von Interesse, für andere aber von zu geringer Aussagekraft. Gerade die spektrale Betrachtungsweise ermöglicht jedoch detailliertere Qualitätsangaben. Die ÜF ist ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Beurteilung von Interpolations- und Filtermethoden, zur Parameterwahl einer RV sowie zur Festlegung der Güte, mit der die einzelnen Geländekomponenten durch das DHM erfaßt werden. Mit Hilfe der ÜF (und dem Spektrum des Geländes) ließe sich über den AR-Fehler hinaus der mittlere Fehler pro Geländekomponente angeben. Auch sollte es möglich sein aufzuzeigen, in welchem Maß Krümmungsverhältnisse richtig dargestellt werden; dazu bedarf es aber noch weiterer Untersuchungen. Eine für kartographische Zwecke formgetreue Geländedarstellung (Schichtlinien, Schattierungen) erfordert eine gute Erfassung von Bruchlinien. Ein globaler, mittlerer Höhenfehler kann nur sehr beschränkt Auskunft darüber geben, inwieweit ein DHM eine ausreichende Bruchlinienrepräsentation bietet. Es ist naheliegend, Bruchkanten separat zu messen und dafür auch spezifische Beurteilungskriterien zu entwickeln.

Die vorausgesetzte äquidistante Digitalisierung bedeutet eine Einschränkung für die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Vorgehensweise. Dies betrifft sowohl die ÜF wie auch die Spektrumberechnung. Zwar ist es denkbar, die ÜF für eine unregelmäßige Punktverteilung zu bestimmen, jedoch jede spezifische Anordnung hat ihre eigene ÜF. Das Spektrum läßt sich nicht mehr mit geringem Aufwand als FFT berechnen, sondern muß über den Umweg der Autokorrelationsfunktion bestimmt werden. Es ist anzunehmen, daß sich im Fall einer Geländeaufnahme, bei der in etwa ein Raster eingehalten wird, die Formeln bezogen auf den durchschnittlichen Referenzpunktabstand anwenden lassen. Bei einer linienhaften Aufnahme, wie der Digitalisierung von Schichtlinien im Stereomodell, ist dies nicht mehr möglich.

Das Verfahren zur Genauigkeitsschätzung eines DHM mittels Spektralanalyse ist durchaus in der Praxis anwendbar, doch sind noch Ergänzungen und Verfeinerungen, sowohl theoretischer wie experimenteller Art vorstellbar. Dazu zählen vor allem

- die Berücksichtigung systematischer Fehler (dynamische Abtastfehler, Stereomodelldeformationen),
- das Formulieren von Unsicherheitsangaben für die Meßfehlereinflüsse,
- Verbesserungen in der Spektrumbestimmung,
- die Modellierung des Verflechtungseffekts,
- die Identifikation leicht quantifizierbarer Merkmale zur Geländeklassifizierung für Planungszwecke und
- eine empirische Überprüfung des Verfahrens an wirklichen Geländedaten.

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß Spektralanalyse und Übertragungsfunktion auch für andere digitale Modelle ein wertvolles Hilfsmittel zur Qualitätsbeurteilung sein können. In der Kartographie und der digitalen Bildverarbeitung stellen sich ähnliche Fragen wie für das DHM. Ein entsprechendes Beispiel für das Nutzbarmachen der Idee der Übertragungsfunktion ist in (19) gegeben.

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) Ackermann, F. *Zur Genauigkeit digitaler Höhermodelle.*
Photogrammetrische Woche, Stuttgart, 1979.
- (2) Botman, A.K.
Kubik, K. *On the theoretical accuracy of the moving average method for surface estimation.*
ITC-Journal, 1979/1, pp. 68-84.
- (3) Finsterwalder, R. *Die Genauigkeit von Stereoorthophotos.*
Presented Paper ISP, Comm. IV, Hamburg, 1980.
- (4) Frederiksen, P. *Terrain analysis and accuracy prediction by means of Fourier transformation.*
Presented Paper ISP, Comm. IV, Hamburg, 1980.
- (5) Jacobi, O. *Digital terrain model, point density, accuracy of measurements, type of terrain and surveying expenses.*
Presented Paper ISP, Comm. IV, Hamburg, 1980.
- (6) Jenkins, G.M.
Watts, D.G. *Spectral analysis.*
Holden-Day, Inc., San Francisco, 1969.
- (7) Jerie, H.G. *Development of a computer simulation system concerning accuracy of photogrammetric operations.*
ITC-Journal, 1973/4, pp. 547-561.
- (8) Kager, H. *Numerische Aspekte der Interpolation nach kleinsten Quadraten.*
ZfV, 1976/9, pp. 377-384.
- (9) Kratky, V. *Spectral analysis of interpolation.*
Presented Paper ISP, Comm. III, Hamburg, 1980.
- (10) Kraus, K.
Mikhail, E.M. *Linear least-squares interpolation.*
Phot.Eng. 1972/10, pp. 1016-1029.

