

ÜBER SANDDRUCK  
UND  
BEWEGUNGS-ERSCHEINUNGEN  
IM  
INNEREN TROCKENEN SANDES

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE IN DER NATURWISSEN-  
SCHAFT DER NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT DER  
EBERHARD-CARLS-UNIVERSITÄT IN TÜBINGEN

VORGELEGT VON

PHILIPP FORCHHEIMER

---

AACHEN 1883

IM SELBSTVERLAGE DES VERFASSERS

DRUCK VON R. SPIES & CO. IN WIEN.

# Inhalt.

## I. Druck des Sandes auf einen beweglichen Bodentheil.

	Seite
1. Geschichtliche Angaben . . . . .	5
2. Beschreibung der verwendeten Sandsorten . . . . .	7
3. Beschreibung der Vorrichtungen zum Messen des Druckes auf eine Bodenklappe. . . . .	7
4. Methode der Druckmessung . . . . .	10
5. Druck auf eine horizontale kreisförmige Bodenöffnung . . . . .	11
6. Druck auf horizontale rechteckige Bodenöffnungen . . . . .	14
7. Beobachtung der Bewegungen im Innern des Sandkörpers beim Absturz durch Oeffnungen . . . . .	15
8. Theoretische Ableitung des Druckes auf eine horizontale Bodenöffnung . . . . .	18
9. Uebereinstimmung der Formeln mit den gemessenen Werthen	25
10. Druck auf eine geneigte Oeffnung . . . . .	28
11. Einfluss eines aufgesetzten oder versenkten Gewichtes . . . . .	30
12. Druck gestampften Sandes . . . . .	31
13. Bodendruck bei Füllung einer Röhre mit Sand . . . . .	32
14. Deformation der Sandschichten bei diversen Cylinder-Bewegungen	32

## II. Bestimmung der Gleitfläche bei Sandmassen mit beweglicher nachgebender seitlicher Unterstützung.

1. Geschichtliche Einleitung . . . . .	33
2. Beschreibung der Versuche . . . . .	37
3. Verticale Wand, horizontale Oberfläche . . . . .	39
4. Vorgeneigte Wand, horizontale Oberfläche, horizontale Verschiebung . . . . .	41
5. Vorgeneigte Wand, horizontale Oberfläche, Verschiebung normal zur Wandrichtung . . . . .	41
6. Zurückgeneigte Wand, horizontale Oberfläche, Verschiebung horizontal oder aufwärts . . . . .	43
7. Gleitfläche gestampften Sandes . . . . .	44
8. Anhang . . . . .	44
9. Folgerung für die Berechnung von Stützmauern . . . . .	45

### III. Gleitfläche bei Sandmassen, welche seitlich gedrückt werden (Sandschub).

	Seite
1. Geschichtliche Einleitung . . . . .	47
2. Horizontale Oberfläche, verticale Wand, horizontale Verschiebung . . . . .	49
3. Vorgeneigte Wand, horizontale Oberfläche, Verschiebung normal zur Wand . . . . .	51

---

## I. Druck des Sandes auf einen beweglichen Bodentheil. \*)

### 1. Geschichtliche Angaben.

Die ersten Versuche über das mechanische Verhalten des Sandes machte 1788 Delanges in Verona, welcher auch eine Abhandlung über die Statik und Mechanik halbfüssiger Körper veröffentlichte. \*\*)

Ebenso stellte später Huber-Burnand in Genf Beobachtungen an und gelangte dabei zu folgenden Sätzen:

a) Die Ausflussgeschwindigkeit von Sand aus einem Gefässe ist von der Sandhöhe unabhängig und in der Mitte der Oeffnung grösser als an den Rändern. Die Ausflussmenge wird durch eine Belastung des Sandes nicht vergrössert.

b) Sand, welcher in einen Arm einer gebogenen Glasröhre gegossen wird, steigt im andern Arme nicht empor.

c) Ausgeflossener Sand stellt sich gewöhnlich unter einem Winkel von  $30^{\circ}$  bis  $33^{\circ}$  mit der Horizontalen ein, selten unter  $35^{\circ}$ . Es ist dieses der Winkel, welcher gegenwärtig mit dem Namen: „Neigungswinkel der natürlichen Böschung“ bezeichnet wird und der dem Reibungswinkel von Sand auf Sand gleich ist.

d) Wird eine gebogene Röhre theilweise mit Quecksilber gefüllt und dann in einen Arm Sand nachgegossen, so steigt das Quecksilber im anderen Arme nicht in die

---

\*) Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereines, 1882, S. 111 u. f.

\*\*) So entnimmt der Verfasser, dem die Schrift selbst unzugänglich blieb, den Annales des ponts et chaussées, 1835, 2 Sem., S. 179.

Höhe. \*) Thatsächlich ist der Bodendruck des Sandes jedoch nicht Null, sondern nur zu gering, um grössere Niveauunterschiede zu bewirken.

Versuche von Moreau, bei welchen der Druck gemessen wurde, der eine bewegliche Bodenklappe zum Absturz bringt; zeigten, dass bei Anwendung trockenen Sandes dieser Druck von der Höhe der Schüttung und einer eventuellen Belastung des Sandes im Wesentlichen unabhängig sei. Leider hat es Moreau unterlassen, die Grösse dieser Drucke anzugeben.

Moreau und Gauzence schlossen aus weiteren Beobachtungen, dass sich nasser Sand ähnlich verhalte, ebenfalls ohne diese Mittheilung durch Zahlenangaben zu vervollständigen.

Niel, der mit nassem Sande und Ackererde experimentirte, fand hingegen, dass eine Belastung den Bodendruck sehr bedeutend erhöhe, sobald die Oeffnung eine hinreichende Grösse besitzt. \*\*) Hier muss bemerkt werden, dass das Verhalten von trockenem und nassem Sande jedenfalls ein ganz verschiedenes ist; zu technischen Zwecken, wenn es sich um den Nachweis der Tauglichkeit von Sandfunderungen handelt, sind Versuche mit nassem Material gewiss mit am Platze, einen Einblick in die mechanischen Vorgänge können aber zunächst nur Beobachtungen an trockenem Sande gewähren.

Versuche, welche Hagen vor etwa fünfzig Jahren mit trockenem Sande durchführte, bestätigen die Unabhängigkeit des Bodendruckes von der Höhe. \*\*\*)

Endlich veröffentlichte, nachdem über die Arbeiten, welche dieser Schrift zu Grunde liegen, eine vorläufige Mittheilung im Aachener Bezirks-Verein des Vereins deutscher

\*) Annales de chimie et de physique, 1829, p. 129 u. f.

\*\*) Annales des ponts et chaussées, 1835, 2 Sem. pag. 171 u. f.

\*\*\*) Pogg. Ann. 1833, Bd. XXVIII S. 17 und 297 u. f., sowie Handbuch der Wasserbaukunst, II. Bd. §. 33.

Ingenieure bereits erfolgt war\*), Engesser das Ergebniss von Druckmessungen, welche er bei trockenem Sande vorgenommen hatte.\*\*)

## 2. Beschreibung der verwendeten Sandsorten.

Zu den Versuchen wurde trockener Rheinsand, Bleischrot und sogenannter Goldstreusand verwendet. Das specifische Gewicht des trockenen Rheinsandes an und für sich betrug 2·65; lose geschichtet ergab sich für die Schüttung 1·43 bis 1·46 und festgestampft 1·59 bis 1·60, so dass im Folgenden das specifische Gewicht zu  $\sigma = 1·445$  angesetzt erscheint. Der Neigungswinkel der natürlichen Böschung wurde an sorgfältig aufgeschütteten Sandkegeln zu  $33^{\circ} 40'$  bestimmt. Der Sand war vollständig cohäsionslos und anscheinend sehr rein, doch ergab ein zwei Stunden andauerndes Schlämmen zweier Proben Gewichtsverluste von 1·20% beziehungsweise 1·37%.

