

Studienrichtung Vermessungswesen  
Technische Universität Wien

**GEOWISSENSCHAFTLICHE  
MITTEILUNGEN**

Heft 19

**Bündeltriangulation  
mit indirekt beobachteten Kreiszentren**

von  
H. KAGER

Veröffentlichung des Institutes für Photogrammetrie

Geowiss. Mitt.  
19, 1981

Wien, im April 1981

Studienrichtung Vermessungswesen  
Technische Universität Wien

**GEOWISSENSCHAFTLICHE  
MITTEILUNGEN**

Heft 19

**Bündeltriangulation  
mit indirekt beobachteten Kreiszentren**

von  
H. KAGER

Veröffentlichung des Institutes für Photogrammetrie

Geowiss. Mitt.  
19, 1981

Wien, im April 1981

Herausgeber und Verleger: o.Prof.Dr.-Ing.K.Kraus  
Vorstand des Instituts für Photogrammetrie  
der Technischen Universität Wien  
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29

Die Kosten für den Druck wurden größtenteils aus eigenen Einnahmen des  
Instituts für Photogrammetrie der TU Wien getragen.

Einband: Fa. F. Manhardt, Wien  
Druck: ÖHTUW - Vervielfältigung, Wien  
Auflage: 300 Stück

## KURZFASSUNG

Bei der photogrammetrischen Bauüberwachung von Ölbohrplattformen besteht die Aufgabe, eine Reihe von kreisförmigen Öffnungen entlang einer räumlichen Achse auszurichten. Die räumliche Position und Stellung dieser Kreise sind unbekannt. Sie sollen mittels photogrammetrischer Bündeltriangulation bestimmt werden.

Um den Aufnahmeprozeß ökonomisch zu gestalten, sollen auf den Kreisperipherien keine Signale angebracht werden. Aus diesem Grunde findet man in den verschiedenen Bildern auf den Kreisperipherien keine korrespondierenden Punkte, m.a.W. es gibt keine Verknüpfungspunkte.

Dieses Problem kann gelöst werden, falls die fiktiven Kreismittelpunkte als photogrammetrische Verknüpfungspunkte verwendet werden.

Unter Verwendung von Vektoralgebra wird ein Algorithmus entwickelt, der ausgehend von Bildkoordinaten von beliebigen Punkten auf der Kreisperipherie die Bildkoordinaten des Kreismittelpunktes im jeweiligen Meßbild liefert. Dies geschieht nicht iterativ mit strengen Formeln. Ein weiterer Algorithmus wird vorgestellt, der die Entscheidung ermöglicht, welche der beiden geometrisch möglichen Lösungen für die weitere Auswertung heranzuziehen ist.

Die Algorithmen und das entwickelte EDV-Programm werden an einem Beispiel mit Erfolg erprobt.

## ABSTRACT

In photogrammetrically controlling the construction of oil dwelling platforms, sequences of circular holes have to be adjusted along spatial axes. Spatial position and orientation of these circles is unknown, and should be determined by photogrammetric triangulation.

For reasons of economy, no artificial marks shall be created on the peripheral of the circles. As a consequence of this, no stereoscopic correspondance of points is available for observation, i.e. no tie points can be established.

This problem can be solved in deriving image coordinates of circle centers in the process of adjustment, and applying these fictitious points as tie points.

Using vector algebra an algorithm has been developed yielding the needed image coordinates on the basis of arbitrary points of circle peripherals measured monoscopically. It is an exact, non-iterative solution, delivering two geometrically possible results. A further algorithm is given enabling the choice between these two solutions.

Finally, an application of the algorithm and of the corresponding computer program is presented.

## INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT	4
EINLEITUNG	5
DIE FORMULIERUNG DER GEOMETRISCHEN AUFGABE	6
GEOMETRISCHE ÜBERLEGUNGEN	6
MATHEMATISCHER ANSATZ	7
DIE POLARE ZERLEGUNG EINER SYMMETRISCHEN MATRIX $A$	11
DIE INVARIANTEN DER QUADRATISCHEN FORM $x^T \cdot A \cdot x = c$	12
DER EINFLUSS EINES FAKTORS $\mu$ AUF DIE INVARIANTEN EINER MATRIX $A$	12
DIE BERECHNUNG DES MULTIPLIKATORS $\lambda$	13
BERECHNUNG DER KEGELPARAMETER $\rho$ UND $\nu$	15
DIE BERECHNUNG DER DREHMATRIX $R$	15
DIE BERECHNUNG DER NORMIERTEN EIGENVEKTOREN EINER $(3,3)$ - -MATRIX $A$ AUFGRUND DER BEKANNTEN EIGENWERTE $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	16
DIE DURCHFÜHRUNG DER POLAREN ZERLEGUNG FÜR $C$ UND $Q$	17
DIE BERECHNUNG DES BILDES DES KREISMITTELPUNKTES $M$	17
ÜBERLEGUNGEN ZUR MEHRDEUTIGKEIT DER LÖSUNG	18
Anzahl der Lösungen	18
Die Auswahl der zutreffenden Lösung	20
Die Unterscheidbarkeit der beiden Lösungen	21
EIN BEISPIEL	24
ANHANG A	
Die polare Zerlegung der Matrix $C$	30
ANHANG B	
Beweis der Monotonie der drei Eigenwerte von $C$	32
ANHANG C	
Können zwei der drei Eigenwerte von $C$ gleich groß sein ?	32
ANHANG D	
Die algebraische Berechnung der normierten Eigenvektoren von $C$ (6)	33
ANHANG E	
Nomogramme zur Beurteilung der Unterscheidbarkeit und Unterscheidungsnotwendigkeit der beiden Lösungen	35
LEBENS LAUF	37
LITERATURVERZEICHNIS	37

## VORWORT

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Photogrammetrie der TU Wien angefertigt. Anlässlich der Geodätischen Informationstage 1980 ergab sich eine Diskussion mit Herrn Prof. I. Hådem, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Norwegischen Technischen Hochschule in Trondheim, über ein Problem der Bündeltriangulation, das bei der Bauüberwachung von Bohrplattformen auftritt.

Dieses Problem erwies sich als eine reizvolle analytisch-geometrische Aufgabe. Dank der Überzeugung Prof. Hådem, daß das Problem lösbar sein müsse, wurde es in Angriff genommen. Mit dieser Arbeit wird eine Lösung präsentiert. Es ist nun möglich, aufgrund des perspektiven Bildes der Peripherie eines Kreises das Bild seines (physikalisch nicht existierenden) Mittelpunktes mit einer Folge strenger Formeln zu berechnen.

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank Herrn Prof. Dr. K. Kraus für wertvolle Diskussionen und Herrn Prof. Dr. G. Brandstätter\* für die Übernahme des Koreferates aussprechen. Herrn Dr. E. Vozikis danke ich für seine Hilfe bei der Entwicklung eines Computerprogrammes zur Überprüfung des neuen Algorithmus, Herrn J. Tschannerl für die Erfassung von Testdaten am Stereokomparator, und Frau H. Emersberger und Frau H. Reitzi für die Mühewaltung bei der Niederschrift des symbolreichen Manuskriptes.

\*Diese Arbeit wird bei der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Technischen Universität Wien zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Technischen Wissenschaften eingereicht.

BÜNDELTRIANGULATION MIT INDIREKT BEOBACHTETEN KREISZENTREN

EINLEITUNG

Bei der Fertigung von Ölförderungs-Bohrplattformen, die auf offener See verwendet werden sollen, muß die an Land erfolgende Montage überwacht und kontrolliert werden. Eines der dabei zu überprüfenden Kriterien ist die Ausrichtung der kreisförmigen Ausnehmungen entlang von Geraden, um Rohre entsprechenden Durchmessers hindurchschieben zu können (Abb. 1).

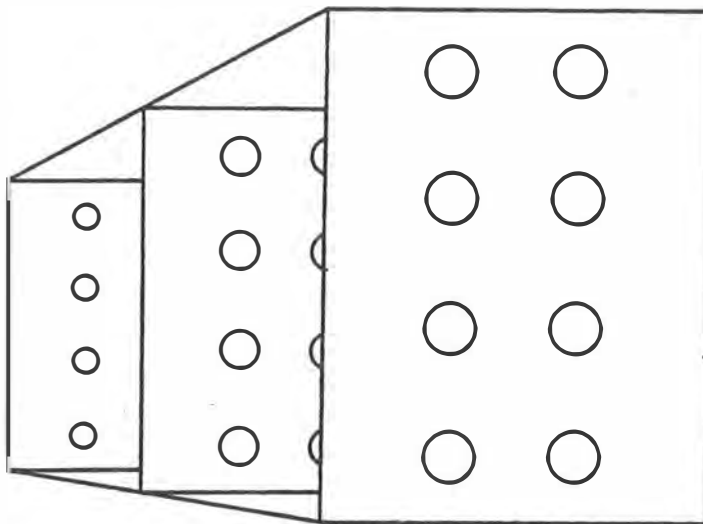


Abb. 1.: Schema einer Ölförderungs-Bohrplattform

Das Problem wäre im wesentlichen gelöst, wenn man von den Kreismittelpunkten die dreidimensionalen Objektkoordinaten kennen würde. Für diese Punktbestimmung bietet sich die photogrammetrische Bündeltriangulation an. Allerdings können die Mittelpunkte der Kreise in den photographischen Bildern nicht direkt angemessen werden. In den Photographien sieht man lediglich die perspektiven Bilder der Kreisumfänge, auf denen außerdem keine Signale angebracht werden sollen (Zeitaufwand, schwierige Zugänglichkeit).

Es besteht daher die Aufgabe, aus den Bildkoordinaten einiger Punkte, die man entlang der perspektiven Bilder der Kreisumfänge ( = in den meisten Fällen Ellipsen ) anordnen kann, die Bildkoordinaten der (fiktiven) Mittelpunkte der Kreise zu berechnen.

Die so erhaltenen perspektiven Bilder der Kreismittelpunkte können dann als Beobachtungen in eine konventionelle photogrammetrische Bündeltriangulation eingehen.

DIE FORMULIERUNG DER GEOMETRISCHEN AUFGABE

Gegeben seien die Bildkoordinaten  $\bar{x}_i, \bar{y}_i$  von  $n$  Punkten  $P_i$ , die im Objektsystem auf einem Kreis liegen; weiters sei die Innere Orientierung  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  der Meßkammer bekannt.

Gesucht sind die Bildkoordinaten  $\bar{x}_M, \bar{y}_M$  des Mittelpunktes  $M$  des Kreises.

Dabei treten folgende Fragen auf:

- Ist das Problem lösbar (insbesondere ohne Kenntnis des Kreisdurchmessers) ?
- Wenn ja, ist es eindeutig lösbar ?

GEOMETRISCHE ÜBERLEGUNGEN (Abb. 2.)