- (11) Kraus, K. *Untersuchungen zur Genauigkeit der Interpolation nach kleinsten Quadraten.*
ZfV, 1974/5, pp. 198-205.
- (12) Kraus, K. *Digitally controlled production of orthophotos and stereo-orthophotos.*
Otepka, G.
Loitsch, J.
Haitzmann, H.
Phot.Eng. 1979/10, pp. 1353-1362.
- (13) Kubik, K. *Interpolation accuracy for topographic and geological surfaces.*
Botman, A.G.
ITC-Journal, 1976/2, pp. 236-274.
- (14) Laan, R.C. *Information transfer in the reconstruction of data from sampled points of a sine wave.*
ITC-Journal, 1973/3, pp. 379-396.
- (15) Makarovič, B. *Information transfer in reconstruction of data from sampled points.*
Phia, 1972/4, pp. 111-130.
- (16) Makarovič, B. *Conversion of fidelity into accuracy.*
ITC-Journal, 1974/4, pp. 506-517.
- (17) Makarovič, B. *Digital terrain model system.*
ITC-Journal, 1976/1, pp. 57-83.
- (18) Makarovič, B. *From progressive to composite sampling for digital terrain models.*
Geo-Processing, 1 (1979), pp. 145-166.
- (19) Makarovič, B. *Digitising images for automatic processing in photogrammetry.*
Tempfli, K.
ITC-Journal, 1979/1, pp. 107-125.
- (20) Otepka, G. *Empirische Genauigkeitsuntersuchung von Orthophotos.*
Duschanek, E.
Geowissensch. Mitteilungen der Studienrichtung Vermessungswesen, TU Wien, 1978, Heft 13, pp. 125-150.

- (21) Rüdener, H. *Experimentelle Genauigkeitsanalyse digitaler Höhenmodelle.*
Presented Paper ISP, Comm. IV, Hamburg 1980.
- (22) Santoso, D.B. *Derivation of contour lines from parallel terrain profiles.*
M.Sc. Thesis, ITC, March 1980.
- (23) Stanley, W.D.
Peterson, S.J. *Fast Fourier Transforms on your home computer.*
Byte, 1978/12, pp. 14-25.
- (24) Stefanovič, P.
Radwan, M.M.
Tempfli, K. *Digital terrain models: Data acquisition, processing and applications.*
ITC-Journal, 1977/1, pp. 61-76.
- (25) Tempfli, K.
Makarovič, B. *Transfer functions of interpolation methods.*
Geo-Processing, 1 (1979), pp. 1-26;
ITC-Journal, 1978/1, pp.50-80.
- (26) Tempfli, K. *Spectral analysis of terrain relief for the accuracy estimation of digital terrain models.*
ITC-Journal, 1980/3, pp. 478-510.
- (27) Tempfli, K. *An efficient method for surface approximation.*
ITC, 1972.
- (28) Wild, E. *Interpolation with weight-functions - a general interpolation method.*
Presented Paper IPS, Comm. III, Hamburg 1980.
- (29) Yaglom, A.M. *An introduction to the theory of stationary random functions.*
Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

ANHANG 1

Rekonstruktion als Faltung

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) g_i(x-t) dt$$

Mit der Substitution $x-t = u$ erhält man:

$$\hat{f}(x) = - \int_{\infty}^{-\infty} a(x-u) g_i(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-u) g_i(u) du$$

Da $g_i(u) = f_i(u) + m_i(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (f(l\Delta x) + m(l\Delta x)) \delta(u-l\Delta x)$

folgt

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-u) \sum_{l=-\infty}^{\infty} (f(l\Delta x) + m(l\Delta x)) \delta(u-l\Delta x) du .$$

Da $\delta(u-l\Delta x)$ nur ungleich Null ist, wenn $u = l\Delta x$, gilt:

$$\hat{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a(x-l\Delta x) (f(l\Delta x) + m(l\Delta x))$$

$f(l\Delta x) + m(l\Delta x) = g(l\Delta x)$ sind die vorliegenden Referenzwerte;

$a(t_l)$ sind die den Referenzwerten zugewiesenen Gewichte. Sie sind abhängig von der Distanz zwischen interpoliertem Punkt x und Referenzpunkt

$$x_l; \quad t_l = x - l\Delta x = x - x_l .$$

In Matrixschreibweise: $\hat{f}(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{g}$

$$\mathbf{g}^T = \left(\dots g(-\Delta x) \quad g(0) \quad g(\Delta x) \quad g(2\Delta x) \dots \right)$$

$$\mathbf{a}^T = \left(\dots a(x+\Delta x) \quad a(x) \quad a(x-\Delta x) \quad a(x-2\Delta x) \dots \right)$$

\hat{f} an der Stelle x wird also als Linearkombination der Referenzwerte berechnet.

Z.B. Interpolation nach kleinsten Quadraten: $\hat{f}(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{a}^T \mathbf{g}$

oder lineare Interpolation:

$$\hat{f}(x) = \left(1 - \frac{x - x_l}{x_{l+1} - x_l}\right) g(x_l) + \left(\frac{x - x_l}{x_{l+1} - x_l}\right) g(x_{l+1}) = \mathbf{a}^T \mathbf{g} ; x \in (x_l, x_{l+1})$$

Bei äquidistanter Referenzpunktverteilung gilt für LI:

$$a_l = 1 - \frac{x - x_l}{\Delta x} = 1 - \frac{x - l\Delta x}{\Delta x}$$

$$a_{l+1} = \frac{x - l\Delta x}{\Delta x} = 1 - \frac{x - (l+1)\Delta x}{\Delta x}$$

und die übrigen Elemente von \mathbf{a} sind Null. Dies entspricht der Generierung des Gewichtsvektors \mathbf{a} auf Grund der Funktion

$$a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\Delta x} & \text{für } |t| \leq \Delta x \\ 0 & \text{für } |t| > \Delta x \end{cases} ; \quad t_l = x - l\Delta x$$