Als Material von geringem Reibungswinkel diente Bleischrot (Vogeldunst) mit einem specifischen Gewichte der Schüttung von 6·91 und einem Neigungswinkel der natürlichen Böschung von  $26^{\circ} 00'$ .

Zur Controle der im Folgenden entwickelten Formeln eignete sich ferner ein aus Metallplättchen bestehender Goldstreusand, welcher die steile Neigung der natürlichen Böschung von  $42^{\circ} 50'$  besass und nur in sehr loser Schüttung vom specifischen Gewichte 0·86 verwendbar war, da sich sonst Cohäsionserscheinungen zeigten.

## 3. Beschreibung der Vorrichtungen zum Messen des Druckes auf eine Bodenklappe.

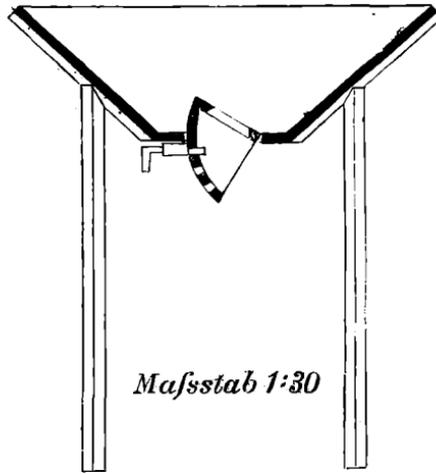
Es wurden die Versuche bei grösseren und kleineren Oeffnungen getrennt durchgeführt und dienten hiezu je ein

\*) Bericht des Aachener Bezirks-Vereines deutscher Ingenieure über die Vereins-Versammlung vom 3. August 1881. — „Wochenschrift des Vereines deutscher Ingenieure“ vom 11. Februar 1882.

\*\*) „Deutsche Bauzeitung“ vom 25. Februar 1882. „Ueber den Erddruck gegen innere Stützwände (Tunnelwände)“.

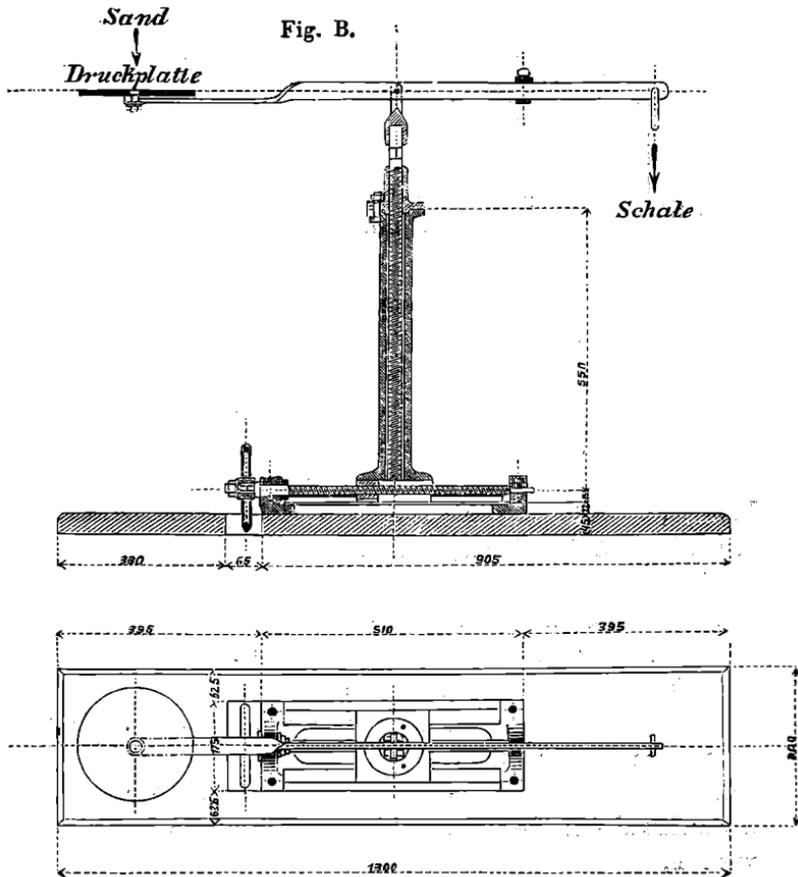
Gefäss zur Aufnahme des Sandes und eine Wage zur Druckmessung.

Fig. A.



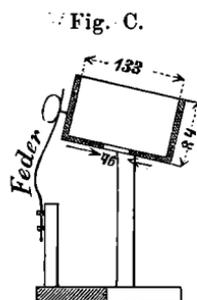
Das grössere Gefäss (siehe Fig. A) war ein Holzkasten in Gestalt einer abgestumpften Pyramide von quadratischen Grundflächen, und zwar betrug die Seitenlänge der oberen Basis  $160\text{cm}$ , die der unteren  $50\text{cm}$  und die Höhe  $51\text{cm}$ . Die untere Grundfläche selbst bestand aus einem festen äusseren Rahmen und einer inneren quadratischen Platte von  $36\text{cm}$  Seitenlänge, welche an einer ihrer Kanten durch ein Charnier an den Rahmen befestigt war, so dass sie sich um einen beliebigen Winkel in den Kasten hineindrehen liess, während die anderen drei Plattenseiten Abschlussflächen — zwei Kreisabschnitte und ein Cylindermantelstück — trugen, so dass seitlich von der Platte kein Sand herunterrutschen konnte. Für die Feststellung der Platte unter der gewünschten Neigung war durch Löcher im Cylindermantelstück und einen Dübel gesorgt, und endlich dienten Leinwandlappen zur Abdichtung der Fugen zwischen dem beweglichen Bodentheile und dem Rahmen.

In der quadratischen Platte befand sich eine kreisförmige Oeffnung von 20<sup>cm</sup> Durchmesser, die sich durch Einlegen zweier hölzerner Ringe auf 15<sup>cm</sup>, beziehungsweise 10<sup>cm</sup> Durchmesser reduciren liess; die Brettstärke der Platte und der Ringe mass 2<sup>cm</sup> und die Oeffnungsränder waren unter 45° conisch abgeschragt.



Die zugehörige Wage, wie sie durch Fig. B dargestellt wird, besass einen eisernen, gleicharmigen Wage-

balken, welcher an einem Ende eine runde Platte trug, auf welcher der Sand zu drücken hatte, während am anderen Ende die Schale zur Aufnahme der Gewichte hing. Eine horizontale Verschiebschraube und die mit Gewinden versehene Wagsäule ermöglichten die genaue Aufstellung, und das Gleichgewicht für die betreffende Neigung des Wagebalkens liess sich durch Belastung der Wageschale und Verschiebung eines Laufgewichtes herstellen. Die zunächst verwendete Druckplatte der Wage war grösser als die Oeffnung des Sandkastens; später wurde mit einer kleineren Platte gearbeitet, welche durch die Bodenöffnung von 20<sup>cm</sup>



Durchmesser durchkonnte, und statt der oben erwähnten hölzernen Ringe fungierten dann dünne Eisenplatten mit den betreffenden Oeffnungen.