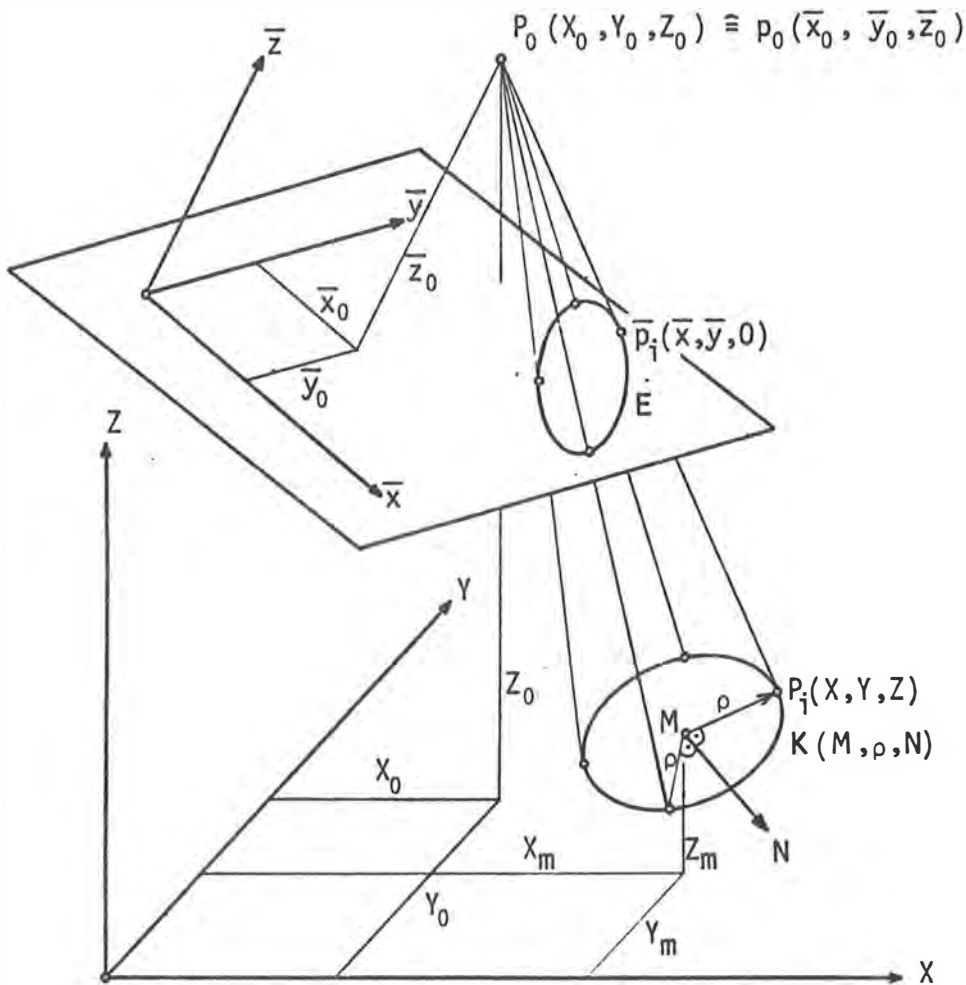


Abb. 2.: Die perspektive Abbildung des Kreises  $K$

Die Abbildungsstrahlen für den Kreis  $K$  beschreiben den Mantel eines (in der Regel) schiefen Kreiskegels.



Der Schnitt des Kegels mit der Bildebene ergibt natürlich einen Kegelschnitt. Im allgemeinen ist es eine Ellipse, was gewährleistet ist, falls das ganze Bild des Kreises in das Bildformat fällt. Der Kegelschnitt wird mit  $E$  bezeichnet.

Für die Lösung der Aufgabe, das Bild des Kreismittelpunktes zu finden, ist die Kenntnis des Durchmessers irrelevant, da es sich bei einer Parallelverschiebung der Ebene des Kreises nicht ändert, und der Durchmesser so jeden beliebigen Wert annehmen kann.

### MATHEMATISCHER ANSATZ

Wir definieren einen schiefen Kreiskegel in einem lokalen Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \zeta)$  (Abb. 3.).

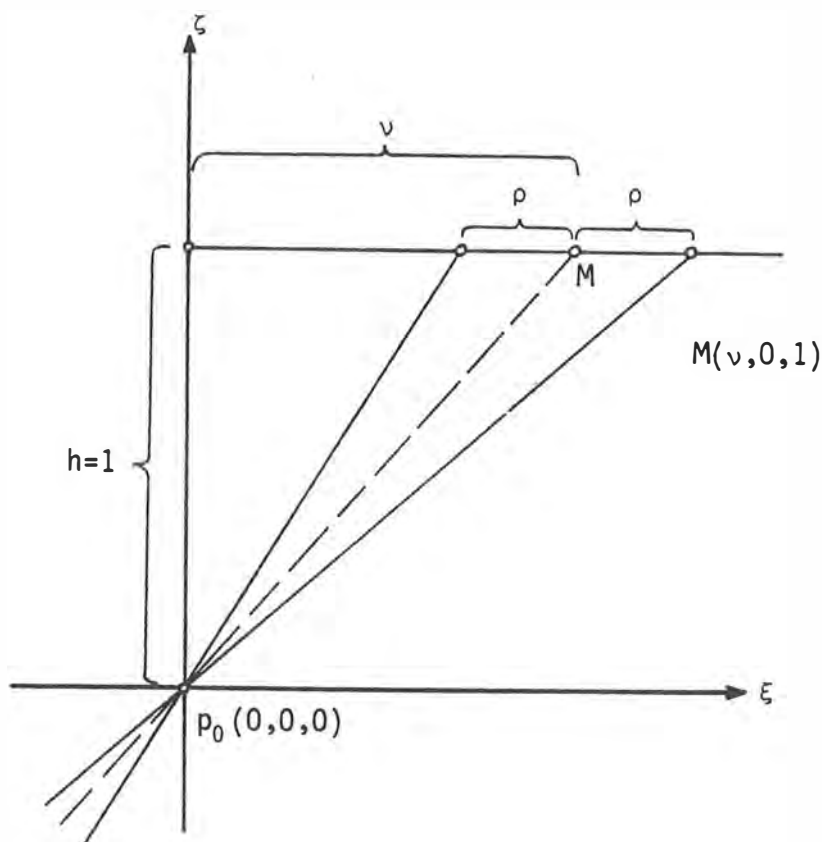


Abb. 3.: Die Definition eines schiefen Kreiskegels

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Höhe  $h$  des Kegels mit  $1$  und legen den Mittelpunkt des Leitkreises mit dem Radius  $\rho$  in die  $(\xi, \zeta)$ -Ebene :  $M(v,0,1)$  .

Damit ergibt sich die Kegelgleichung zu

$$(\xi - \nu \cdot \zeta)^2 + \eta^2 = (\rho \cdot \zeta)^2 \quad (1)$$

Mit Hilfe der im Bildkoordinatensystem  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  beobachteten Bildpunkte  $\bar{p}_i$  muß derselbe Kegel dargestellt werden.

Zunächst transformieren wir die Bildpunkte in ein normiertes Bildkoordinatensystem  $(x, y, z)$ , dessen Ursprung im Projektionszentrum liegt (Abb. 4.).

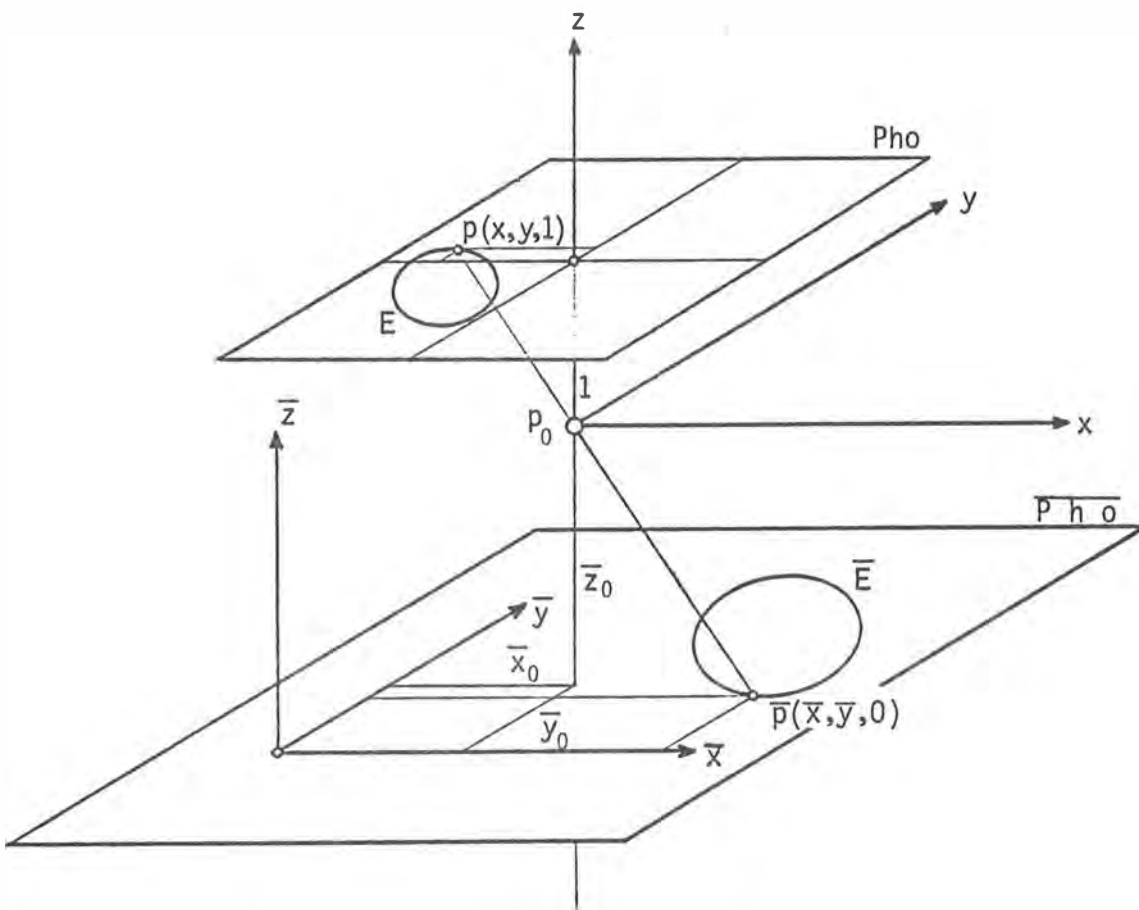


Abb. 4.: Normierung der Bildkoordinaten

$$x := \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{- \bar{z}_0} ; \quad y := \frac{\bar{y} - \bar{y}_0}{- \bar{z}_0} ; \quad z := \frac{0 - \bar{z}_0}{- \bar{z}_0} = 1 \quad (2)$$

d. h.:  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, 0) \rightarrow p(x, y, 1)$  .

Im  $(x,y)$ -Subsystem ermitteln wir darauf (durch Ausgleichung) die Gleichung der Ellipse /1/

$$e_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot e_{12} \cdot x \cdot y + 2 \cdot e_{13} \cdot x + e_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot e_{23} \cdot y + e_{33} = 0 \quad (3)$$

die, als quadratische Form notiert, folgende Gestalt für die normierten Bildpunkte annimmt <sup>a)</sup>:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

in Matrizenschreibweise

$$X^T \cdot E \cdot X = 0 \quad (5)$$

Da für jeden Vektor  $X^T = (x, y, z)$ , der die Beziehung (5) erfüllt, auch jeder zu diesem  $X$  proportionale Vektor  $\hat{X}^T := k \cdot X^T = (k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$  (5) erfüllt, können wir (5) als die quadratische Form eines Kegels interpretieren, dessen Spitze (für  $k=0$ ) im Ursprung des Koordinatensystems  $(x, y, z)$  liegt.

Gleichung (3) bzw. (4) beschreibt dann die Leitkurve für die Erzeugenden  $\hat{X}$  des Kegels.

Auch die Kegelgleichung (1) können wir als quadratische Form anschreiben:

$$(\xi, \eta, \zeta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & v^2 - \rho^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

in Vektorschreibweise:

$$\Xi^T \cdot C \cdot \Xi = 0 \quad (7)$$

Wir können also schließen, daß unser Kegel  $C$  (7) durch die Ellipse  $E$  (5) unter Hinzunahme des Projektionszentrums  $P_0$  als Spitze in einem lediglich gedrehten Koordinatensystem beschrieben wird.