ANHANG 2

Faltungstheorem

1) Herleitung des Faltungstheorems für den zweidimensionalen Fall:

$$\text{Wenn} \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)g(x-t)dt$$

$$\text{gilt} \quad \hat{F}(v) = A(v) G(v) ;$$

$$\text{wobei} \quad \hat{F}(v) = \mathbf{F}\{\hat{f}(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)e^{-j2\pi vx}dx \quad ; \quad j = \sqrt{-1}$$

$$A(v) = \mathbf{F}\{a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-j2\pi vt}dt$$

$$G(v) = \mathbf{F}\{g(x)\} .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \hat{F}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} a(t)g(x-t)dt \right) e^{-j2\pi vx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)e^{-j2\pi vx}dx \right) dt \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)e^{-j2\pi vx}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-j2\pi v(u+t)}du \\ &= e^{-j2\pi vt} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-j2\pi vu}du \\ &= e^{-j2\pi vt} G(v) \quad , \end{aligned}$$

ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \hat{F}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-j2\pi vt} G(v)dt = \\ &= A(v) G(v) . \end{aligned}$$

2) Herleitung für den dreidimensionalen Fall:

Wenn
$$\hat{f}(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(s,t)g(x-s,y-t)dsdt \quad ,$$

gilt
$$\hat{F}(v,\mu) = A(v,\mu)G(v,\mu);$$

wobei
$$\hat{F}(v,\mu) = \mathbf{F}(\hat{f}(x,y)) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x,y)e^{-j(2\pi vx + 2\pi\mu y)} dx dy$$

$$A(v,\mu) = \mathbf{F}(a(s,t)) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(s,t)e^{-j(2\pi vs + 2\pi\mu t)} ds dt$$

$$G(v,\mu) = \mathbf{F}(g(x,y)) \quad .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \hat{F}(v,\mu) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} a(s,t)g(x-s,y-t)dsdt \right) e^{-j(2\pi vx + 2\pi\mu y)} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} a(s,t) \left(\iint_{-\infty}^{\infty} g(x-s,y-t)e^{-j(2\pi vx + 2\pi\mu y)} dx dy \right) ds dt \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da } \iint_{-\infty}^{\infty} g(x-s,y-t)e^{-j2\pi(vx+\mu y)} dx dy &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(u,v)e^{-j2\pi(vu+\mu v+\nu s+\mu t)} du dv \\ &= e^{-j2\pi(\nu s+\mu t)} G(v,\mu) \quad , \end{aligned}$$

gilt
$$\hat{F}(v,\mu) = \left(\iint_{-\infty}^{\infty} a(s,t)e^{-j(2\pi\nu s+2\pi\mu t)} ds dt \right) G(v,\mu)$$

$$= A(v,\mu) G(v,\mu) \quad .$$

ANHANG 3

Replik des Spektrums durch Abtasten

1) Spektrum eines abgetasteten Signals, zweidimensionaler Fall (6):

$$\begin{aligned} \text{Abgetastetes Signal: } f_i(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l\Delta x) \delta(x-l\Delta x) = \\ &= f(x) i(x) \end{aligned}$$

$$\text{Reihe von Deltafunktionen: } i(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x-l\Delta x)$$

Definition der Dirac Delta- oder Impulsfunktion:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Fouriertransformierte des abgetasteten Signals:

$$F_i(v) = \mathbf{F}(f_i(x)) = \mathbf{F}(f(x) i(x))$$

Wenn $F(v) = \mathbf{F}(f(x))$ und $I(v) = \mathbf{F}(i(x))$, dann gilt nach dem Faltungstheorem:

$$\mathbf{F}(f(x) i(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v-u) I(u) du .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(f(x) i(x))) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(v-u) I(u) du \right) e^{j2\pi vx} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(v-u) e^{j2\pi vx} dv \right) du = \quad (\text{mit } v = v - u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{j2\pi(u+v)x} dv \right) du = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} I(u) e^{j2\pi ux} du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{j2\pi vx} dv \right) = \\ &= i(x) f(x) \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte $I(v)$ der Reihe von Impulsfunktionen ist wiederum eine Reihe von Impulsfunktionen:

$$F(i(x)) = F\left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{jl \frac{2\pi}{\Delta x} x}\right) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F\left(e^{jl \frac{2\pi}{\Delta x} x}\right) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{l}{\Delta x}\right)$$

Daraus folgt für $F_i(v)$:

$$\begin{aligned} F_i(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(v-u) \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{l}{\Delta x}\right) du = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F\left(v - \frac{l}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

2) Dreidimensionaler Fall:

Abgetastetes Signal: $f_i(x,y) = f(x,y) i(x,y)$

Bivariate Reihe von Deltafunktionen: $i(x,y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-l\Delta x, y-k\Delta y)$

Definition des bivariaten Dirac Delta- oder Impulsfunktion:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x,y \neq 0 \\ \infty & ; x,y = 0 \end{cases} ; \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y) dx dy = 1$$

Fouriertransformierte des abgetasteten Signals:

$$F_i(v,\mu) = F(f_i(x,y)) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(v-u, \mu-v) I(u,v) du dv$$

wobei $F(v,\mu) = F(f(x,y))$ und $I(v,\mu) = F(i(x,y))$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } F^{-1}(F f(x,y) i(x,y)) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} F(v-u, \mu-v) I(u,v) du dv \right) e^{j2\pi(vx+\mu y)} dv d\mu = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} I(u,v) \left(\iint_{-\infty}^{\infty} F(v-u, \mu-v) e^{j2\pi(vx+\mu y)} dv d\mu \right) du dv = \end{aligned}$$

mit $\xi = v-u$ und $\eta = \mu-v$ folgt weiter:

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} I(u,v) \left(\iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta) e^{j2\pi\{(\xi+u)x + (\eta+v)y\}} d\xi d\eta \right) du dv =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\iint_{-\infty}^{\infty} I(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \right) \left(\iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-j2\pi(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right) = \\
 &= i(x, y) f(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Für } I(v, \mu) \text{ gilt: } I(v, \mu) = F\left(i(x, y)\right) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(e^{j2\pi\left(\frac{l}{\Delta x} x + \frac{k}{\Delta y} y\right)}\right) = \\
 &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{l}{\Delta x}, \mu - \frac{k}{\Delta y}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Daraus folgt: } F_{\cdot}(v, \mu) &= \iint_{-\infty}^{\infty} F(v-u, \mu-v) \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{l}{\Delta x}, \mu - \frac{k}{\Delta y}\right) du dv = \\
 &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(v - \frac{l}{\Delta x}, \mu - \frac{k}{\Delta y}\right)
 \end{aligned}$$

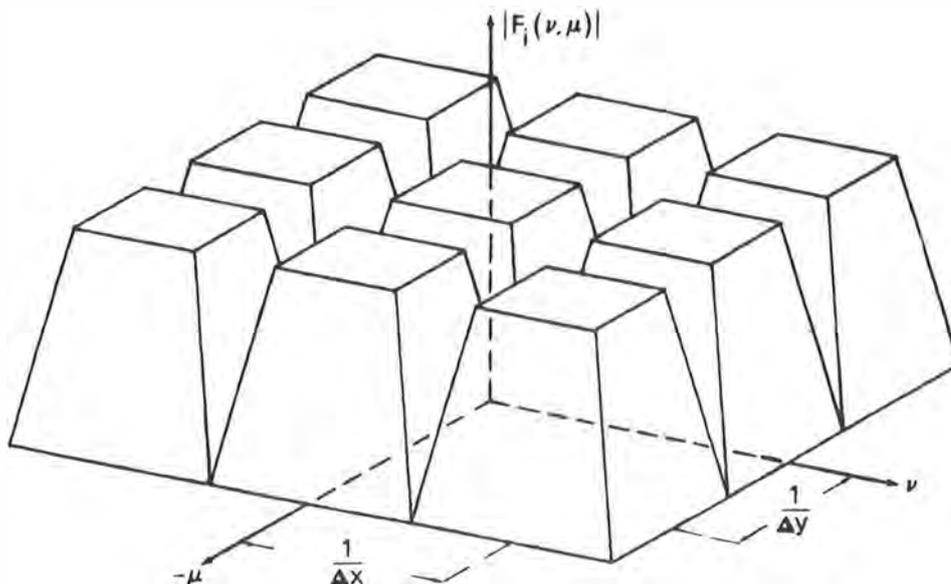


Abb. A1: Schematische Darstellung des Amplitudenspektrums $|F_{\cdot}(v, \mu)|$

Die Gleichung für $F_{\cdot}(v, \mu)$ zeigt, daß das Spektrum des abgetasteten Signals $f_{\cdot}(x, y)$ ein periodisches Abbild des Spektrums von $f(x, y)$ ist. Die Periodenlänge in der x-Richtung ist $\frac{1}{\Delta x}$, die in der y-Richtung $\frac{1}{\Delta y}$ (siehe Abb. A1) - dies unter der Bedingung, daß $F(v, \mu)$ gleich Null ist für $|v| \geq \frac{1}{2\Delta x}$ und $|\mu| \geq \frac{1}{2\Delta y}$; ansonsten überlappen sich die periodisch wiederholten Spktrumelemente (Verflechtungseffekt, vergleiche Seite 9).

ANHANG 4

Auswirkung eines rein zufälligen Meßfehlers bei linearer Interpolation
- Herleitung im Ortsbereich

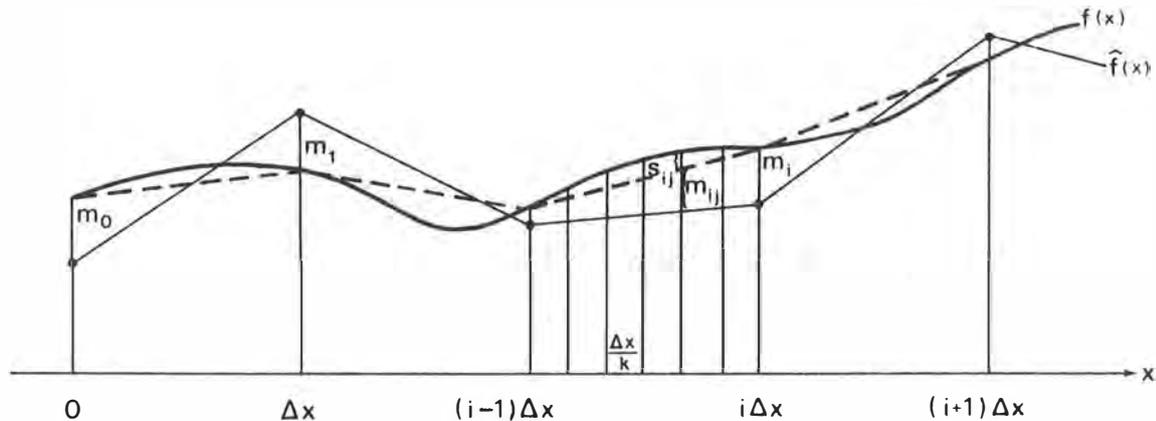


Abb. A4: Illustration zur Meßfehlerauswirkung

Fehler des rekonstruierten Signals $\hat{f}(x)$ im Punkt j im i ten Intervall:

$$e_{ij} = f\left(\left(i + \frac{j}{k}\right)\Delta x\right) - \hat{f}\left(\left(i + \frac{j}{k}\right)\Delta x\right) = s_{ij} + m_{ij}$$

s_{ij} Fehler bedingt durch das Abtasten von $f(x)$ und die Rekonstruktion mit LI.