Der kleinere Sandkasten (Fig. C) war parallelepipedisch, 84<sup>mm</sup> hoch, 133<sup>mm</sup> breit, 170<sup>mm</sup> lang, liess sich um eine horizontale Achse drehen, sowie unter verschiedenen Neigungen festklemmen, und sein Boden enthielt eine Oeffnung von 126<sup>mm</sup> Länge auf 46<sup>mm</sup> Breite, innerhalb welcher die Druckplatte der Wage frei spielen konnte. Sollte der Druck auf eine bestimmte Bodenöffnung gemessen werden, so wurde auf den Kastenboden eine Weissblechplatte gelegt, welche mit dem betreffenden Loch versehen war. Die Wage war ähnlich construiert, wie die oben beschriebene, nur in den Dimensionen viel kleiner und ohne verticale und horizontale Schraube; dafür war die Wagsäule in einer auf drei Füssen stehenden Hülse verschiebbar und konnte mit einer Stellschraube in der beabsichtigten Höhenlage festgeklemmt werden.

#### 4. Methode der Druckmessung.

Zunächst wurde die Wagschale immer genügend belastet und dann vorsichtig das Gewicht vermindert, bis der

Wagbalken kippte und der Sand abstürzte. Der kleinere Apparat erhielt im Allgemeinen nach jeder Messung eine frische Füllung; bei dem grösseren wurde meistens gleich nach erfolgtem Absturze die Druckplatte gegen den Sand gedrückt und von Hand hin- und hergeschoben, bis sie dicht gegen den Kastenboden schloss, also kein Sand mehr durchrutschte, so dass nur der an der Sandoberfläche entstandene grössere oder kleinere Trichter wieder aufgefüllt werden musste. Hierbei zeigte es sich, dass bei dem Hin- und Herschieben ein stärkeres Gegenpressen der Druckplatte eine Erhöhung des Bodendruckes zur Folge hatte, so dass es wahrscheinlich ist, dass der kleinere Apparat die genaueren Resultate lieferte.

Bei den Versuchen mit Bleischrot veranlasste die kleinste Erschütterung den Absturz, so dass ein Abheben der Gewichte vermieden werden musste. Nach dem ähnlichen Vorgange Hagen's wurde die Wagschale durch einen Trichter ersetzt, welcher mit Sand gefüllt war und eine Oeffnung besass, durch die der Sand in einem feinen Strahle auslief, bis der Absturz erfolgte, worauf der Auslauf sofort unterbrochen und das Gewicht des zurückgebliebenen Trichter-Inhaltes bestimmt wurde.

Einige auf diese Weise ausgeführte Controlwägungen zeigten, dass beim Rheinsand ein Abheben der Gewichte von Hand gestattet sei.

##### 5. Druck auf eine horizontale kreisförmige Bodenöffnung.

Aus der Beobachtung, dass der Druck von der Höhe der im Gefässe befindlichen Sandmenge unabhängig ist, folgt, dass er dem Gewichte eines Körpers von bestimmter Gestalt entsprechen muss, welcher die Bodenöffnung zur Basis hat, oder mit anderen Worten, dass er mit der dritten Potenz des Durchmessers  $d$  der Bodenöffnung wachsen muss, — es stimmt dieses mit Hagen's Auffassung überein. Divi-

teilt man den gemessenen Druck durch  $d^3$  (wobei  $d$  in Centimetern ausgedrückt werden soll), so erhält man den Druck auf eine Oeffnung von 1<sup>cm</sup> Durchmesser.

Die Versuche ergaben folgendes Resultat:

Rheinsand.

Tab. 1.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes Gramm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser Gramm
20	51	38	3213	0,402
"	41	21	3086	0,386
"	31	20	3314	0,414
15 (Holzring)	51	59	1331	0,394
" "	41	20	1399	0,415
" "	31	20	1324	0,392
15 (Blech)	51	20	1377	0,408
" "	31	20	1302	0,386
10 "	51	20	371	0,371
" "	31	20	378	0,378
2,66	8	20	7,335	0,390
2,12	8	20	3,920	0,411
Summe...		301		0,3956

Bleischrot.

Tab. 2.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes Gramm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser Gramm
2,12	8	2	16,67	
"	7	2	17,19	
"	5 bis 6	2	18,92	
"	4	2	17,71	
"	3	2	18,94	
Summe...		10	17,886	1,877

Goldstreusand.

Tab. 3.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes Gramm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser Gramm
2,66	6	10	4,410	0,234

Hier sollen auch die einzigen hierher gehörigen älteren Versuche, für welche Zahlenangaben vorliegen, diejenigen Hagen's — auf metrisches Maass umgerechnet. — wieder gegeben werden.

Sie betreffen eisenhaltigen Streusand, welcher gereinigt benutzt wurde und bei der Reinigung das specifische Gewicht der Schüttung von 2·30 auf 2·37 erhöhte\*), und dessen Reibungswinkel sich einerseits als Neigungswinkel der natürlichen Böschung zu 32° 30', andererseits bei Messung mittelst über einander gleitenden Kasten zu 23° 51' bis 26° 25' ergab.\*\*)

Die resultirenden Daten sind die folgenden:

Eisenhaltiger Streusand. *Tab. 4.*

Durchmesser der Oeffnung cm.	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser Gramm
0,991 } 1,901 }	0,664 bis 0,750

Endlich hat Engesser den Druck auf eine runde Klappe von 5<sup>cm</sup> Durchmesser bestimmt und wie es scheint den kleinsten von ihm beobachteten Druck angegeben, welches Verfahren deswegen von ihm zu befolgen war, weil es sich in seiner Arbeit um eine Theorie zur Berechnung des kleinsten möglichen Bodendruckes handelte. Der betreffende Streusand hatte einen Reibungswinkel von 36° 30' und ein specifisches Gewicht 1·5.

Streusand. *Tab. 5.*

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Minimaldruck Gramm	Entsprechender Minimaldruck bei 1 cm. Durchmesser Gramm
5	30	34	0,272

\*) Handbuch der Wasserbaukunst, Bd. 2, §. 33.

\*\*) Winkler, neue Theorie des Erdruckes, S. 123, bevorzugt den Werth von 32° 30'.

### 6. Druck auf horizontale rechteckige Bodenöffnungen.

Die Messungen erfolgten auf dieselbe Weise, wie früher bei kreisförmiger Öffnung, und das betreffende Viereck war jedesmal in einer Weissblechplatte eingeschnitten.

Die Resultate sind in Tabelle 6 zusammengestellt;  $s$  und  $s_1$  bedeuten die Seitenlängen des Rechteckes.

Tab. 6.

$s$ in cm.	$s_1$ in cm.	Höhe der Schüttung cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Worth des Druckes gramm	Mittlerer Gesamtdruck gramm
10	10	51	20	515	} 512
"	"	41	20	515	
"	"	31	20	506	
1,97	5,86	6 bis 8	8	15,82	} 15,59
"	"	5 " 6	20	15,50	
2,10	4,11	5 " 8	20	12,32	
2,02	2,04	5 " 8	20	4,54	

Die ähnlichen Engesser'schen Versuche können hier angeführt werden, wieder mit dem Bemerkten, dass Engesser nicht den mittleren Werth seiner Messungen, sondern jedesmal den kleinsten von ihm beobachteten Druck anzugeben hatte.

Engesser's Beobachtungen lieferten:

Tab. 7.

$s$ in cm.	$s_1$ in cm.	Höhe der Schüttung cm.	Minimaldruck Gramm
20	4	40	150
"	"	15	150
"	"	6	180
"	2,2	40	52*)

\*) Zu diesen 52 Gramm bemerkt Engesser: „nach Abzug des aus dem Kasten herausgetretenen Sandgewichtes.“

Zu erwähnen ist, dass längs der Seite  $s$  Sand an Sand grenzte, während längs  $s_1$  Glastafeln aufgestellt waren.