---

<sup>a)</sup> über  $e_{33}$  wird meist willkürlich verfügt, z.B.:  $e_{33} := -1$

Wir definieren mit Hilfe der Drehmatrix  $R$  den Zusammenhang

$$\varepsilon := R \cdot x \quad \text{mit} \quad R^T \cdot R = I \quad (8)$$

und setzen (8) in (7) ein und erhalten für die Punkte  $X$  des gedrehten Kegels

$$x^T \cdot R^T \cdot C \cdot R \cdot x = 0 \quad (9)$$

Mit der Definition

$$Q := R^T \cdot C \cdot R \quad (10)$$

geht (9) über in

$$x^T \cdot Q \cdot x = 0 \quad (11)$$

Die quadratischen Formen (5) und (11) laden zu einem Koeffizientenvergleich ein, da Punkte  $X$  des gedrehten Kegels auch die Ellipsengleichung in der (normierten) Bildebene erfüllen müssen; allerdings muß dabei berücksichtigt werden, das beide Gleichungen homogen sind. Wir setzen daher den Koeffizientenvergleich mit einem - zunächst unbekanntem - Multiplikator  $\lambda$  an:

$$E = \lambda \cdot Q \quad (12)$$

Um die unbekanntem Parameter  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  des Kegels und die drei Drehparameter in  $R$  zu bestimmen, reichen die sechs Gleichungen für die zahlenmäßig bereits bekannten  $e_{ij}$  in (12) aus.

Wir wollen dazu die Theorie der polaren Zerlegung symmetrischer Matrizen sowie die Theorie der invarianten Größen quadratischer Formen verwenden. Im folgenden Abschnitt sollen diese Theorien - soweit sie für die Lösung unseres Problems relevant sind - skizziert werden.

### DIE POLARE ZERLEGUNG EINER SYMMETRISCHEN MATRIX $A$

Gemäß /4/ kann jede symmetrische Matrix  $A$  in eine orthonormale Matrix

$$V := (v_1, v_2, v_3) \quad \text{mit} \quad v^T \cdot v = v \cdot v^T = I \quad (13)$$

und eine Diagonalmatrix

$$S := \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

zerlegt werden, sodaß gilt

$$A = V \cdot S \cdot V^T \quad (15)$$

Die Matrix  $S$  beherbergt auf ihrer Diagonalen die Eigenwerte  $s_{jj}$  von  $A$ , während  $V$  eine orthonormale Basis des durch die Spaltenvektoren von  $A$  aufgespannten Raumes darstellt; ein Spaltenvektor  $v_j$  aus  $V$  wird auch als der zum Eigenwert  $s_{jj}$  gehörige Eigenvektor von  $A$  bezeichnet:

$$A \cdot v_j = s_{jj} \cdot v_j \quad (16)$$

In der Terminologie der Theorie quadratischer Formen gesprochen, enthält  $V$  die Hauptachsrichtungen der Fläche zweiten Grades, die durch  $x^T \cdot A \cdot x = c$  festgelegt wird, während die Diagonalelemente  $s_{jj}$  von  $S$  proportional zu den reziproken Quadraten der Hauptachslängen sind.

Eine derartige polare Zerlegung ist aber nicht eindeutig, da zu jeder Permutation der Diagonalelemente  $s_{jj}$  von  $S$  eine Permutation der Spalten von  $V$  existiert, die ebenfalls (15) erfüllt (die Spalte  $j$  von  $V$  ist ja der Eigenvektor, der zum Eigenwert  $s_{jj}$  gehört).

Für die folgenden Überlegungen wollen wir festsetzen, daß die Diagonalelemente von  $S$  für wachsende Indizes monoton fallend angeordnet seien, d.h.

$$s_{11} \geq s_{22} \geq s_{33} \quad (17)$$

Darüber hinaus kann  $v_j$  durch  $-v_j$  in  $V$  ersetzt werden, ohne daß die Beziehung (15) verletzt wird.

Mit diesem Freiheitsgrad kann sichergestellt werden, daß  $V$  eine eigentliche Drehung ( $|V|=+1$  d.h. ohne Spiegelung) repräsentiert.

Weitere Eindeutigkeitsprobleme treten auf, falls die Eigenwerte von  $A$  nicht alle voneinander verschieden sind. Falls zwei gleiche Diagonalelemente in  $S$  auftreten, gehört zu diesem Eigenwert ein "Eigenraum" der Dimension 2 (also eine Ebene, wobei jeder Vektor dieser Ebene Eigenvektor ist); jedes Paar orthonormaler Vektoren in dieser Ebene kann dann zum Aufbau von  $V$  herangezogen werden.

Die Auswirkungen dieser Eindeutigkeitsprobleme auf unsere Aufgabe sollen erst später diskutiert werden.

DIE INVARIANTEN DER QUADRATISCHEN FORM  $\chi^T \cdot A \cdot \chi = c$

Die folgenden drei Größen einer symmetrischen Matrix  $A$  sind rotationsinvariant /4/

$$\begin{aligned} \Delta(A) &:= |A| && \text{Determinante} \\ \delta(A) &:= \sum_{j>i} (a_{jj} \cdot a_{ii} - a_{ij} \cdot a_{ji}) && (18) \\ \tau(A) &:= \sum_i a_{ii} && \text{Spur der Matrix} \end{aligned}$$

d.h.:

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \Delta(R^T \cdot A \cdot R) \\ \delta(A) &= \delta(R^T \cdot A \cdot R) \\ \tau(A) &= \tau(R^T \cdot A \cdot R) \end{aligned} \quad (19)$$

Die Eigenwerte der Formmatrix  $A$  sind ebenfalls rotationsinvariant.

DER EINFLUSS EINES FAKTORS  $\mu$  AUF DIE INVARIANTEN EINER MATRIX  $A$

Ein Multiplikator  $\mu$  bewirkt bei einer Matrix der Dimension (3,3)

$$\begin{aligned} \Delta(\mu \cdot A) &= \mu^3 \cdot \Delta(A) \\ \delta(\mu \cdot A) &= \mu^2 \cdot \delta(A) \\ \tau(\mu \cdot A) &= \mu \cdot \tau(A) \end{aligned} \quad (20)$$

Aus (15) folgt, daß die Eigenwerte von  $A$ , mit  $\mu$  multipliziert, die Eigenwerte der Matrix  $(\mu \cdot A)$  ergeben, während die Hauptachrichtungen erhalten bleiben.

DIE BERECHNUNG DES MULTIPLIKATORS  $\lambda$

Wir berechnen zunächst die in (18) definierten Invarianten:  
numerisch für  $E$  (4) und algebraisch für  $C$  (6);  
die Anwendung der Beziehungen (10), (18) und (19) auf (12) ergibt  
sodann:

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= \Delta(\lambda \cdot Q) = \Delta(\lambda \cdot C) = \lambda^3 \cdot ( - \rho^2 ) \\ \delta(E) &= \delta(\lambda \cdot Q) = \delta(\lambda \cdot C) = \lambda^2 \cdot ( v^2 - 2 \cdot \rho^2 + 1 ) \\ \tau(E) &= \tau(\lambda \cdot Q) = \tau(\lambda \cdot C) = \lambda \cdot ( v^2 - \rho^2 + 2 )\end{aligned}\tag{20}$$

Aus (20) kann unmittelbar die folgende Funktion gebildet werden:

$$\Delta(E) - \lambda \cdot \delta(E) + \lambda^2 \cdot \tau(E) = \lambda^3 \cdot (-\rho^2 - v^2 + 2 \cdot \rho^2 - 1 + v^2 - \rho^2 + 2) = \lambda^3$$

oder

$$-\lambda^3 + \tau(E) \cdot \lambda^2 - \delta(E) \cdot \lambda + \Delta(E) = 0\tag{21}$$

Dies ist aber nichts anderes als das charakteristische Polynom

$$\Delta(E - \lambda \cdot I) = 0\tag{22}$$

der Matrix  $E$ , das uns hier als kubische Gleichung entgegentritt.  
Die drei Wurzeln dieser Gleichung liefern die drei (reellen) Eigenwerte  
von  $E$ . Dies bedeutet aber auch, daß einer der drei Eigenwerte von  $E$   
für die "Skalierung" (12) der Definitionsgleichung (1) oder (6) unseres  
Kegels herhalten muß.

Welche der drei Lösungen von (21) nun den gesuchten Faktor  $\lambda$  in (12)  
darstellt, soll auf Grund noch zu eruierender Kriterien entschieden werden.  
Einen ersten Anhaltspunkt liefern uns die Gleichungen (20), mit deren Hilfe  
die Kegelparameter  $v$  und  $\rho$  berechenbar sein sollten. Auf Grund geometrisch  
anschaulicher Überlegung (Abb. 3.) dürfen  $v^2$  und  $\rho^2$  keinesfalls negative  
Zahlen sein; also muß gelten:

$$v^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad \rho^2 > 0\tag{23}$$

Diese beiden Kriterien erwiesen sich bei ersten praktischen Testrechnungen als  
in allen Fällen wirksam und führten zu einer eindeutigen Zuordnung von  $\lambda$  zu  
genau einer Wurzel des charakteristischen Polynoms (21); theoretisch erscheint  
ein derartiges Probiervverfahren jedoch unbefriedigend, weshalb die folgenden  
Überlegungen angestellt wurden.

Wenn wir die Matrix  $C$  algebraisch einer polaren Zerlegung zuführen (siehe Anhang A ), erhalten wir mit der Substitution ( vgl. (a2) )

$$\varepsilon := v^2 - \rho^2 - 1$$

für die drei Eigenwerte von  $C$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2}}{2} \\ \sigma_2 &= 1 \\ \sigma_3 &= 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\sqrt{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2}}{2}\end{aligned}\tag{24}$$

Weiters gilt die Ungleichung ( Beweis im Anhang B )

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \geq \sigma_3\tag{25}$$

Wir können die drei Wurzeln des charakteristischen Polynoms (21) in Übereinstimmung mit (17) so ordnen, daß gilt:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3\tag{26} \quad *)$$

Da die Eigenwerte von  $C$  und  $Q$  gleich sind und die Eigenwerte von  $E$  proportional zu denen von  $Q$  sind, gilt gemäß (12) :

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \sigma_1 \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda \cdot \sigma_2 = \lambda \quad ; \quad \lambda_3 = \lambda \cdot \sigma_3\tag{27}$$

wodurch der gesuchte Faktor  $\lambda$  als der der Größe nach mittlere Eigenwert von  $E$  bzw. als die zweitgrößte Lösung der kubischen Gleichung (21) identifiziert ist.

Damit können die Eigenwerte des Kegels  $C$  bereits berechnet werden:

$$\sigma_1 = \lambda_1 / \lambda_2 \quad ; \quad \sigma_2 = 1 \quad ; \quad \sigma_3 = \lambda_3 / \lambda_2\tag{28}$$

---

\*) Streng genommen müßten wir (26) so schreiben:

$$\text{sign}(\lambda_1) \cdot \lambda_2 \geq \text{sign}(\lambda_2) \cdot \lambda_2 > \text{sign}(\lambda_3) \cdot \lambda_2\tag{26}$$

da wir in (5)  $E$  durch  $-E$  ersetzen könnten, wodurch alle Eigenwerte von  $E$  ihr Vorzeichen ändern würden! Die Formel (28) eliminiert dieses Problem aber automatisch.



BERECHNUNG DER KEGELPARAMETER  $\rho$  UND  $\nu$

Aus (20) folgt für den Radius des Leitkreises

$$\rho = \sqrt{-\lambda^{-3} \cdot \Delta(E)} \quad (29)$$

aus (20) folgt für die Schiefe des Kegels

$$\nu = \pm \sqrt{-\lambda^{-3} \cdot \Delta(E) + \lambda^{-1} \cdot \tau(E) - 2} \quad (30)$$

Welches der beiden Vorzeichen für  $\nu$  verwendbar ist, kann erst später entschieden werden;  $\nu^+$  möge die positive Wurzel,  $\nu^-$  die negative bezeichnen.

Beide Kegelparamter können aber auch mit Hilfe von (24) und (28) direkt aus den Eigenwerten berechnet werden:

$$\rho = \sqrt{-\sigma_1 \cdot \sigma_3} = \sqrt{-\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_3}{\lambda_2 \cdot \lambda_2}} \quad (31)$$

$$\nu = \pm \sqrt{(\sigma_1 - 1) \cdot (1 - \sigma_3)} = \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_2 \cdot \lambda_2}} \quad (32)$$

BERECHNUNG DER DREHMATRIX  $R$

Wir bilden zunächst gemäß (12) aus  $E$  die durch  $\lambda$  dividierte Matrix  $Q$ , die der Matrix  $C$  des Kegels ähnlich ist (10).