(Wären die abgetasteten Werte nicht mit einem Meßfehler behaftet

- m_0, m_1, \dots gleich Null - dann wäre die strichliert gezeichnete Linie der Abb. A4 das rekonstruierte Signal.)

m_{ij} Fehler bedingt durch die unkorrelierte Zufallsfolge m_i .

$i = 0, 1, \dots, n; \quad E\{m_i\} = 0.$

n Anzahl der Abtastintervalle, $n\Delta x = L.$

k Anzahl der Kontrollpunkte per Intervall.

Varianz des Meßfehlers m_i :

$$\sigma_M^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i^2$$

Schätzvariable für die Varianz von e :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e_{ij}^2$$

Da $e_{ij}^2 = s_{ij}^2 + m_{ij}^2 + 2s_{ij}m_{ij}$, folgt:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k s_{ij}^2 + \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}^2 + \frac{2}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k s_{ij}m_{ij} = \\ &= \hat{\sigma}_S^2 + \hat{\sigma}_R^2 + \hat{\sigma}_{SR}\end{aligned}$$

Im Fall von LI gilt für m_{ij} :

$$m_{ij} = m_{i-1} + qj; \quad q = \frac{m_i - m_{i-1}}{k}$$

Liegen unendlich viele gemessene Werte vor, dann verschwindet $\hat{\sigma}_{SR}$:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{SR} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k s_{ij} m_{i-1} + \frac{q}{k} \sum_{j=1}^k j s_{ij} \right) \\ \lim_{k, n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_{i-1}}{k} \sum_{j=1}^k s_{ij} \right) &= 0 & \left| \quad \lim_{nk \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k s_{ij} = 0 \right. \\ \lim_{k, n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i - m_{i-1}}{k^2} \sum_{j=1}^k j s_{ij} \right) &= 0 & \left. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n m_i = E\{m_i\} = 0 \right.\end{aligned}$$

Für $\hat{\sigma}_R^2$ gilt: $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k m_{ij}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (m_{i-1}^2 + q^2 j^2 + 2m_{i-1} qj) =$

$$\begin{aligned}&= m_{i-1}^2 + \frac{q^2}{k} \sum_{j=1}^k j^2 + \frac{2m_{i-1}}{k} q \sum_{j=1}^k j = \\ &= m_{i-1}^2 + (m_i - m_{i-1})^2 \frac{1}{6} \frac{k+1}{k} \frac{2k+1}{k} + m_{i-1} (m_i - m_{i-1}) \frac{k+1}{k}\end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k m_{ij}^2 = \frac{1}{3} (m_i^2 + m_{i-1}^2 + m_i m_{i-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_R^2 = \frac{1}{3} \sigma_M^2 + \frac{1}{3} \sigma_M^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i m_{i-1} = \frac{2}{3} \sigma_M^2 = \sigma_R^2$$

Somit folgt für die Varianz des Fehlers von $\hat{f}(x)$:

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 = \sigma_S^2 + \sigma_R^2$$

AR-Fehler bei einer zweistufigen Rekonstruktion

Abwandlung des Signals (siehe 2.1.7.)	Zugehörige Fouriertransformierte
$f(x)$ $f_i(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l\Delta x_1) \delta(x-l\Delta x_1)$ $m_i(x) = 0$ $z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_1(t) f_i(x-t) dt$ $z_i(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} z(l\Delta x_2) \delta(x-l\Delta x_2)$ $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_2(t) z_i(x-t) dt$	$F(v) = 0 \quad \text{für} \quad v \geq \frac{1}{2\Delta x_1} = v_{N_1}$ $F_i(v) = \mathcal{R}_{\Delta x_1} \left[\frac{1}{\Delta x_1} F \right] = \frac{1}{\Delta x_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(v - \frac{k}{\Delta x_1})$ $M_i(v) = 0$ $Z(v) = A_1(v) F_i(v)$ $Z_i(v) = \mathcal{R}_{\Delta x_2} \left[\frac{1}{\Delta x_2} \bar{Z} \right]$ $\hat{F}(v) = A_2(v) Z_i(v)$

$\Delta x_2 = \Delta x_1/m$; m ist eine ganze Zahl.

$\mathcal{R}_{\Delta x}$ bedeutet Replik von $F(v)$ mit der Periode $1/\Delta x$ (siehe Anhang 3 und Abb. 2.4, 2.5).

$Z_i(v)$ ist nicht ein periodisches Abbild von $Z(v)$, sondern von der verflochtenen Transformierten $\bar{Z}(v)$, da im allgemeinen $Z(v) \neq 0$ für $|v| \geq 1/2\Delta x_2$.

Entsprechend der Formulierung (11) in 2.1.2. gilt für $\bar{Z}(v)$:

$$\bar{Z}(v) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z(v - \frac{k}{\Delta x_2}) & |v| < \frac{1}{2\Delta x_2} = v_{N_2} \\ 0 & |v| \geq v_{N_2} \end{cases}$$

Da $F_i(v)$ periodisch ist und vorausgesetzt wurde, daß Δx_1 ein ganzzahliges Vielfaches von Δx_2 ist, folgt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z(v - \frac{k}{\Delta x_2}) = F_i(v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_1(v - \frac{k}{\Delta x_2}) = F_i(v) \bar{A}_1(v)$$

$\bar{A}_1(v)$ ist die auf $(-v_{N_2}, v_{N_1})$ verflochtene Systemfunktion der ersten Rekonstruktion ($\bar{A}_1(v) = 0$ für $|v| \geq v_{N_2}$).