### 7. Beobachtung der Bewegungen im Innern des Sandkörpers beim Absturz durch Oeffnungen.

Bei den Druckversuchen zeigte es sich, dass man die Klappen etwas von Hand senken durfte, ohne dass sich die Oberfläche irgendwie bewegte. Diese auffällige Erscheinung erweckte den Wunsch, die Bewegungen im Innern der Sandmasse selbst zu verfolgen und zu diesem Zwecke diente die nachstehend geschilderte Methode. Es wurde ein Theil des Rheinsandes in seinem natürlichen Zustande belassen, und eine andere Partie mit Fuchsin roth gefärbt; nun erfolgte die Aufschüttung von Sandkörpern, welche aus abwechselnd rothen und ungefärbten Schichten bestanden, in der Weise, dass auf eine Blechunterlage ein Eisenring gelegt und dieser z. B. mit ungefärbtem Materiale vorsichtig gefüllt und vollgestrichen wurde. Auf diesen ersten Ring kam ein zweiter, welcher dann eine rothe Füllung erhielt, ein dritter mit ungefärbtem Sand u. s. w. Die Blechunterlage selbst trug ein nach unten vorspringendes Mundstück von kreisförmigem Querschnitte, welches zunächst mit einem Stöpsel derart verschlossen war, dass die obere Stöpselfläche bündig mit der Blechoberfläche abschloss. Sollte der Sand in Bewegung kommen, so wurde der Stöpsel etwas gesenkt — nicht etwa ganz herausgezogen — und die trockene Sandmasse deformirte sich. Zur Fixirung der veränderten Schichten musste dann eine Flüssigkeit eingegossen werden, die nach einiger Zeit erstarrt. Nachdem Verschiedenes z. B. Wasserglas, Gummi versucht worden war, fiel die Wahl auf geschmolzenes Paraffin. Auch Wachs wäre anwendbar; erschwert aber etwas das Arbeiten in Folge seines höheren Schmelzpunktes. Nach geschehener Erkaltung liess sich der festgewordene Sandkörper entzwei schneiden oder sägen und die neuen Schichten lagen in Natur vor. Da der Einguss des Paraffins die Oberfläche

manchmal ein wenig verletzte, so wurde zuweilen nach der Stöpselsenkung, aber noch vor dem Eingiessen eine oberste Schutzschichte aufgebracht.

Aehnliche Versuche hat, wie der Verfasser seitdem erfahren, Tresca in den „Annales du conservatoire impérial des arts et métiers“, 1865 mitgetheilt und dabei constatirt, dass sich feste Körper unter hohem Drucke und auch Sand unter dem Einflusse des eigenen Gewichtes beim Ausflusse ähnlich wie Flüssigkeiten verhalten, dass nämlich die früher horizontalen Schichten sich in langgestreckte, parallele, cylindrische oder kegelförmige Flächen verwandeln; eine nähere Untersuchung der Sandbewegung scheint übrigens nicht in der Absicht Tresca's gelegen zu haben und hätte er wohl zu diesem Behufe einige Präparate mit kleinerer Stöpselsenkung, als er sie anwandte, herstellen müssen, demgemäss wurde auch keine Abbildung der Sandkörper veröffentlicht.\*)

Aus den Fig. 1, 2 u. 3 der Tafel, welche die Erscheinung in natürlicher Grösse wiedergeben, geht hervor, dass sich bei einer Senkung des Stöpsels ein lothrechter Cylinder in Bewegung setzt, der die Mundstücköffnung zur Basis hat. Nach Fig. 4 bleibt die cylindrische Gleitfläche auch dann noch vertical, wenn die Unterlage und das Mundstück geneigt werden, wenn sich also der Propfen selbst nicht mehr in lothrechter Richtung bewegt. Die Grösse der Senkung der einzelnen Schichten nimmt von unten nach oben ab. — bei geringer Verschiebung des Stöpsels bleiben die oberen Schichten unverändert (Figuren 2 und 3), indem die niedergehende Sandsäule ihr Volumen entsprechend vermehrt und deren untere Lagen manchmal bei der Deformation

---

\*) Vergl. auch v. Obermayer, Versuche über den Ausfluss plastischen Thones. Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe der kais. Akademie d. Wissenschaft, LVIII Bd., II. Abth., Jahrg. 1868; S: 737 bis 755, ferner Tresca's Mittheilungen, Comptes-rendus LIX S. 754—758 LX S. 398, LXIV S. 809, LXVI S. 263—270. Kick, Wochenschrift des öst. Ing. u. Arch.-Ver. 1877, S. 181.

ihren Inhalt auf das  $\frac{4}{3}$ fache erhöhen. Wird der Durchmesser der Ringe verkleinert, wird beziehungsweise die Ringumhüllung durch eine Glasröhre ersetzt, und im Uebrigen, so verfahren wie früher, so entstehen Fig. 5 und 6.

Auf etwas abweichende Art, wie obige Figuren, wurde Fig. 7 erhalten, indem bei derselben unter der mit einer Oeffnung versehenen Bodenplatte ein Schieber rasch vorbeigezogen wurde, welcher eine correspondirende Oeffnung besass, so dass Fig. 7 die Fallgeschwindigkeiten wiedergibt. Uebrigens wurde auch ein Versuch in der Weise gemacht, dass die durchlöchernte Bodenplatte auf einer zweiten Unterlage aufsass und nun die erste Platte mit allen darüber befindlichen in die Höhe gehoben wurde, so dass der ausströmende Sand zwischen beiden Platten einen Kegel bildete.

Bei Fig. 8 endlich, wurde der Sand zuerst mit Paraffin übergossen und dann der Stöpsel vollständig herausgezogen; bei Zuguss von viel Paraffin fiel ein cylindrisches Stück aus der unteren sehr durchnässten Sandpartie heraus und das übrige blieb stehen.

Bei viereckiger Oeffnung sind die Erscheinungen ähnlich wie bei kreisförmiger. Die Anwendung langgestreckter Rechtecke würde einen Fall betreffen, der sein Analogon in grossem Massstabe bei Niedergang der Zimmerung von Bergwerksstollen wiederfindet, wobei allerdings der Umstand erwähnt werden muss, dass das Stollengebirge häufig aus nassem Sande oder Erde, aber äusserst selten aus trockenem Sande besteht. Der Versuch wurde (Fig. 9) vorgenommen, indem ein vierkantiger Holzstab abwechselnd mit rothen und ungefärbten Schichten umgeben und überdeckt und sodann herausgezogen wurde. Wieder setzte sich bloss die Masse in Bewegung, welche lothrecht über dem Stollen auflag; es erfolgte ein Firstenbruch, das Hangende kam nieder und die Stösse blieben stehen.

Bei einem ähnlichen Experiment (Fig. 10) wurde der um den vierkantigen Stab geschüttete Sand vor der Defor-

mation mit Paraffin getränkt und dann der Stab herausgezogen, worauf sich der nasse Sand frei trug, so dass ein kleiner Stollen in einer cohärirenden, seitlich von festen Wänden begrenzten Masse hergestellt war. Nun wurde mit einem Holzklotz sehr stark auf die Sandoberfläche gedrückt und da zeigte es sich, dass die Firste ziemlich unversehrt blieb, die Stöße hingegen sich horizontal gegen die Stollenmitte zu bewegten und zwar an der Sohle früher als an der Decke, bis der Stollen theilweise mit locker gefügtem Material angefüllt war; im geeigneten Augenblicke wurde mit dem Niederpressen aufgehört und das ganze erkalten und erstarren gelassen.