Im Moment kennen wir zahlenmäßig die Matrix  $Q$  und zwei Versionen von  $C$ :  $C^+$  für  $\nu^+$  bzw.  $C^-$  für  $\nu^-$ ; alle drei Matrizen haben dieselben Invarianten  $\Delta$ ,  $\delta$  und  $\tau$  und daher dieselben Eigenwerte  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ .

Dies legt eine polare Zerlegung dieser Matrizen /2/ nahe.

Mit Hilfe der drei Eigenwerte  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ , die auch die Eigenwerte der Matrix  $Q = \lambda^{-1} \cdot E$  sind, können bereits die jeweils drei normierten Eigenvektoren der Matrizen  $C$  und  $Q$  berechnet werden. Da wir dazu denselben Algorithmus verwenden können, brauchen wir keine expliziten Formeln für die Eigenvektoren von  $C$  bzw.  $Q$  angeben.

DIE BERECHNUNG DER NORMIERTEN EIGENVEKTOREN EINER (3,3)-MATRIX A  
AUFGRUND DER BEKANNTEN EIGENWERTE  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Die Definitionsgleichungen für die normierten Eigenvektoren seien gegeben durch:

$$A \cdot v_i = \sigma_i \cdot v_i \quad \text{und} \quad v_i^T \cdot v_i = 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \quad (33)$$

dies stellt ein homogenes Gleichungssystem mit einer Normierungsbedingung für die Unbekannten dar:

$$\begin{aligned} \bar{A}_i \cdot v_i &:= (A - \sigma_i \cdot I) \cdot v_i = 0 \\ v_{i1}^2 + v_{i2}^2 + v_{i3}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (34)$$

(Die Determinante von  $\bar{A}_i$  verschwindet natürlich, da der Rang von  $\bar{A}_i$  gleich 2 ist, falls alle drei Eigenwerte verschieden sind.)

Wir partitionieren  $\bar{A}_i$  nun in seine Spaltenvektoren, die alle in einer Ebene liegen

$$\bar{A}_i = (A - \sigma_i \cdot I) = (A_1, A_2, A_3) \quad (35)$$

und bilden daraus die folgende Hilfsmatrix  $H_i$ , wobei der Operator  $\times$  das äußere Produkt der damit verknüpften Vektoren darstellt.

$$H_i := (H_1, H_2, H_3)_i := (A_2 \times A_3, A_3 \times A_1, A_1 \times A_2)_i \quad (36)$$

Aus dieser Matrix proportionaler Spaltenvektoren, die den Rang 1 hat, wählen wir (aus Gründen der Rechenschärfe) jenen Vektor  $H_k$  aus, der die absolut größte Komponente enthält und normieren ihn mit seiner euklidischen Norm, damit er beide Bedingungen in (33) erfüllt:

$$v_i := \pm \frac{1}{\|H_k\|} \cdot H_k \quad (37)$$

Wenn wir den Algorithmus (34) bis (37) für  $i=1,2,3$  durchführen, erhalten wir mit

$$V = (v_1, v_2, v_3) \quad (38)$$

eine Matrix, die (15) erfüllt.

Somit wäre die polare Zerlegung einer symmetrischen (3,3)-Matrix mit lauter verschiedenen Eigenwerten vollbracht.

Falls zwei der Eigenwerte gleich sind (vgl. Anhang C), sinkt der Rang von  $\bar{A}_i$  für diese Eigenwerte  $\sigma_i$  auf 1 ab, sodaß im Gefolge  $H_i$  verschwindet. In diesem Fall können aufgrund des berechenbaren dritten Eigenvektors die anderen beiden so konstruiert werden, daß sie die Orthonormalitätsbedingungen erfüllen. Die Willkür, die bei der "Behebung" dieser Vieldeutigkeit auftritt, wird sich aber für unsere Problemstellung als auswirkungslos erweisen.

#### DIE DURCHFÜHRUNG DER POLAREN ZERLEGUNG FÜR C UND Q

Durch die Anwendung des Algorithmus (34) bis (37) auf die Matrizen C und Q mit denselben Eigenwerten  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  aus (24) erhalten wir orthonormale Eigenrichtungsmatrizen  $V_C$  und  $V_Q$ . Es gilt dann (vgl. (15))

$$V_C^T \cdot C \cdot V_C = S_C = S = S_Q = V_Q^T \cdot Q \cdot V_Q \quad (39)$$

und im weiteren

$$Q = V_Q \cdot V_C^T \cdot C \cdot V_C \cdot V_Q^T \quad (40)$$

was über (10) zur gesuchten Drehmatrix R führen würde

$$R = V_C \cdot V_Q^T \quad (41)$$

wenn  $V_C$  bzw.  $V_Q$  eindeutig wären.

Die Auswirkungen dieser Mehrdeutigkeit sollen aber erst in einem späteren Abschnitt diskutiert werden.

#### DIE BERECHNUNG DES BILDES DES KREISMITTELPUNKTES M

Der Kreismittelpunkt M hat im System  $(\xi, \eta, \zeta)$  die Koordinaten  $(v, 0, 1)$ . Mit der Drehung (8) bringen wir ihn ins normierte Bildsystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_M = R^T \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V_Q \cdot V_C^T \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

und können durch Projektion in die Bildebene und Umkehrung von (2) seine Bildkoordinaten berechnen:

$$\bar{x}_M = \bar{x}_0 - \frac{x_M}{z_M} \cdot \bar{z}_0 \quad ; \quad \bar{y}_M = \bar{y}_0 - \frac{y_M}{z_M} \cdot \bar{z}_0 \quad (43)$$

Bei einer Bündeltriangulation ersetzt dann ein Punkt mit diesen Koordinaten die  $n \geq 5$  Punkte, die auf der Kreisbildperipherie gemessen worden waren. Vorher ist aber zu entscheiden, welche der Lösungen zutreffend ist.

ÜBERLEGUNGEN ZUR MEHRDEUTIGKEIT DER LÖSUNG

ANZAHL DER LÖSUNGEN

Im Laufe der bisherigen Ableitungen ist uns als Ursache möglicher Mehrdeutigkeiten an mehreren Stellen die Zweideutigkeit der Vorzeichen von Wurzeln entgegengetreten:

einerseits beim Vorzeichen der Kegelschiefe  $v$  in (30) bzw. (32) andererseits beim Vorzeichen der Richtungen der Eigenvektoren in den Eigenrichtungsmatrizen  $V_C$  und  $V_Q$  (siehe (37) bis (42)).

Wir wollen nun die daraus resultierenden Varianten für das Bild des Kreismittelpunktes diskutieren.

Zum Zweck dieser Analyse spalten wir (42) in die beiden Teildrehungen auf, indem wir  $M$  im ausgezeichneten Koordinatensystem der Eigenvektoren von  $C$  darstellen:

$$M_C := V_C^T \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Die Komponenten der Matrix  $V_C$  leiten wir dazu algebraisch mit Hilfe des Algorithmus (33) bis (38) ab (ausführlich im Anhang D):

$$V_C = \frac{1}{l} \cdot \begin{pmatrix} \textcircled{1} -2 \cdot v & 0 & \textcircled{3} \hat{\varepsilon} \\ 0 & \textcircled{2} l & 0 \\ \textcircled{1} \hat{\varepsilon} & 0 & \textcircled{3} 2 \cdot v \end{pmatrix} \quad (45)$$

wobei:

$$\hat{\varepsilon} := \varepsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad l := \sqrt{4 \cdot v^2 + \hat{\varepsilon}^2} \quad (46)$$

①, ②, ③: stellt dabei jeweils eine Vorzeichenalternative  $\pm$  dar.  
(Die Größen  $\hat{\varepsilon}$  und  $l$  sind unabhängig von Vorzeichenzweideutigkeiten.)

Daraus ergibt sich für  $v^+$  und  $v^-$  (die beiden Vorzeichenvarianten von  $v$  gemäß (30)):

$$M_C^+ = V_C^{+T} \cdot \begin{pmatrix} v^+ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \textcircled{1} (-2 \cdot v^{+2} + \hat{\epsilon}) \\ 0 \\ \textcircled{3} v^+ \cdot (\hat{\epsilon} + 2) \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$M_C^- = V_C^{-T} \cdot \begin{pmatrix} v^- \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \textcircled{4} (-2 \cdot v^{-2} + \hat{\epsilon}) \\ 0 \\ \textcircled{6} v^- \cdot (\hat{\epsilon} + 2) \end{pmatrix} \quad (48)$$

Wegen  $v^{+2} = v^{-2} = v^2$  und  $-v^- = v^+ = |v| =: v$  folgt weiter:

$$M_C^+ = \frac{1}{\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \pm (-2 \cdot v^2 + \hat{\epsilon}) \\ 0 \\ \pm v \cdot (2 + \hat{\epsilon}) \end{pmatrix} = M_C^- \quad (49)$$

Damit können wir (49) unter Rücksubstitution von (46) umschreiben in

$$M_C = \begin{pmatrix} \pm x_C \\ 0 \\ \pm z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{-2 \cdot v^2 + \epsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}}{\sqrt{4 \cdot v^2 + (\epsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2})^2}} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}}{\sqrt{4 \cdot v^2 + (\epsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2})^2}} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Dies ergibt mit allen Vorzeichenkombinationen der  $\pm$  vier Lösungen für  $M_C$ , genauer gesagt, zwei Paare einander entgegengesetzter Lösungen:

$M_C$	$\pm x_C$	$\pm z_C$
$M_C^{++}$	+	+
$M_C^{+-}$	+	-
$M_C^{-+}$	-	+
$M_C^{--}$	-	-

sodaß:

$$\begin{aligned} M_C^{++} &= -M_C^{--} \\ M_C^{+-} &= -M_C^{-+} \end{aligned} \quad (51)$$

Nun müssen wir  $M_C$  noch weiterdrehen, um in das Objektsystem zu gelangen:

Mit Hilfe von (44) geht (42) über in

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_M = V_Q \cdot M_C \quad (52)$$

Nach der Partitionierung von  $V_Q$  gemäß (37) und (38) folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_M = (\pm V_{Q_1}, \pm V_{Q_2}, \pm V_{Q_3}) \cdot \begin{pmatrix} \pm x_C \\ 0 \\ \pm z_C \end{pmatrix} = \pm x_C \cdot V_{Q_1} \pm z_C \cdot V_{Q_3} \quad (53)$$

In dieser letzten Linearkombination der Eigenvektoren von  $Q$  absorbieren die Vorzeichenvarianten von  $M_C$  wiederum jene von  $V_Q$ , sodaß sich an der Anzahl vier der Lösungen für das gedrehte  $M$  in (42) nichts ändert. Erst im nächsten Berechnungsschritt, wo mit Hilfe von (43) die Bildkoordinaten des Kreismittelpunktes berechnet werden, wird die Anzahl der Lösungen auf die Hälfte reduziert, da jedes Paar entgegengesetzter Lösungen von  $M$  (vgl. (51)) nur einen Punkt in der perspektiven Projektion ergibt.

Damit ist gezeigt, daß es für diese Aufgabe zwei Lösungen gibt.

Daraus ergibt sich aber bereits das nächste Problem:

Welche der beiden Lösungen ist die eigentlich gesuchte?

#### DIE AUSWAHL DER ZUTREFFENDEN LÖSUNG

Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, existieren bei dieser Aufgabenstellung Fluchten von Kreisen; d.h., es ist möglich, Aussagen über die Richtung der Kreisnormalen (bzw. über die Stellung der Kreisebenen) zu machen. Beispielsweise könnte die Richtung dieser Kreisnormalen im Objektsystem näherungsweise als "Referenzrichtung" angegeben werden!