Der Fehler des rekonstruierten Signals ist $e(x) = f(x) - \hat{f}(x)$, seine Fouriertransformierte $E(v) = F(v) - \hat{F}(v)$. Wenn $m_i(x) = 0$, dann ist die Varianz von $e(x)$ die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion:

$$\sigma_S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |E(v)|^2 dv$$

Aus den obigen Beziehungen folgt:

$$E(v) = F(v) - A_2(v) \mathbb{R} \left[\frac{1}{\Delta x_2} F_i \bar{A}_1 \right] = F(v) - \frac{1}{\Delta x_2} A_2(v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_i(v - \frac{k}{\Delta x_2}) \bar{A}_1(v - \frac{k}{\Delta x_2})$$

Berücksichtigt man die Beziehung (10.1), so läßt sich die folgende Trennung vornehmen:

$$E(v) = \begin{cases} F(v) - \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} A_2(v) \bar{A}_1(v) F(v) & |v| < v_{N_1} \\ -\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} A_2(v) \bar{A}_1(v) \Delta x_1 F_i(v) & v_{N_1} \leq |v| < v_{N_2} \\ -\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} A_2(v) \mathbb{R} \left[\Delta x_1 F_i \bar{A}_1 \right] & |v| \geq v_{N_2} \end{cases}$$

Mit der Normierung $\tilde{A}_1 = (1/\Delta x_1) \bar{A}_1$ und $\tilde{A}_2 = (1/\Delta x_2) A_2$ und der zu (12) analogen Herleitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \int_{-v_{N_1}}^{v_{N_1}} \left\{ 1 - \tilde{A}_1(v) \tilde{A}_2(v) \right\}^2 |F(v)|^2 dv + \\ &+ 2 \int_{-v_{N_1}}^{v_{N_1}} \tilde{A}_1^2(v) \tilde{A}_2^2(v) |\Delta x_1 F_i(v)|^2 dv + \\ &+ 2 \int_{-v_{N_2}}^{v_{N_2}} \tilde{A}_1^2(v) |\Delta x_1 F_i(v)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_2^2(v + \frac{k}{\Delta x_2}) dv \\ \sigma_S^2 &= \int_{-v_{N_1}}^{v_{N_1}} \left\{ (1 - \tilde{A}_1(v) \tilde{A}_2(v))^2 + 2\tilde{A}_1^2(v) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_2^2(v + \frac{k}{\Delta x_2}) \right\} |F(v)|^2 dv + \\ &+ 2 \int_{v_{N_1}}^{v_{N_2}} \left\{ \tilde{A}_1^2(v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_2^2(v + \frac{k}{\Delta x_2}) \right\} |\Delta x_1 F_i(v)|^2 dv \\ \sigma_S^2 &= \int_{-v_{N_1}}^{v_{N_1}} \left\{ (1 - \tilde{A}_1(v) \tilde{A}_2(v))^2 + 2\tilde{A}_1^2(v) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_2^2(v + \frac{k}{\Delta x_2}) + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{l=1}^{m+2} \left(\tilde{A}_1^2(v + \frac{l}{\Delta x_1}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_2^2(v + \frac{l}{\Delta x_1} + \frac{k}{\Delta x_2}) \right) \right\} |F(v)|^2 dv \end{aligned}$$

Analytische Ableitung der Übertragungsfunktion für bilineare Interpolation

Ausgehend von der Überlegung, daß sich eine stetige Funktion auf dem Gebiet $LX.LY$ als eine Linearkombination von harmonischen, (bivariaten) Sinuswellen auffassen läßt, kann man, sofern Abtasten und Rekonstruktion ein lineares System darstellen, das Systemverhalten nach folgendem Prinzip formulieren:

Eine Sinuswelle $f(x,y) = \sin(2\pi\nu x + 2\pi\mu y + \phi)$ wird in einem Rechtecksraster mit der Maschengröße $\Delta x.\Delta y$ abgetastet. Für eine Rastermasche IJ läßt sich je nach Rekonstruktionsvorschrift die Fläche $\hat{f}(x,y)$ angeben und damit der Fehler $e(x,y) = f(x,y) - \hat{f}(x,y)$ bzw. seine Varianz bezogen auf IJ . Durch Mittelung über alle Rastermaschen (Gesamtgebiet $LX.LY$) erhält man die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion für die Sinuswelle und somit die Übertragungsfunktion.

Im Fall einer Rekonstruktion durch BLI ergibt sich, analog zur Ableitung der ÜF für LI in (14):

Eingangssignal: $f(x,y) = \sin(2\pi\nu x + 2\pi\mu y + \phi) \quad ; \quad \phi = 0$

Abtasten: $f_{i,j} = \sin(2\pi\nu x_i + 2\pi\mu y_j)$
 $x_i = i\Delta x \quad ; \quad i = 0, 1, \dots n; \quad n\Delta x = LX$
 $y_j = j\Delta y \quad ; \quad j = 0, 1, \dots m; \quad m\Delta y = LY$

Rekonstruktion für die Rastermasche IJ : $x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}$

$$\begin{aligned} IJ\hat{f}(x,y) = & f_{i,j} + (f_{i+1,j} - f_{i,j}) \frac{x - x_i}{\Delta x} + \\ & + (f_{i,j+1} - f_{i,j}) \frac{y - y_j}{\Delta y} + \\ & + (f_{i,j} + f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1}) \frac{(x-x_i)(y-y_j)}{\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