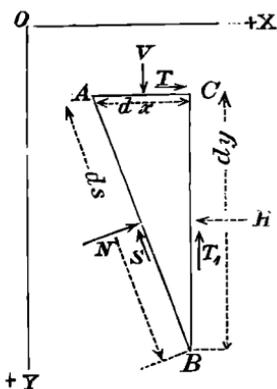
Es zeigt endlich Fig. 11 den Auslauf aus einem seitlichen Loche, welches durch ein Brettchen verschlossen gewesen war und durch in-die-Höhe-ziehen des Brettchens geöffnet wurde.

#### 8. Theoretische Ableitung des Druckes auf eine horizontale Bodenöffnung.

Gelegentlich ihrer Untersuchungen über den Seitendruck der Erde haben Lévy, Rankine, Mohr, Considère und Winkler über die im Inneren einer Erdmasse wirkenden Kräfte eine Theorie aufgestellt, welche auch hier als Grundlage dienen soll.

Betrachtet man ein im Inneren des Sandkörpers gelegenes prismatisches Element mit der Basisfläche  $ABC$ , so wirken auf dessen Seitenflächen  $dx$ ,  $dy$  und  $ds$  pro Flächeneinheit Druckkräfte  $H$ ,  $V$  und  $N$ , sowie Schubkräfte  $T$ ,  $T_1$  und  $S$ . Der Winkel  $ACB$  sei ein rechter und  $\angle BAC = \alpha$ . Dann gilt so lange noch eben Gleichgewicht in der Sandmasse herrscht

$$T = T_1$$



sonst erfolgt eine Drehung um den Mittelpunkt von  $ds$ . Das Gleichgewicht gegen Verschiebung in der Richtung senkrecht auf  $AB$  und parallel zu  $AB$  erfordert:

$$N ds = (H dy - T dx) \sin \alpha + (V dx - T dy) \cos \alpha = 0$$

$$S ds = (-H dy + T dx) \cos \alpha + (V dx - T dy) \sin \alpha = 0$$

$$\text{oder da } \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \text{ und } \frac{dx}{ds} = \cos \alpha \text{ ist,}$$

$$N = \frac{V+H}{2} + \frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha \quad \dots 1)$$

$$S = \frac{V-H}{2} \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha \quad \dots \dots \dots 2)$$

woraus sich ergibt:

$$\left(N - \frac{V+H}{2}\right)^2 + S^2 = \frac{(V-H)^2}{4} + T^2 \quad \dots 3)$$

für den Winkel  $\delta$ , den die Resultirende  $R$  von  $S$  und  $N$  mit einer auf  $AB$  errichteten Senkrechten einschliesst, gilt:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{S}{N} = \frac{\frac{V-H}{2} \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha}{\frac{V+H}{2} + \frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha} \quad 4)$$

Wird nun der Neigungswinkel der natürlichen Böschung des Sandes mit  $\varphi$  bezeichnet und nimmt man an, dass der Reibungs-Coëfficient von Sand auf Sand im Innern derselbe sei, wie an der Oberfläche, eine Voraussetzung die durchweg üblich, deren Richtigkeit aber allerdings noch nicht erwiesen ist\*), so kann  $\delta$  im Maximum gleich  $\varphi$  werden und sobald  $\delta$  den Werth  $\varphi$  überschreitet, erfolgt eine Rutschung längs der betreffenden Fläche, welche damit zur Gleitfläche wird. Für das Maximum von  $\varphi$  muss

$$\frac{d \operatorname{tg} \delta}{d \alpha} = 0$$

\*) Vgl. Hagen's oben citirten Aufsatz in Pogg. Ann., sowie Löwe, alte und neue Versuche über Reibung und Cohäsion von Erdarten, München, 1372.

werden, oder da  $N$  nicht unendlich gross werden kann, muss gelten:

$$N dS - S dN = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left( \frac{V+H}{2} + \frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha \right) [(V-H) \cos 2\alpha - 2 T \sin 2\alpha] - \left( \frac{V-H}{2} \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha \right) [-(V-H) \sin 2\alpha - 2 T \cos 2\alpha] = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{(V+H)(V-H)}{2} \cos 2\alpha + \frac{(V-H)^2}{2} - (V+H) T \sin 2\alpha + 2 T^2 = 0$$

oder

$$\frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha = - \frac{(V-H)^2 + 4 T^2}{2(V+H)} \quad 5)$$

Berücksichtigt man neben dieser Gleichung noch die Gleichungen (1) und (3) und bezeichnet man die für die Gleitfläche geltenden Werthe von  $N$  und  $S$  mit  $N_1$  und  $S_1$  so folgt

$$N_1 = \frac{V+H}{2} - \frac{(V-H)^2 + 4 T^2}{2(V+H)} \quad \dots \dots \dots 1a)$$

und

$$\left( \frac{(V-H)^2 + 4 T^2}{2(V+H)} \right)^2 + S_1^2 = \frac{(V-H)^2 + 4 T^2}{4} \quad \dots 3a)$$

woraus sich ergibt

$$N_1 = \frac{2(VH - T^2)}{V+H} \quad \dots \dots \dots 6)$$

$$S_1 = \pm \frac{\sqrt{[(V-H)^2 + 4 T^2](VH - T^2)}}{V+H} \quad \dots 7)$$

wobei der zweite Differentialquotient zeigt, dass in Gleichung (7) das Zeichen  $+$  einem Maximum  $\delta = +\varphi$ , und das Zeichen  $-$  einem Minimum  $\delta = -\varphi$  entspricht.

Es folgt aus (6) und (7)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S_1}{N_1} = \sqrt{\frac{(V-H)^2 + 4 T^2}{4(VH - T^2)}} \quad \dots \dots \dots 8)$$

$$\text{Anm: Es ist } \cos \varphi = \frac{2 \sqrt{VH - T^2}}{V + H} \dots 9)$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(V - H)^2 + 4 T^2}}{V + H} \dots \dots \dots 10)$$

Ist nun die Seitenfläche  $BC$  (parallel zur  $y$  Axe) selbst eine Gleitfläche, so wird  $S_1$  identisch mit  $T$  und  $N_1$  mit  $H$ .

Es gilt dann

$$\text{tg } \varphi = \frac{T}{H} \dots \dots \dots 11)$$

und aus (6) wird

$$H = \frac{2 VH - 2 H^2 \text{tg}^2 \varphi}{V + H}$$

woraus hervorgeht\*), dass

$$\text{tg}^2 \varphi = \frac{V - H}{2 H} \dots \dots \dots 12)$$

ferner

$$H = \frac{V}{1 + 2 \text{tg}^2 \varphi} \dots \dots \dots 13)$$

und

$$T = \frac{V \text{tg } \varphi}{1 + 2 \text{tg}^2 \varphi} \text{ ist } \dots \dots \dots 14)$$

Es soll nun angenommen werden, dass die  $x$ -Axe horizontal und in der ebenfalls horizontalen Sandoberfläche liege; ist dann das spezifische Gewicht des Sandes gleich  $\sigma$ , so ist der Verticaldruck pro horizontale Flächeneinheit bei gleichmässiger Sandunterstützung für einen Punkt mit der Tiefenordinate  $y$

$$V = y \sigma \dots \dots \dots 15)$$

und an einem solchen Punkte würde, wenn der Verticaldruck daselbst ungeändert bleibt, jedoch eine lothrechte

---

\*) Diese Einsetzung hätte schon früher vorgenommen werden können, wodurch die Rechnung etwas einfacher, aber der Gang der Ableitung undeutlicher geworden wäre.