Zu jeder der beiden Lösungen für das Bild des Kreismittelpunktes kann dann aber auch die entsprechende Kreisnormalenrichtung berechnet werden. Durch Vergleich mit der Referenzrichtung wird dann der am besten dazupassende Kreis und damit die korrekte Lösung gefunden.

Der Vektor der Kreisnormalenrichtung  $N$  ergibt sich durch Drehung der  $\zeta$ -Achse (vgl. Abb. 3.) gemäß (8) ins Objektsystem mit:

$$N = R^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V_Q \cdot V_C^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

als die dritte Zeile der Drehmatrix  $R$ , wenn dieselben Vorzeichenvarianten der Eigenvektoren in  $V_Q$  und  $V_C$  wie bei der Berechnung der entsprechenden Lösung für den Mittelpunkt verwendet werden.

Diejenige Version von  $N$ , die zur Referenzrichtung (ebenfalls ein Einheitsvektor) "besser kollinear" ist, zeigt den richtigen Mittelpunkt an.

Als Maß dafür wird, der Einfachheit halber, das innere Produkt von Referenzrichtung und Kreisrichtung  $N$  gebildet, das verschwinden würde, wenn die beiden Vektoren orthogonal wären, aber betragsmäßig ein Maximum annimmt, wenn die Vektoren kollinear sind.

Die Referenzrichtung wird in der Praxis aber besser dadurch bestimmt, daß anhand der Bilder vieler komplanarer (resp. paralleler) Kreise die Normalenrichtungen jeweils beider Kreislösungen gebildet werden. Jedes dieser Lösungspaare enthält dann einen Vektor, der sich mit der gesuchten Referenzrichtung bereits in sehr guter Übereinstimmung befindet. Programmtechnisch ergibt sich daraus die Aufgabe, diejenigen Vektoren herauszusuchen, die sich in möglichst guter Übereinstimmung befinden und aus ihnen die Referenzrichtung zu "ermitteln".

#### DIE UNTERSCHIEDBARKEIT DER BEIDEN LÖSUNGEN

Die Normalenrichtungen  $N$  der beiden Kreisebenen  $K$  schließen den Winkel  $2\alpha$  ein (Abb. 5.).

$\alpha$  ist der Winkel der Verdrehung des Hauptachssystems des Kegels gegenüber dem willkürlich gewählten (Abb. 3.) Kegelsystem  $(\xi, \eta, \zeta)$  und wurde anlässlich der polaren Zerlegung der Matrix  $C$  bereits berechnet (siehe Anhang A : (a6) ):

$$t := \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot v}{\epsilon} = \frac{2 \cdot v}{v^2 - \rho^2 - 1} \quad (55)$$

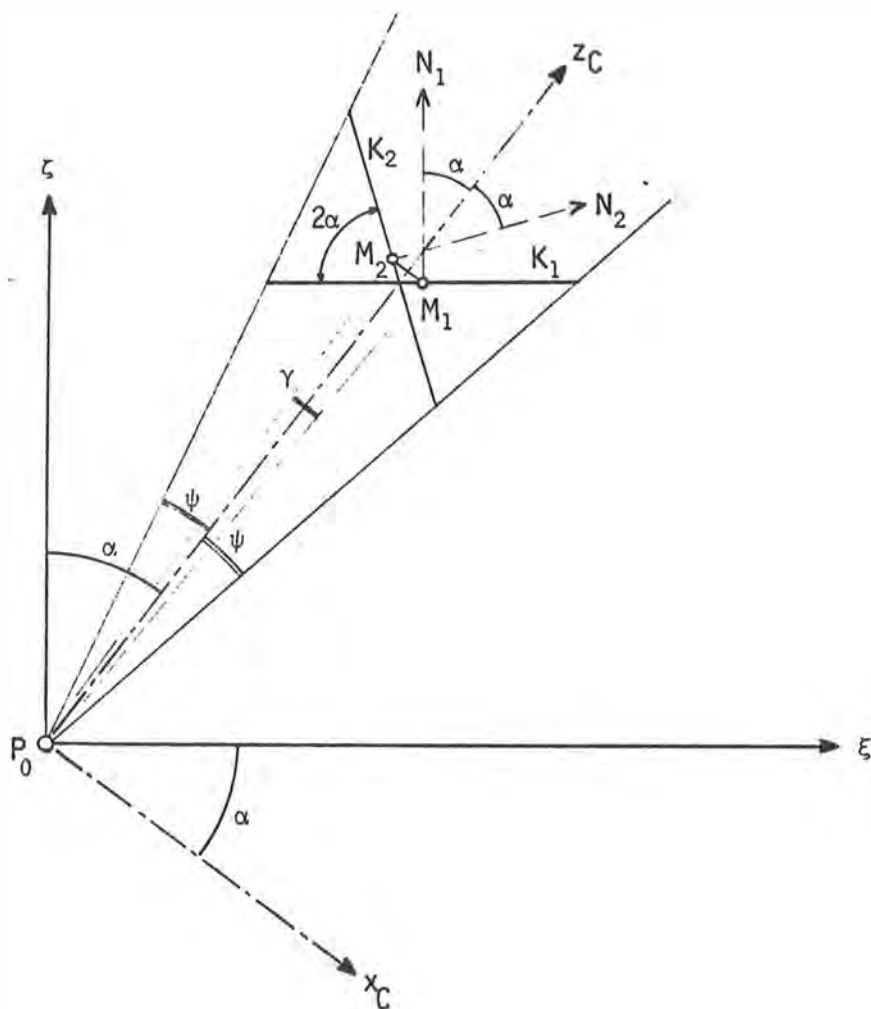


Abb. 5.: Die beiden Lösungskreise  $K$  mit ihren Normalen  $N$  aus den Kreiszentren  $M$

Je besser der Winkel  $2\alpha$  einem der Werte  $0$  oder  $\pi$  entspricht, desto schwieriger wird die Anwendung des obigen Entscheidungskriteriums.

Welche Konfigurationen sind nun in dieser Hinsicht kritisch ?

Wenn wir (55) nach  $v$  und  $\rho$  auflösen, erhalten wir:

$$v_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + t^2 \cdot (1 + \rho^2)}}{t} \quad (56)$$

und

$$\rho = \sqrt{2 \cdot \frac{v}{t} + v^2 - 1} \quad (57)$$

die Grenzwerte für das Verschwinden der Unterscheidbarkeit sind dann:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} v_+ &= \frac{0}{0} \quad \text{/ Regel von L'Hospital /} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \cdot (1 + t^2 \cdot (1 + \rho^2))^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot t \cdot (1 + \rho^2) = 0 \quad (58) \end{aligned}$$



$$\lim_{t \rightarrow 0} v_- = \frac{-2}{0} = \infty \quad (59)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho = \infty \quad (60)$$

(58) bedeutet, daß für gerade Kreiskegel die beiden Lösungen nicht unterscheidbar sind. Dies ist aber offensichtlich auch nicht wichtig, da die beiden Lösungen dann zusammenfallen. Dieser Fall tritt auf, wenn das Projektionszentrum auf der Kreisnormalen aus dem Kreiszentrum liegt.

(59) zeigt kritisches Verhalten für sehr große Kegelschiefe  $v$  an. Dies geschieht, wenn der Kreis unter einem sehr flachen Blickwinkel erscheint, d.h. wenn die Abbildungsstrahlen nahezu parallel zur Kreisebene liegen.

Diesen kritischen Fall kann man aber in den Griff bekommen, wenn man beim Vergleich der Kreisnormalenrichtung mit der Referenzrichtung zwischen Parallelität (inneres Produkt positiv) und Antiparallelität (inneres Produkt negativ) unterscheidet.

Wenn die Referenzrichtung, wie im vorigen Abschnitt geschildert, ermittelt wurde, wird der Kreis mit der parallelen Normalenrichtung akzeptiert und derjenige mit der antiparallelen verworfen.

(60) stellt den Fernkreis dar, der in der Praxis wohl nicht vorkommt.

Über das Verhalten der beiden Lösungen in der Umgebung der kritischen Werte gibt Nomogramm 1 (Anhang E) Auskunft, wo der Raumwinkel  $2\alpha$  zwischen den beiden Normalenvektoren in Abhängigkeit der Kegelschiefe  $v$  und der Kegelöffnung  $\rho$  dem Raumwinkel  $\gamma$  zu den beiden Lösungen gegenübergestellt wird (vgl. Abb. 5. ).

Jedem Punkt der  $(v, \rho)$ -Ebene im Nomogramm 1 entspricht genau ein schiefer Kreiskegel.

Im Nomogramm 2 (Anhang E) ist zusätzlich zu Nomogramm 1 die Form einiger Kegel ersichtlich gemacht, wobei jede Kegelspitze ein Wertepaar  $(v, \rho)$  repräsentiert.

Wir können daraus entnehmen, daß für Kegel unter einer  $\gamma = \gamma_{\min}$ -Linie die Unterscheidung der beiden Lösungen nicht notwendig ist, da sie zusammenfallen, wenn  $\gamma_{\min}$  so gewählt wird, daß es der angularen Auflösung der Kamera entspricht.

Weiters ist ersichtlich, daß für Kegel links der  $2\alpha = 2\alpha_{\min}$ -Linie die Auswahl der zutreffenden Lösung immer schwieriger wird.

### EIN BEISPIEL

Die oben entwickelten Formeln zur Berechnung des perspektiven Bildes des Kreismittelpunktes aufgrund lediglich des Bildes der Kreisperipherie wurden in einem Computerprogramm auf der CDC Cyber 170-720 des Interfakultären Rechenzentrums der TU Wien realisiert.

Zuerst wurden simulierte Daten verwendet.

Im Programmsystem ORIENT /3/ wurden Punkte auf Kreisen samt dem dazugehörigen Mittelpunkt definiert, deren reduzierte Bildkoordinaten (2) darauf mit Hilfe der perspektiven Transformation berechnet wurden. Im nächsten Rechenschritt wurden mit ORIENT darauf die Ellipsenkoeffizienten (3) durch Ausgleichung ermittelt. Diese Koeffizienten wurden dann auf eine Datei geschrieben, um sie - getrennt von ORIENT - in einem eigenen Testprogramm HADELL auszuwerten. Nachdem diese Testläufe - selbst mit extremen Daten (z.B. hyperbolischen Kreisbildern) - zufriedenstellend verlaufen waren, sollte natürlich auch ein praktisches Beispiel durchgerechnet werden.

Es stand leider kein Originalbild von einer Bohrplattform zur Verfügung, das zu Meßzwecken geeignet gewesen wäre. (Eine Xeroxkopie von Originalmeßbildern, die uns von Prof. Hädem dankenswerterweise zur Verfügung gestellt worden war, diente zur Ableitung der Schemazeichnung Abb. 1. )

Im Fundus des Institutes für Photogrammetrie der TU Wien befindet sich eine P31 - Überweitwinkelaufnahme, die anlässlich einer Altstadtfassadenaufnahme in Salzburg aufgenommen worden war (Abb. 6 ). Diese Aufnahme hatte seinerzeit einige Verwunderung auslöst, da auf ihr zwei kreisförmige Kanaldeckel etwa kreisförmig abgebildet sind, obwohl die Kreisebenen nicht parallel - sondern beinahe orthogonal - zur Bildebene liegen. Die Kreisebenen befinden sich in der leicht abfallenden Gehsteigebene, während die Bildebene vertikal ausgerichtet worden war. Die Abbildung der Kanaldeckel enthält neben den Bildern der Kreisumfänge leider nicht deren Mittelpunkte, die zu Kontrollzwecken von Interesse wären. Allerdings ist diese Kanaldeckelbauart dadurch ausgezeichnet, daß von ihrem Rand Rippen zum Zentrum zeigen. Solche Rippen liegen einander paarweise gegenüber, sodaß durch Geradenschnitt der dadurch definierten Durchmesser das Kreiszentrum errechenbar ist. Wird dieser Geradenschnitt nicht im Objektkoordinatensystem, sondern in der Perspektive durchgeführt, kann auf diese Weise das perspektive Bild des Kreisentrums erhalten werden.