Fehler für IJ : $IJe(x,y) = IJf(x,y) - IJ\hat{f}(x,y)$

Varianz für IJ : $\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} IJe^2(x,y) \, dx dy$

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} (I_J f^2(x,y) + I_J \hat{f}^2(x,y) - 2 I_J f(x,y) I_J \hat{f}(x,y)) dx dy$$

Nach den entsprechende Substitutionen und der (keineswegs kurzen) Ausarbeitung ergibt sich mit $\omega = 2\pi v$ und $\psi = 2\pi u$:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} f^2(x,y) dx dy &= \frac{\Delta x \Delta y}{2} - \frac{\sin \omega \Delta x \sin \psi \Delta y}{2\omega\psi} \cos((2i+1)\omega\Delta x + (2j+1)\psi\Delta y) \\ \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} \hat{f}^2(x,y) dx dy &= \frac{\Delta x \Delta y}{18} \left\{ 4 \left(\cos^2 \frac{\omega \Delta x}{2} + \cos^2 \frac{\psi \Delta y}{2} \right) + \cos \omega \Delta x \cos \psi \Delta y - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + 4 \cos \omega \Delta x \cos^2 \frac{\psi \Delta y}{2} + 4 \cos \psi \Delta y \cos^2 \frac{\omega \Delta x}{2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos((2i+1)\omega\Delta x + (2j+1)\psi\Delta y) \right\} \\ -2 \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} f(x,y) \hat{f}(x,y) dx dy &= \frac{4}{\omega\psi} \left\{ - \frac{\sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}}{\frac{\omega \Delta x}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\psi \Delta y}{2}}{\frac{\psi \Delta y}{2}} + (\sin \omega \Delta x \sin \psi \Delta y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}}{\frac{\omega \Delta x}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\psi \Delta y}{2}}{\frac{\psi \Delta y}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}}{2} \sin \psi \Delta y - \frac{\sin^2 \frac{\psi \Delta y}{2}}{2} \sin \omega \Delta x) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos((2i+1)\omega\Delta x + (2j+1)\psi\Delta y) \right\} \end{aligned}$$

Der lange Ausdruck für σ_{ij}^2 läßt sich in zwei Komponenten aufgliedern:

$$\sigma_{ij}^2 = \xi(u,v) + \eta(u,v) \cos(\alpha_i + \beta_j)$$

$$\text{mit } u = \frac{\omega \Delta x}{2\pi} = v \Delta x, \quad v = \frac{\psi \Delta y}{2\pi} = u \Delta y, \quad \alpha_i = (2i+1)2\pi u, \quad \beta_j = (2j+1)2\pi v;$$

$$\xi(u,v) = 1 - \frac{1}{3} (\sin^2 2\pi u + \sin^2 2\pi v) + \frac{2}{9} \sin^2 2\pi u \sin^2 2\pi v - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \left(\frac{\sin \pi v}{\pi v} \right)^2$$

Varianz für $LX.LY$:

$$\sigma(n, m, u, v) = \sqrt{\frac{1}{nm} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sigma_{i,j}^2} = (\xi(u, v) + \eta(u, v) \zeta(n, m, u, v))^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \zeta(n, m, u, v) &= \frac{1}{nm} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \cos(\alpha_i + \beta_j) = \\ &= \frac{\sin n2\pi u}{n \sin 2\pi u} \frac{\sin m2\pi v}{m \sin 2\pi v} \cos(n2\pi u + m2\pi v) \end{aligned}$$

Bei endlicher Maschenweite und unendlichem Gebiet $LX.LY$ gilt:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sigma^2(n, m, u, v) = \sigma^2(u, v) = \xi(u, v)$$

Somit folgt für die Übertragungsfunktion:

$$H(u, v) = 1 - \sqrt{2} \sigma(u, v) = 1 - \sqrt{2\xi(u, v)}$$

Es ließe sich weiters zeigen, daß die ÜF bei unendlich großem Gebiet $LX.LY$ unabhängig von der Phase ϕ ist - wenn $u < 1/2$ und $v < 1/2$ ist.

Wie in 2.2.2. angedeutet, enthält eine bivariate Fourier Reihe auch Komponenten der Art $\sin(2\pi ux - 2\pi vy + \phi)$. Verwendet man eine Sinuswelle diesen Typs als Eingangssignal, so ändert sich gegenüber der obigen Ableitung nur $\eta(u, v)$ und $\zeta(u, v)$, nicht aber $\xi(u, v)$, da in $\xi(u, v)$ μ bzw. ν nur in quadratischen Formen aufscheint.

Es ist zu sehen, daß $H(u, v)$ nicht trennbar ist:

$$H(u, v=0) = H(u) = 1 - \left(2\left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \pi u - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

(vergleiche ÜF für LI, 2.1.2., Seite 13).

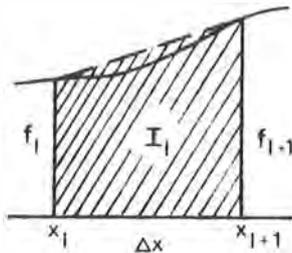
$$H(u, v) = 1 - \sqrt{2 - \frac{2}{3} (\sin^2 \pi u + \sin^2 \pi v) + \frac{4}{9} \sin^2 \pi u \sin^2 \pi v - 2\left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 \left(\frac{\sin \pi v}{\pi v}\right)^2} \neq$$

$$\neq H(u) H(v) = \left\{1 - \sqrt{2 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi u - 2\left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2}\right\} \left\{1 - \sqrt{2 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi v - 2\left(\frac{\sin \pi v}{\pi v}\right)^2}\right\}$$