Gleitung eintritt, längs dieser Gleitfläche pro Flächeneinheit ein verticaler Schub wirken von der Grösse

$$T = \sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \dots \dots \dots 16)$$

Geht man nun auf den Fall der Bestimmung des Druckes auf eine bewegliche Bodenklappe ein, so ist durch die Versuche bereits constatirt, dass sich beim Absturze eine verticale cylindrische Gleitfläche bildet, welche den Umfang der Bodenöffnung zur Leitlinie hat. Innerhalb des Cylinders ist nach den Versuchen der Verticaldruck kleiner, als es der Sandhöhe bei gleichmässiger Unterstüttung entsprechen würde und ausserhalb des Cylinders muss der Druck entsprechend grösser sein, da ja das Gesamtgewicht des Sandes durch die Gegenreaction der gesammten Unterstüttung wieder aufgehoben werden muss. Einer verticalen Gleitfläche innerhalb des Umfanges würde ein  $T$  entsprechen welches kleiner, hingegen ausserhalb des Umfanges ein  $T$ , welches grösser als  $\sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$  ist. Es ist also wahrscheinlich, dass längs der Gleitfläche ein Schub wirkt von der Grösse (pro Flächeneinheit)

$$T = \sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Nunmehr kann nach dem Beispiele Hagen's fortgeföhren werden. Hat der Umfang der Bodenklappe die Länge  $u$  und die Sandschüttung die Höhe  $h$ , so wirkt an der Cylinderfläche — falls gleichzeitig längs der ganzen Höhe der Winkel  $\varphi$  erreicht wird — eine Kraft nach aufwärts

$$u \int_0^h T dh = u \int_0^h \sigma \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} y dy = \frac{1}{2} \sigma u h^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Wird der Inhalt der beweglichen Bodenfläche mit  $F$  bezeichnet, so drückt nach abwärts ein Sandgewicht:

$$F \sigma h$$

Den Absturz bewirkt die Differenz der vertical nach oben und unten wirkenden Kräfte, also die Resultirende

$$\sigma \left( F'h - \frac{\text{tg } \varphi}{2(1 + 2\text{tg}^2 \varphi)} \cdot u h^2 \right) \dots \dots \dots 17)$$

Diese Kraft hat für ein bestimmtes  $h$  ihr Maximum; ist die Höhe der Schüttung grösser als dieses  $h$ , so erfolgt eine Trennung des Sandes, — es wird im ersten Augenblicke des Absturzes nur in den unteren Lagen der Winkel  $\varphi$  erreicht — und jenes Maximum ist der Druck, der bei allen grösseren Höhen den Absturz bewirkt. Die Differentiation liefert für das Maximum einfach

$$F - u h \frac{\text{tg } \varphi}{1 + 2\text{tg}^2 \varphi} = 0$$

oder

$$h = \frac{F}{u} \frac{1 + 2\text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi}$$

und für den Druck

$$K = \sigma \left( \frac{F^2}{u} \frac{1 + \text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi} - \frac{F^2}{2u} \frac{1 + 2\text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi} \right)$$

oder

$$K = \frac{\sigma F^2}{2u} \frac{1 + 2\text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi} \dots \dots \dots 19)$$

Zum Beispiel:

Für einen Kreis mit dem Radius  $r$

$$K = \sigma \frac{1 + 2\text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi} \cdot \frac{\pi r^3}{4} \dots \dots \dots 20)$$

Für ein Quadrat mit der Seitenlänge  $s$

$$K = \sigma \frac{1 + 2\text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi} \cdot \frac{s^3}{8} \dots \dots \dots 21)$$

Für ein Rechteck mit den Seitenlängen  $s$  und  $s_1$ .

$$K = \sigma \frac{1 + 2\text{tg}^2 \varphi}{\text{tg } \varphi} \frac{s^2 \cdot s_1^2}{4(s + s_1)} \dots \dots \dots 22)$$

Ist  $s_1$  im Vergleich zu  $s$  sehr gross, so ist der Druck pro Längeneinheit des Streifens, mit anderen Worten der

Druck pro Längeneinheit auf die Firste eines Stollens von der Breite  $s$

$$\frac{K}{s_1} = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{s^2}{4} \dots \dots \dots 23)$$

Bei sehr unregelmässigen Flächen ist die stillschweigende Annahme, dass die Maximaldruckhöhe in allen Theilen des Cylinders gleichzeitig erreicht werde, nicht mehr zulässig und müssten verschiedene Druckhöhen in die Formel (17) eingesetzt werden,

Es kann bemerkt werden, dass sich die Function

$$\frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{cotg} \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - \cos 2 \varphi}{\sin 2 \varphi}$$

für die thatsächlich vorkommenden Werthe von  $\varphi$  wenig ändert, und ihr Minimum mit  $2 \cdot 828$  für  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1/2}$  oder  $\varphi = 35^\circ 15' 29''$  hat.

Es lässt sich an diese Ableitung noch eine fernere Erwägung knüpfen, welche wieder vom dreiseitigen Element ausgeht.

Macht man das Verhältniss von  $dy$  zu  $dx$  so gross, dass sich die Verticalcomponenten der auf  $dy$  und  $dx$  wirkenden Kräfte aufheben, also blos horizontale Componenten übrig bleiben, so ist die Bedingung hiefür:

$$T dy = V dx \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{V}{T} \dots \dots \dots 24)$$

und diese Gleichung bestimmt jene Lage von  $ds$ , bei welcher die auf  $ds$  wirkende Kraft — welche ja den auf  $dx$  und  $dy$  wirkenden das Gleichgewicht hält — horizontal ist. Speciell dort, wo eine verticale Gleitfläche existirt, also Formel (16) gilt, geht Formel (24) über in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{cotg} \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots 25)$$

während der kleinste Werth, den  $\frac{dy}{dx}$  haben kann, direct

durch den Reibungscoefficienten bestimmt ist, mit

$$\frac{dy}{dx} = \cotg \varphi \dots \dots \dots 26)$$

Bei einer Bodenklappe liesse sich nun, wenn die Lage der Gleitfläche in allen Punkten der Sandmasse bekannt wäre, eine Fläche construiren, welche von dem Umfange der Klappe ausgeht und welche die Eigenschaft besitzt, dass auf ihre Elemente nur Horizontalkräfte wirken. Dann bliebe als Druck nach unten, welchem der Gegendruck der Bodenklappe das Gleichgewicht hält, nichts übrig als das Gewicht jener Sandmasse, welche von der erwähnten Fläche einerseits und der Klappe andererseits eingeschlossen ist.

Bei dem Stollen war der Druck pro Längeneinheit nach (23)

$$\sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^2}{4};$$

man erhält denselben Druck, wenn man die Fläche in zwei Ebenen zerlegt, die unter der Neigung

$$\pm \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \cotg \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi$$

ansteigen. Bei der kreisförmigen Klappe muss die Flächenneigung gegen das Innere zu abnehmen, wenn der Druck der Formel (20) resultiren soll. Es soll noch bemerkt werden, dass je flacher die Gleitfläche geneigt ist, desto kleiner  $\frac{dy}{dx}$  wird, womit auch der Inhalt des drückenden Körpers und der Druck abnimmt.

### 9. Uebereinstimmung der Formeln mit den gemessenen Werthen.

Der Reibungswinkel  $\varphi$ , das specifische Gewicht  $\sigma$  und der Ausdruck  $\frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$  hat für die verschiedenen benutzten Sandsorten folgende Werthe:

Tab. 8.

Material	$\varphi$	$\frac{1+2tg^2\varphi}{tg\varphi}$	$\sigma$
Rheinsand.....	33° 40'	2,833	1,445
Bleischrot.....	26° 0'	3,026	6,91
Goldstreusand.....	42° 50'	2,933	0,86
Hagen's Streusand.....	25° 8'	3,070	2,713
	oder		
	32° 30'	2,844	2,713
Engesser's Streusand.....	36° 30'	2,778	1,5

Wird nunmehr nach Formel (20) der Druck auf eine kreisförmige Bodenklappe von 1<sup>cm</sup> Durchmesser berechnet und mit den gemessenen oben bereits angegebenen Werthen verglichen, so verhalten sich die Zahlen wie folgt:

Tab. 9.