Da bis zu acht Paare Rippen je Deckel abgebildet sind, konnte der Schnittpunkt der acht Geraden durch Ausgleichung - ebenfalls im Programmsystem ORIENT - bestimmt werden.

Am WILD Stereokomparator STK-1 wurden die Rahmenmarken der Überweitwinkel-  
aufnahme neben den Schnittpunkten der Rippen mit dem Deckelumfang gemessen.  
Im Programmsystem ORIENT wurden darauf mit Hilfe einer  
Dreiparametertransformation die gemessenen Punkte in das Kammerkoordinaten-  
system über die Rahmenmarken transformiert:

Rahmenmarken	Komparatorsystem (gemessen):		Kammerkoordinatensystem (transformiert):	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1	994.456	1010.706	57.495	.005
2	1041.890	955.212	.004	44.997
3	999.419	895.829	-57.489	.001
4	951.980	951.320	-.001	-44.997

Im Kammerkoordinatensystem ist auch die Innere Orientierung definiert:

$$(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) = (0.000, 0.000, 45.03)$$

Die transformierten und die reduzierten Bildkoordinaten lauten für den  
rechten Deckel:

Nr	$\bar{x}$	$\bar{y}$	x	y
201	47.333	-1.171	-1.051145	.025995
202	47.055	-.937	-1.044964	.020816
203	46.888	-.630	-1.041268	.013996
204	46.881	-.281	-1.041111	.006245
205	47.007	.050	-1.043905	-.001100
206	47.255	.311	-1.049411	-.006917
207	47.596	.474	-1.056990	-.010535
208	47.972	.506	-1.065340	-.011229
209	48.332	.406	-1,073326	-.009018
210	48.623	.167	-1.079801	-.003719
211	48.793	-.150	-1.083573	.003320
212	48.802	-.515	-1.083769	.011447
213	48.671	-.845	-1.080863	.018775
214	48.476	-1.067	-1.076519	.023697
215	48.057	-1.271	-1,067224	.028233
216	47.675	-1.286	-1.058746	.028555

Nachdem die transformierten Bildkoordinaten  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  mit (2) reduziert  
wurden, ergeben sich daraus die Ellipsenkoeffizienten gemäß (3) bis (5)  
in E :

$$E = \begin{pmatrix} -.885696 & .026545 & -.941273 \\ +.026545 & -1.031808 & .037190 \\ -.941273 & .037190 & -1.000000 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom folgt daraus mit (18) als (21) :

$$\Pi(\lambda) = -\lambda^3 + (-2.917504) \cdot \lambda^2 - (-1.943291) \cdot \lambda + .00037905 = 0$$

Die Lösung der kubischen Gleichung ergibt unter Berücksichtigung von (26) die Eigenwerte von  $\mathbf{E}$  :

$$\lambda_1 = -1.888247 \quad \lambda_2 = -1.029452 \quad \lambda_3 = 0.000195$$

nach Division durch  $\lambda_2$  laut (28) werden daraus die Eigenwerte von  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{C}$  erhalten :

$$\sigma_1 = 1.834227 \quad \sigma_2 = 1.000000 \quad \sigma_3 = -.000189$$

Kegelschiefe  $\nu$  laut (31) und Kegelöffnung  $\rho$  laut (32) :

$$\nu = 0.913447 \quad \rho = 0.018641 \quad \epsilon = -.165963$$

Daraus ergibt sich für die Kegelmatrix  $\mathbf{C}$

$$(6): \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -.913447 \\ 0 & 1 & 0 \\ -.913447 & 0 & .834037 \end{pmatrix}$$

Anstelle des Algorithmus (34) bis (38) ergibt sich eine Matrix der normierten Eigenvektoren von  $\mathbf{C}$  aus

(45) und (46) :

$$\mathbf{V}_C = \begin{pmatrix} -.738401 & 0 & .674362 \\ 0 & 1 & 0 \\ .674362 & 0 & .738401 \end{pmatrix}$$

Daraus der ins Eigenvektorsystem gedrehte Mittelpunkt

$$(44) : \quad \mathbf{M}_C = \begin{pmatrix} \pm .0001277 \\ 0 \\ \pm 1.354394 \end{pmatrix}$$

Bevor wir  $\mathbf{M}_C$  ins Bildkoordinatensystem weiterdrehen, müssen wir die orthonormierten Eigenvektoren von  $\mathbf{Q}$  mittels des Algorithmus (34) bis (38) berechnen, um eine Drehmatrix  $\mathbf{V}_Q$  zu erhalten.

(12) :

$$Q = \lambda^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} .860357 & -.025786 & .914344 \\ -.025786 & 1.002289 & -.036126 \\ .914344 & -.036126 & .971391 \end{pmatrix}$$

(35) :

$$\bar{Q}_1 = Q - \sigma_1 \cdot I = \begin{pmatrix} -.973870 & -.025786 & .914344 \\ -.025786 & -.831937 & -.036126 \\ .914344 & -.036126 & -.862836 \end{pmatrix}$$

(36) :

$$H_1 = \begin{pmatrix} .716520 & -.055280 & .761608 \\ -.055280 & .004265 & -.058759 \\ .761608 & -.058759 & .809534 \end{pmatrix}$$

(37) :

$$V_{Q_1}^T = \begin{matrix} k = 3 \\ \pm( .684263 & -.052791 & .727322 ) \end{matrix}$$

(35) :

$$\bar{Q}_2 = Q - \sigma_2 \cdot I = \begin{pmatrix} -.139643 & -.025786 & .914344 \\ -.025786 & .002289 & -.036126 \\ .914344 & -.036126 & -.028609 \end{pmatrix}$$

(36) :

$$H_2 = \begin{pmatrix} -.001371 & -.033769 & -.001161 \\ -.033769 & -.832029 & -.028622 \\ -.001162 & -.028622 & -.000985 \end{pmatrix}$$

(37) :

$$V_{Q_2}^T = \begin{matrix} k = 2 \\ \pm(-.040530 & -.998588 & -.034351 ) \end{matrix}$$

(35) :

$$\bar{Q}_3 = Q - \sigma_3 \cdot I = \begin{pmatrix} .860546 & -.025786 & .914344 \\ -.025786 & 1.002479 & -.036126 \\ .914344 & -.036126 & .971580 \end{pmatrix}$$

(36) :

$$H_3 = \begin{pmatrix} .972684 & -.007979 & -.915679 \\ -.007979 & .000065 & .007511 \\ -.915679 & .007511 & .862014 \end{pmatrix}$$

(37) :

$$V_{Q_3}^T = \begin{matrix} k = 1 \\ \pm( .728108 & -.005973 & -.685436 ) \end{matrix}$$

(38) :

$$V_Q = \begin{pmatrix} .684263 & -.040530 & .728108 \\ -.052791 & -.998588 & -.005973 \\ .727322 & -.034351 & -.685436 \end{pmatrix}$$

Damit können wir den ins normierte Bildkoordinatensystem gedrehten Punkt M berechnen :

$$(53) : \quad \pm \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_M^{++} = \pm \begin{pmatrix} .986232 \\ -.008097 \\ -.928258 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \pm \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_M^{+-} = \pm \begin{pmatrix} -.986058 \\ .008083 \\ .928443 \end{pmatrix}$$

Nun benötigen wir noch die zugehörigen Kreisnormalenvektoren

$$(54) : \quad N^{++} = \begin{pmatrix} -.076194 \\ -.031191 \\ .996605 \end{pmatrix} \quad N^{+-} = \begin{pmatrix} .999077 \\ -.040011 \\ -.015649 \end{pmatrix}$$

um die passende Lösung auswählen zu können.

Aus Betrachtung der Abb. 6. ergibt sich, daß N etwa parallel zur Bildebene sein muß. Daher kann  $N^{++}$  nicht in Frage kommen.

Zuletzt brauchen wir nur noch die Bildkoordinaten von  $M^{+-}$  zu berechnen

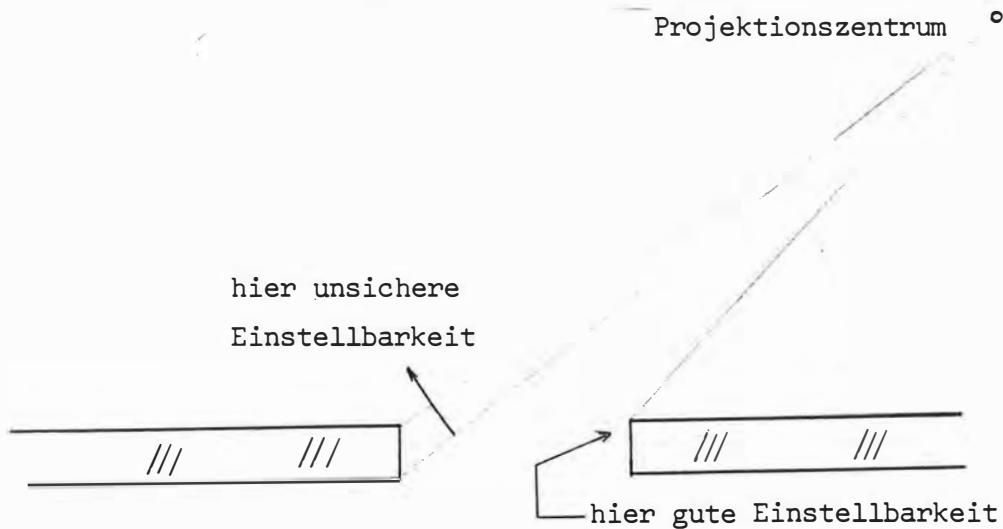
$$(43) : \quad \bar{x}_M = 47.824 \quad , \quad \bar{y}_M = -.392$$

Die Ausgleichung des überbestimmten Geradenschnitts für den Mittelpunkt 299 des Kanaldeckels laut ORIENT ergibt:

$$\bar{x}_M = 47.825 \quad , \quad \bar{y}_M = -.394$$

Die dabei auftretende Diskrepanz von 1 bzw. 2  $\mu\text{m}$  in den Koordinaten bedeutet aber aufgrund des näherungsweise bekannten Bildmaßstabs des Deckels von ca. 1:100 lediglich einen "Fehler" von weniger als 0.3 mm im Objekt. Dieser Unterschied erscheint aber nicht signifikant, wenn man erstens die Baugenauigkeit und zweitens die Punktdefinition - etwa infolge Verschmutzung - in Erwägung zieht.

Allerdings wird hiedurch auch ein Verdacht auf systematische Einstellfehler bei der Messung von Punkten an der Bohrplattform genährt. In der Annahme, daß es sich bei den kreisförmigen Ausnehmungen um Löcher in Stahlplatten handelt, ergibt sich eine in der folgenden Skizze gezeigte Einstellschwierigkeit:



Jedoch soll an dieser Stelle auf eine Abschätzung des Einflusses derartiger Einstellfehler verzichtet werden.