ANHANG 7

Mittlerer Fehler eines aus dem DHM gerechneten Volumens

1) Zweidimensionaler Fall: Mittlerer Fehler eines Flächeninhalts



$$\text{Fehler von } I_l : \epsilon_l = \int_{\Delta x} f(x) dx - I_l ; x \in (x_l, x_{l+1})$$

$$I_l = \Delta x \frac{f_l + f_{l+1}}{2} = \int_{\Delta x} \hat{f}(x) dx$$

$$\hat{f}(x) = \frac{f_{l+1} - f_l}{\Delta x} (x - x_l) + f_l \quad (\text{lineare Interpolation})$$

Abb. A7: Fehler eines Flächeninhalts I_l

$$\epsilon_l = \int_{\Delta x} (f(x) - \hat{f}(x)) dx = \int_{\Delta x} e(x) dx$$

Mittlerer Fehler, berechnet aus n Abtastintervallen:

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \epsilon_l^2}$$

Für die Varianz gilt somit:

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x_l} e(x) dx \right)^2 \Delta x^2$$

Zum Vergleich die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion mit LI:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x_l} e^2(x) dx$$

Da $\left(\frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} e(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} e^2(x) dx$, folgt:

$$\sigma_I^2 \leq \Delta x^2 \sigma_S^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_I < \Delta x \sigma_S$$

2) Dreidimensionaler Fall: Mittlerer Fehler eines Volumens über eine Rastermasche gerechnet

$$V_{lk} = \frac{f_{l,k} + f_{l+1,k} + f_{l,k+1} + f_{l+1,k+1}}{4} \Delta x \Delta y =$$

$$= \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \hat{f}(x,y) dx dy$$

$$\hat{f}(x,y) = f_{l,k} + (f_{l+1,k} - f_{l,k}) \frac{x-x_l}{\Delta x} + (f_{l,k+1} - f_{l,k}) \frac{y-y_k}{\Delta y} +$$

$$+ (f_{l,k} - f_{l,k+1} + f_{l+1,k+1} - f_{l+1,k}) \frac{x-x_l}{\Delta x} \frac{y-y_k}{\Delta y} \quad (\text{bilineare Interpolation})$$

Fehler von V_{lk} :
$$\epsilon_{lk} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} (f(x,y) - \hat{f}(x,y)) dx dy$$

Mittlerer Fehler von V , berechnet aus $n \cdot m$ Maschen:

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{nm} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \epsilon_{lk}^2}$$

Varianz des Volumenfehlers:

$$\sigma_V^2 = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{n \cdot m} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta x_l} \int_{\Delta y_k} e(x,y) dx dy \right)^2$$

Zum Vergleich die Varianz des Fehlers wegen Abtastung und Rekonstruktion mit BLI:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{nm} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta x_l} \int_{\Delta y_k} e^2(x,y) dx dy$$

Da
$$\left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} e(x,y) dx dy \right)^2 \leq \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} e^2(x,y) dx dy, \quad \text{folgt:}$$

$$\sigma_V \leq \Delta x \Delta y \sigma_S$$

LEBENS LAUF

- 28.9.1946 Geboren in Vöcklabruck, Oberösterreich, als Sohn von Ing. Georg Tempfli und seiner Ehefrau Johanna, geborene Reiss.
- 1952 - 1957 Besuch der Volksschule in Nassereith, Tirol.
- 1957 - 1965 Besuch des Bundesrealgymnasiums; die ersten drei Jahre in Landeck, Tirol, die restlichen fünf Jahre in Braunau, Oberösterreich. Abschluß durch die Reifeprüfung am 12.6.1965.
- 1965 - 1966 Ableistung des ordentlichen Präsenzdiensts.
- 1966 - 1971 Studium des Vermessungswesens an der Technischen Hochschule in Wien. Abschluß mit der II. Staatsprüfung am 25.6.1971.
- Seit 1.9.1971 tätig als wissenschaftlicher Mitarbeiter am "International Institute for Aerial Survey and Earth Sciences (ITC)" in Enschede, Niederlande.
- Seit 29.12.1978 verheiratet mit Gertrud Maria Rankl; seit 1979 bzw. 1981 haben wir zwei Töchter.

Bisher erschienen:

- Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1970 - 1973, Dezember 1973.
- Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendung im Vermessungswesen, 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English, Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.
- Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1973 - 1974, September 1974.
- Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Tektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.
- Heft 5 K. LEDERSTEGER, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.
- Heft 6 F. REICHHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von + 30° bis + 60°, Oktober 1975.
- Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.
- Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.
- Heft 9 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie und Reproduktionstechnik, W.PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.
- Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC-100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik, Wien, Mai 1976.
- Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1974 - 1976, November 1976.
- Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1977.
- Heft 13 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr.h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.

- Heft 14 L.MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.
- Heft 15 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Barvir, Wien, Januar 1979.
- Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1976 - 1979, Wien, November 1979.
- Heft 17 E. VOZIKIS, Die photographische Differentialumbildung gekrümmter Flächen mit Beispielen aus der Architekturbildmessung, Wien, Dezember 1979.
- Heft 18 Veröffentlichung des Instituts für Allgemeine Geodäsie anlässlich des 75. Geburtstages von Prof. Dr. Friedrich Hauer: Die Höhe des Großglockners. Wien 1981.
- Heft 19 H.KAGER, Bündeltriangulation mit indirekt beobachteten Kreiszentren, Wien, April 1981.
- Heft 20 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1980 (im Druck).
- Heft 21 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie anlässlich des 70. Geburtstages von Prof. Dr. Wolfgang Pillewizer: Glaziologie und Kartographie (im Druck).