Material	Berechneter Druck	Gemessener Druck
	in Gramm	in Gramm
Rheinsand.....	0,402	0,396
Bleischrot.....	2,053	1,878
Goldstreusand.....	0,248	0,234
Hagen's Streusand.....	0,818 beziehw. 0,757	0,664 bis 0,750
Engesser's Streusand....	0,409	Minimaldruck 0,272

Für die Rechtecke, für welche die Versuche mit Rheinsand vorliegen, lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Tab. 10.

s	s <sub>1</sub>	Berechneter Druck	Beobachteter Druck
cm.	cm.	Gramm	Gramm
10	10	512	512
1,97	5,86	17,42	15,59
2,10	4,11	12,28	12,32
2,02	2,04	4,28	4,51

Engesser's Minimaldruck verhält sich in nachstehender Weise zu den berechneten Werthen, wenn mit

Benutzung der Messungen Hagen's die Reibung längs der Glasseiten  $s_1$  zu 0.35 des entsprechenden Widerstandes bei Verschiebung von Sand gegen Sand gesetzt wird, also eine Formel

$$K = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^2 s_1^2}{4(s + 0.35 s_1)} \dots \dots 22^*)$$

in Anwendung kommt.

Tab. 11.

$s$ cm.	$s_1$ cm.	Berechneter Druck Gramm	Beobachteter Minimaldruck Gramm
20	4	323	} 150 bei 15—40 cm. Höhe 180 „ 6 cm. Höhe 52 „ 40 „ „
20	2,2	97	

Wie weit Engesser's mittlerer Druck sich der Formel 22) anschliesst, lässt sich aus dem oben citirten Aufsätze nicht entnehmen.

Der Druck auf den First eines Stollens von 3.0 bis 3.40<sup>m</sup> Breite würde bei Rheinsand nach (23) per Centimeter-Länge  $1.445 \times 2.833 \times \frac{300^2 \text{ bis } 340^2}{4} = 92000 \text{ bis } 118000^*$  oder per Meter Länge 9.2 bis 11.8 Tonnen betragen. Gröger\*) schätzt denselben bei festgelagerten Sand und Schotter nach Erfahrungen in einem durch Lehm, Tegel, Sand und Schotter getriebenen Stollen, dessen Zimmerung eine bewegliche Klappe von etwa 3 bis 3.4<sup>m</sup> Breite darstellte, auf 3 Tonnen per □<sup>m</sup> also auf 9 bis 10.2 Tonnen per laufenden Meter, was ziemlich mit dem Resultate der Versuche zusammentrifft; es braucht wohl nicht hinzu gesetzt zu werden, dass hiemit eine unmittelbare Uebertragung der bei trockenem

\*) Die Statik der Tunnelgewölbe in druckreichem Gebirge auf Grundlage von Wahrnehmungen bei der Bauausführung, von Jaroslav Gröger, Ingenieur, Prag 1881.

Sand gefundenen Gesetze auf nasses Gebirge nicht versucht sein soll\*).

### 10. Druck auf eine geneigte Oeffnung.

Die Versuche fanden nur für Neigungen unter 30° statt und so soll auch die nachfolgende Entwicklung bloß bis zu Neigungen gelten, welche kleiner sind, als die der natürlichen Böschung. Bei der Beobachtung der Bewegung, im Innern des Sandes hatte es sich gezeigt, dass wieder — wie bei einer horizontalen Oeffnung — ein verticaler Cylinder abgleitet und bei freiem Ausströmen-Lassen bildete sich ein Sandstrahl, der nur wenig von einer Lothrechten abwich; es ist daher anzunehmen, dass auch der wirkende Druck nahezu vertical ist und das zu seiner Berechnung die schon abgeleiteten Formeln dienen können.

Es sei beispielsweise die Bodenklappe kreisförmig und unter einem  $\varphi$  gegen die Horizontale geneigt; dann ist in die Formel 19

$$K_{\alpha} = \sigma \frac{F^2}{2u} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \dots\dots\dots 19)$$

einzusetzen

$$F = r^2 \pi \cos \alpha$$

sowie näherungsweise

$$u = r \pi (1 + \cos \alpha)$$

und es findet sich die verticale Druck-Componente

$$K_{\alpha} = \frac{\sigma r^3 \pi}{2} \cdot \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

während für  $\alpha = 0$

$$K_0 = \frac{\sigma r^3 \pi}{4} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \dots\dots\dots 20)$$

---

\*) Vergl. bez. Druck auf Tunnelgewölbe, ferner: Wilhelm Ritter, Die Statik der Tunnelgewölbe, Berlin, 1879; Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 5. Aufl. II. Thl., I. Abth. S. 158—162. Culmann; Graphische Statik; Könyves-Tóth, über Tunnelbau etc. Wien, 1875; Scheffler und von Ott.

gewesen war. Es ist dann

$$K_\alpha = K_0 \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = K_0 (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2})$$

Da  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$  für geringere Werthe von  $\alpha$  sehr klein ist, weicht  $K_\alpha$  von  $K_0$  nur wenig ab. So findet sich für

$$\begin{array}{lll} \alpha = 10^\circ & ; & 20^\circ & ; & 30^\circ \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 0.008 & ; & 0.031 & ; & 0.072 \end{array}$$

und demnach bei Rheinsand als Verticaldruck auf eine Oeffnung von 1<sup>m</sup> Durchmesser bei wechselnder Neigung derselben

$$K_0 = 0.402; K_{10^\circ} = 0.399; K_{20^\circ} = 0.390; K_{30^\circ} = 0.373$$

Zu dieser Verticalkraft tritt eine Horizontalkraft  $H_\alpha$  hinzu, welche sich ungefähr angeben lässt, da das Verhältniss der pro wagrechte und lothrechte Flächeneinheit wirkenden Druckkräfte mit  $\frac{H}{V} = \frac{1}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$  bekannt ist und die Kräfte  $H$  senkrecht auf den Cylindermantel gerichtet sind. Solche Schätzungen, deren nähere Durchführung hier unterbleiben soll, da sie keinen theoretischen Werth und eine sehr geringe Genauigkeit besitzen und bloß darthun, dass  $H_\alpha$  sehr klein ist, liefern z. B. für  $\alpha = 30^\circ$  bei Rheinsand  $H_\alpha = 0.05 K_\alpha$ .

Gemessen wurde in der Weise, dass der Wagebalken eine schräge Lage erhielt, (siehe nebenstehende Figur) und die Wagebelastung die Function  $K_\alpha + H_\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$  angab, welche nach dem Vorhergehenden, so wenig von dem Druck  $K$  auf eine Horizontalfläche differirt, dass sie bei der Ungenauigkeit aller Sanddruckversuche wesentlich constant erscheint.



Tabelle für  $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$ Rheinsand  $K_0 = 0.402 d^3$  (berechnet) und  $= 0.396 d^3$  (gemessen).

Tab. 12.