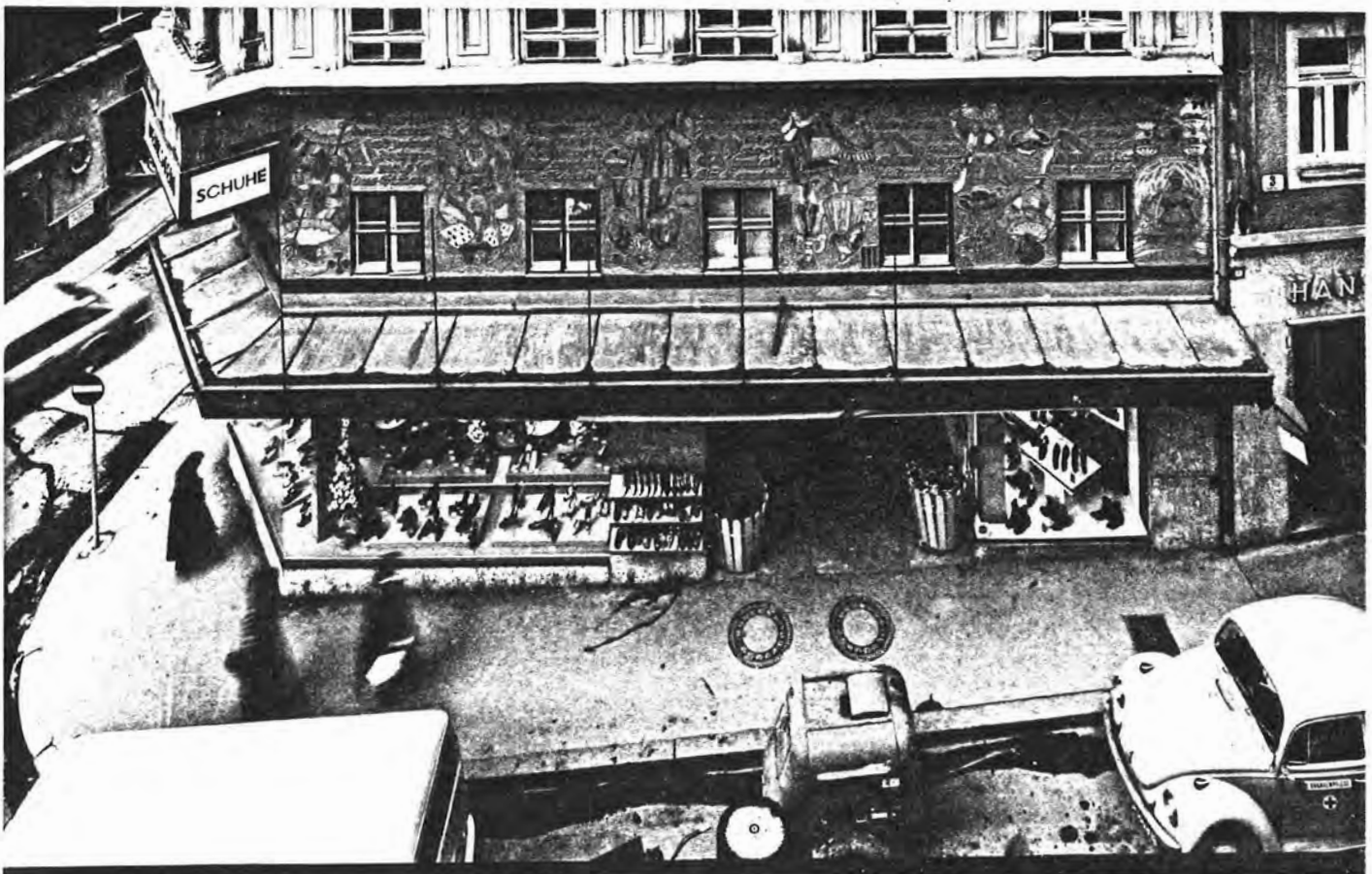


Abb. 6.: P 31 - Superweitwinkelaufnahme mit kreisförmigen Kanaldeckeln.

ANHANG A

DIE POLARE ZERLEGUNG DER MATRIX  $C$  (6)

Da  $C$  nur ein von Null verschiedenes Nichtdiagonalelement besitzt, setzen wir mit den Abkürzungen  $c_\alpha := \cos \alpha$  und  $s_\alpha := \sin \alpha$

$$V_c := \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 & +s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{a1})$$

Aus (15) und (6) bzw. (7) und der Substitution

$$1 + \epsilon := v^2 - \rho^2 \quad (\text{a2})$$

folgt dann

$$\begin{aligned} S &= V^T \cdot C \cdot V = \\ &= \begin{pmatrix} c_\alpha^2 + 2 \cdot v \cdot s_\alpha \cdot c_\alpha + s_\alpha^2 \cdot (1 + \epsilon) & 0 & \% \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\alpha \cdot c_\alpha - v \cdot c_\alpha^2 + v \cdot s_\alpha^2 - s_\alpha \cdot c_\alpha \cdot (1 + \epsilon) & 0 & s_\alpha^2 - 2 \cdot v \cdot s_\alpha \cdot c_\alpha + c_\alpha^2 \cdot (1 + \epsilon) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{a3})$$

Durch Koeffizientenvergleich des Elementes (3,1) folgt umgeformt

$$-v \cdot (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) - s_\alpha \cdot c_\alpha \cdot \epsilon = 0 \quad (\text{a4})$$

oder

$$2v \cdot \cos 2\alpha + \epsilon \cdot \sin 2\alpha = 0 \quad (\text{a5})$$

oder

$$\tan 2\alpha = -\frac{2 \cdot v}{\epsilon} \quad (\text{a6})$$



Da es für  $\alpha$  aus (a6) zwei zueinander orthogonale Lösungen gibt, wollen wir beim doppelten Winkel so lange als möglich bleiben; wir setzen:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \psi \cdot v \quad ; \quad \cos 2\alpha = -\psi \cdot \epsilon \quad (a7)$$

und erhalten damit eine Lösung von (a5). Die Bedingung

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

liefert

$$\psi^2 = \frac{1}{4 \cdot v^2 + \epsilon^2} \quad (a8)$$

damit gilt:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot v}{\pm \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}} \quad ; \quad \cos 2\alpha = \frac{-\epsilon}{\pm \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}} \quad (a9)$$

Die weiteren Koeffizientenvergleiche in (a3) ergeben dann:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_\alpha^2 + 2 \cdot v \cdot s_\alpha \cdot c_\alpha + s_\alpha^2 \cdot (1 + \epsilon) = \\ &= 1 + v \cdot \sin 2\alpha + s_\alpha^2 \cdot \epsilon = 1 + v \cdot \sin 2\alpha + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \epsilon = \\ &= 1 + \frac{\epsilon}{2} + \left( v \cdot \sin 2\alpha - \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2\alpha \right) \end{aligned} \quad (a10)$$

$$\sigma_2 = 1 \quad (a11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= s_\alpha^2 - 2 \cdot v \cdot s_\alpha \cdot c_\alpha + c_\alpha^2 \cdot (1 + \epsilon) = \\ &= 1 - v \cdot \sin 2\alpha + c_\alpha^2 \cdot \epsilon = 1 - v \cdot \sin 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \cdot \epsilon = \\ &= 1 + \frac{\epsilon}{2} - \left( v \cdot \sin 2\alpha - \frac{\epsilon}{2} \cdot \cos 2\alpha \right) \end{aligned} \quad (a12)$$

Daraus folgt mit (a9) für die Eigenwerte von  $C$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{2 \cdot v^2 + \frac{\epsilon^2}{2}}{\pm \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}}{2} \quad (-) \\ \sigma_2 &= 1 \\ \sigma_3 &= 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{2 \cdot v^2 + \frac{\epsilon^2}{2}}{\pm \sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\sqrt{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}}{2} \quad (+) \end{aligned} \quad (a13)$$

Da die Eigenwerte einer Matrix eindeutig sind, und da die scheinbare Mehrdeutigkeit in (a13) bloß eine Vertauschung der Indizes der Eigenwerte bewirkt, können wir für die weiteren Überlegungen die unteren Vorzeichen in den Formeln (a13) ignorieren (vgl. dazu auch Anhang B).

ANHANG B

BEWEIS DER MONOTONIE DER DREI EIGENWERTE VON C

Behauptung:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \geq \sigma_3$  in den Formeln (24) und (a13)

Beweis: Der Wurzelausdruck  $\sqrt[+]{4 \cdot v^2 + \epsilon^2}$  kann nie kleiner als  $|\epsilon|$  werden!

$$2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) = \epsilon + \sqrt[+]{4 \cdot v^2 + \epsilon^2} \geq 0 \implies \sigma_1 \geq \sigma_2$$

$$2 \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) = -\epsilon + \sqrt[+]{4 \cdot v^2 + \epsilon^2} \geq 0 \implies \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Behauptung:  $\sigma_2 \neq \sigma_3$

Beweis: es kann gezeigt werden, daß  $\sigma_3$  nicht positiv sein kann.

Wegen

$$\Delta(C) = -\rho^2 \leq 0$$

$$\text{und } \sigma_1 \geq \sigma_2 = 1$$

$$\text{und } \Delta(C) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

folgt mit (a13) unmittelbar die Behauptung.

q.e.d.

ANHANG C

KÖNNEN ZWEI DER DREI EIGENWERTE VON C GLEICH GROSS SEIN ?

Annahme:  $\sigma_1 = \sigma_2$

$$2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) = \epsilon + \sqrt[+]{4 \cdot v^2 + \epsilon^2} = 0$$

$$\epsilon^2 = 4 \cdot v^2 + \epsilon^2 \implies v = 0$$

Dies bedeutet, daß bei einem geraden Kreiskegel ( $v=0$ ) die ersten beiden Eigenwerte gleich sind, was aus Symmetriegründen auch einleuchtend ist, da die zu ihnen gehörigen Eigenvektoren (=Hauptachsen) orthogonal zur Kegelachse stehen (repräsentiert im Eigenvektor zu  $\sigma_3$ ).

(Aus Anhang B folgt  $\sigma_2 \neq \sigma_3$ .)

ANHANG D

DIE ALGEBRAISCHE BERECHNUNG DER NORMIERTEN EIGENVEKTOREN VON  $C$  (6)

Durch die spezielle Gestalt von  $C$  (6) ergeben sich bei der Durchführung des Algorithmus (35) bis (38) gewisse Vereinfachungen, sodaß mit relativ einfach gebauten Koeffizienten in  $V_C$  zu rechnen ist.

Zur Verkürzung der Anschreibung verwenden wir die Definition

$$\omega := \sqrt[4]{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2} \quad (d1.0)$$

$$i = 1 : \quad \bar{C}_1 = C - \sigma_1 \cdot I = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon + \omega & 0 & 2 \cdot v \\ 0 & \varepsilon + \omega & 0 \\ 2 \cdot v & 0 & -\varepsilon + \omega \end{pmatrix} \quad (d1.1)$$

$$H_1 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} (\varepsilon + \omega) \cdot (-\varepsilon + \omega) & 0 & -2 \cdot v \cdot (\varepsilon + \omega) \\ 0 & (\varepsilon + \omega) \cdot (-\varepsilon + \omega) - 4 \cdot v^2 = 0 & 0 \\ -2 \cdot v \cdot (\varepsilon + \omega) & 0 & (\varepsilon + \omega)^2 \end{pmatrix} \quad (d1.2)$$

k:=3

$$V_1 = \frac{1}{\pm \sqrt{4 \cdot v^2 + (\varepsilon + \omega)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot v \\ 0 \\ \varepsilon + \omega \end{pmatrix} \quad (d1.3)$$

$$i = 2 : \quad \bar{C}_2 = C - \sigma_2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (d2.1)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d2.2)$$

k:=2

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (d2.3)$$

$$i = 3 : \quad \bar{C}_3 = C - \sigma_3 \cdot I = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon - \omega & 0 & 2 \cdot v \\ 0 & \varepsilon - \omega & 0 \\ 2 \cdot v & 0 & -(\varepsilon + \omega) \end{pmatrix} \quad (d3.1)$$

$$H_3 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -(\varepsilon - \omega) \cdot (\varepsilon + \omega) & 0 & -2 \cdot v^2 \cdot (\varepsilon - \omega) \\ 0 & -(\varepsilon - \omega) \cdot (\varepsilon + \omega) - 4 \cdot v^2 = 0 & 0 \\ -2 \cdot v \cdot (\varepsilon - \omega) & 0 & (\varepsilon - \omega)^2 \end{pmatrix} \quad (d3.2)$$

k:=1

$$V_3 = \frac{1}{\pm \sqrt{4 \cdot v^2 + (\varepsilon + \omega)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -(\varepsilon + \omega) \\ 0 \\ -2 \cdot v \end{pmatrix} \quad (d3.3)$$

zusammengefaßt mit der Abkürzung

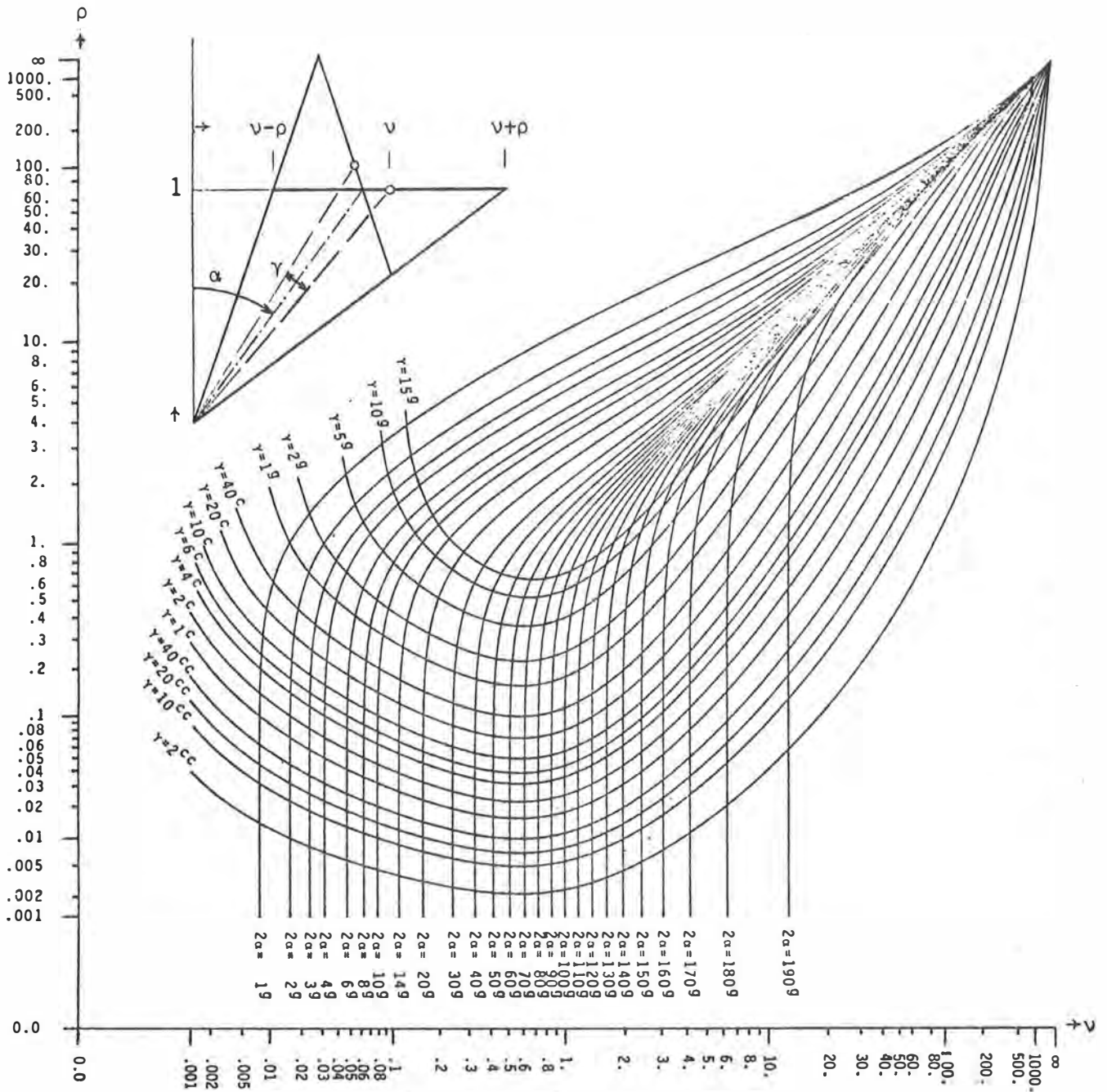
$$l := \sqrt{4 \cdot v^2 + (\varepsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2})^2} \quad (d4)$$

und den Symbolen ①, ②, ③ für das zweideutige Vorzeichen der Vektoren  $V_i$  (vgl. (37) und (38)) :

$$V_C = (V_1, V_2, V_3)$$

$$= \frac{1}{l} \cdot \begin{pmatrix} \textcircled{1} -2 \cdot v & & \textcircled{3} -(\varepsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2}) \\ 0 & \textcircled{2} 1 & 0 \\ \textcircled{1} (\varepsilon + \sqrt{4 \cdot v^2 + \varepsilon^2}) & 0 & \textcircled{3} -2 \cdot v \end{pmatrix} \quad (d5)$$

ANHANG E



Nomogramm 1 : Die Unterscheidbarkeit ( $\alpha$ ) und die Unterscheidungsnotwendigkeit ( $\gamma$ ) der beiden Lösungen für das Bild des Kreismittelpunktes.

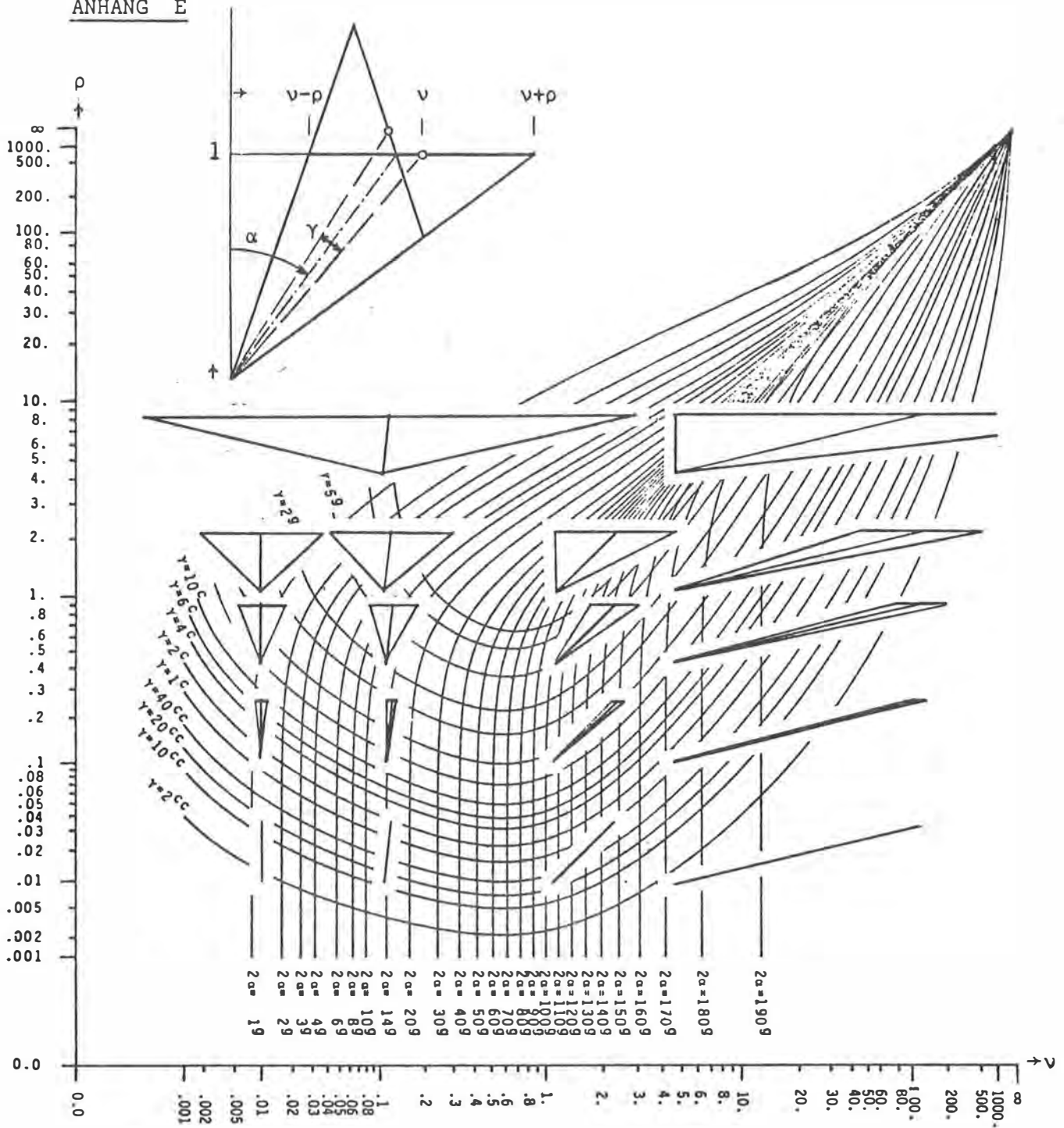
Beispiel (vgl. p 24 ff):

$v = 0.9134$ ,  $\rho = 0.0186$  liefert:

$2\alpha \approx 94^\circ$  : dies bedeutet ausgezeichnete Unterscheidbarkeit

$\gamma > 1^c$  : dieser Winkel ist größer als das Winkelauflösungsvermögen moderner Meßkammern; daher muß die zutreffende Lösung bestimmt werden.

ANHANG E



Nomogramm 2 : Nomogramm 1, ergänzt durch die Umrisse einiger schiefer Kreiskegel ( die Spitze jedes Kegels symbolisiert ein Wertepaar  $(v, \rho)$  )

LITERATURVERZEICHNIS

- /1/ Bartsch        Mathematische Formeln, VEB Fachbuchverlag  
                  Leipzig, 1968
- /2/ Fischer G.    Die Lösung von schlecht konditionierten linearen  
                  Gleichungssystemen mit Hilfe von verallgemeinerten  
                  Inversen, Bericht Nr. 2/74 des Institutes für  
                  numerische Mathematik der TU Wien, 1974
- /3/ Kager H.      Das interaktive Programmpaket ORIENT im Einsatz,  
                  Presented Paper, XIV. ISP Kongreß, Hamburg 1980
- /4/ Zurmühl R.    Matrizen und ihre technischen Anwendungen,  
                  Springer Verlag, Berlin 1964

Helmut KAGER

LEBENS LAUF

- 1950/01/20      geboren zu Wien;  
                  Eltern: Friedrich KAGER, Aloisia KAGER geb. TREIBER
- ab 1956         Besuch der Volksschule in Wien-Speising
- ab 1960         Besuch des Bundesgymnasiums Wien 13., Fichtnergasse 15
- 1968/06/10      Reifeprüfung daselbst
- ab 1968         Studium des Vermessungswesens an der  
                  Technischen Universität Wien
- 1974/03/08      Ablegung der II. Staatsprüfung
- ab 1974/07/01   Vertragsassistent am Institut für Photogrammetrie  
                  der TU Wien
- ab 1975/11/01   Universitätsassistent am Institut für Photogrammetrie  
                  der TU Wien

Bisher erschienen:

- Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1970 - 1973, Dezember 1973.
- Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendung im Vermessungswesen, 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English, Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.
- Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1973 - 1974, September 1974.
- Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Tektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.
- Heft 5 K. LEDERSTEGGER, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.
- Heft 6 F. REICHHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von  $+ 30^{\circ}$  bis  $+ 60^{\circ}$ , Oktober 1975.
- Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.
- Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.
- Heft 9 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie und Reproduktionstechnik, W.PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.
- Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC-100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik, Wien, Mai 1976.
- Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1974 - 1976, November 1976.
- Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1977.
- Heft 13 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr.h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.



- Heft 14 L.MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.
- Heft 15 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Barvir, Wien, Januar 1979, (z. Z. im Druck).
- Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1976 - 1979, Wien, November 1979.
- Heft 17 E. VOZIKIS, Die photographische Differentialumbildung gekrümmter Flächen mit Beispielen aus der Architekturbildmessung, Wien, Dezember 1979.
- Heft 18 Veröffentlichung des Institutes für Allgemeine Geodäsie (in Bearbeitung)