Durchmesser der Öffnung cm.	Neigung	Zahl der Versuche	Mittelwerth von $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$ Gramm	Entsprechender Werth von $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$ für eine Öffnung von 1 cm. Durchmesser Gramm
15	10°	20	1259	0,373
"	30°	20	1237	0,367
20	10°	20	2983	0,373
"	20°	20	3072	0,384
"	30°	20	3353	0,419*)
2,66	8°	20	7,25	0,385
"	16° 10'	20	7,44	0,395
"	16° 40'	20	7,43	0,395
"	30°	20	7,10	0,393

## 11. Einfluss eines aufgesetzten oder versenkten Gewichtes.

Bei diesen Versuchen wurde ein gewöhnliches eisernes Gewicht von 5<sup>kg</sup>, welches eine Basis von 95<sup>mm</sup> Durchmesser (siehe Fig.) besass, entweder auf die Sandoberfläche gesetzt oder aufgestellt, ehe die Schüttung vollendet war und auf diese Weise in das Innere der Sandmasse gebracht. Die Bodenöffnung war hierbei immer horizontal und kreisförmig die Höhe der Füllung betrug 51<sup>cm</sup> und als Material diente Rheinsand, bei welchem nach der Theorie der Druck bei 15<sup>cm</sup> Durchmesser 1.36<sup>kg</sup> und bei 20<sup>cm</sup> Durchmesser 3.22<sup>kg</sup> beträgt.



Hiernach würde eine centrale Belastung den Druck nicht vergrößern, wenn die Entfernung der Gewichtunterkante vom Boden etwa  $\frac{5}{3}$ mal so gross ist, als der Durch-

\*) Bei diesem Versuche mochte die Dicke der Holzwand störend eingewirkt und einen Theil des Horizontaldruckes, also des entsprechenden Reibungswiderstandes aufgehoben haben.

messer der Oeffnung oder noch grösser, während eine etwas excentrische Belastung den Bodendruck zu erhöhen schien.

Tab. 13.

Zahl der Versuche	Entfernung der Gewichtunterkante von dem Boden em.	Entfernung der Gewichtsmitte von der Oeffnungssachse em.	Beobachteter Druck Kilogramm	Anmerkung
Oeffnungsdurchmesser 15 cm.				
16	50	0,0	1,33	Das Gewicht senkte sich beim Absturz
11	25 bis 35	0,0	1,32	
4	20 bis 35	0,0	1,40	
1	13	0,0	1,60	
1	4 bis 5	0,0	2,16	
12	50	10,0	1,47	
12	50	15,0	1,48	Das Gewicht blieb zunächst stehen.
12	50	20,0	1,47	
12	50	25,0	1,37	
12	50	30,0	1,34	
12	50	35,0	1,32	
Oeffnungsdurchmesser 20 cm.				
12	50	0,0	3,15	
12	50	10,0	3,37	
10	50	20,0	3,25	
8	50	30,0	3,37	

## 12. Druck gestampften Sandes.

Sand hat im losen und gestampften Zustande ein verschiedenes spezifisches Gewicht der Schüttung. Obwohl nun ein Stampfen und ebenso ein blosses Schütteln das spezifische Gewicht erhöhte, nahm dabei der Bodendruck des Rheinsandes ab, welche Abnahme durch die Bildung einer Gleitfläche erklärt wird, die nicht mehr cylindrisch ist, sondern nach oben conisch zusammenläuft\*) (siehe Fig. 12). Die Druckmessungen zeigten bei Rheinsand, der durch Schütteln comprimirt wurde, folgende Abnahme:

\*) Vergl. die Schlussbemerkung der theoretischen Ableitung §. 8.

Tab. 14.

	Anzahl der Versuche	Oeffnungs- durchmesser cm.	Mittlerer Druck Gramm	Anmerkung
Comprimirt	10	2,12	3,07	(siehe oben) Tab. 1.
Lose	20	2,12	3,92	

Goldstreusand zeigte noch bedeutendere Druckvermindernngen, da dieselben aber mit Cohäsionserscheinungen verbunden waren — es blieb eine verticale Böschung von ziemlicher Höhe stehen — können die gefundenen Zahlen hier keine Verwendung finden.

### 13. Bodendruck bei Füllung einer Röhre mit Sand.

Die Beobachtung wurde mit einer schmiedeisernen, rauhen Gasröhre von 2<sup>cm</sup> Durchmesser durchgeführt, welche mit Rheinsand gefüllt wurde. Auch hier fand sich der Bodendruck constant und zwar als Mittel aus 19 Versuchen zu 2,83<sup>gr</sup>, was einem Druck von 0,354<sup>gr</sup> bei 1<sup>cm</sup> Durchmesser entsprechen würde, während bei Reibung von Sand gegen Sand 0,396<sup>gr</sup> (siehe oben) gefunden worden war.

### 14. Deformation der Sandschichten bei diversen Cylinder-Bewegungen.

Anhangsweise sollen noch Abbildungen von Sandschichten-Deformationen gegeben werden, bei welchen es sich zwar noch um Cylinderverrückungen, aber nicht mehr um den Absturz aus einer Bodenöffnung handelt. Es wird dargestellt in Fig 13 und 14 das Einrammen eines Pfahles (Eisenstäbchen, bezw. Weissblechstöpsel) in trockenen Sand und in Fig. 15 das Einrammen eines Pfahles in mit Paraffin bereits übergossenen, also nassen Sand. In Fig. 16 das Herausziehen eines Pfahles, in Fig. 17 die Schichtenumlagerung bei Hinaufstossen eines Stöpsels von unten nach oben, wobei die Eisenringumhüllung vielleicht etwas störend wirkte.

## II. Bestimmung der Gleitfläche bei Sandmassen mit beweglicher, nachgebender, seitlicher Unterstüztung.

### 1. Geschichtliche Einleitung.

Die Bestimmung des Druckes, welchen Erde auf eine Stützmauer ausübt, gehört zu den älteren Themen des Ingenieurwesens \*). Sie wurde zur Zeit schon von Bullet, Couplet, Belidor, Sallonyer, Tersac de Montlong und Blaveau versucht. Die erste wissenschaftlich besser begründete Rechnungsmethode stammt von Coulomb (1774). Dieselbe beruht auf der Voraussetzung, dass sich bei dem Einsturz einer Stützmauer ein prismatischer Keil längs einer durch den erdseitigen Fuss der Stützmauer gehenden Gleitfläche abtrenne, und zielt dahin, jene Gleitfläche anzugeben, bei welcher die Stützmauer den grössten Druck aushalten hat. Auf derselben Grundlage, d. h. unter der Annahme von Maximaldruckprismen, arbeiteten weiter Prony, Mayniel, Français, Navier, Audoy, Poncelet, Hagen, Scheffler, Saint-Guilhem, Culmann, Curioni, Curie, Rebhann, Holzhey, von Ott, Wilhelm Ritter, Crugnola und Andere mehr.

Von der Betrachtung des kleinsten Elementes, wie Cauchy sie in die Festigkeitslehre eingeführt hat, und ähnlichen Gesichtspunkten gingen zuerst unabhängig von einander aus: Winkler, Rankine, Lévy, Considère und Mohr, denen sich Ceradini und Weyrauch anschlossen. Auch bei den neueren Theorien ist die Lage und Gestalt der Gleitfläche für die Grösse des Druckes maassgebend.

---

\*) Viele der folgenden Daten sind entnommen aus: Crugnola „Spinta delle terre e delle masse liquide“, Torino 1880. Winkler „Neue Theorie des Erddruckes nebst einer Geschichte der Theorie des Erddruckes und der hierüber angestellten Versuche“. Wien 1872. Baker „The Actual Lateral Pressure of Earthwork“. Minutes of Proceedings of the Inst. of Civ. Engineers. Vol LXV.

Es konnte nicht ausbleiben, dass Verificationen der so zahlreichen Hypothesen mit Hilfe von Erddruck-Messungen versucht wurden, doch blieben die bezüglichen Bestrebungen von Gadroy, Papacino d'Antoni, Gauthey, Woltmann, Mayniel, Martony de Köszezh, Hope, Audé, Hagen, Winkler, Curie und Baker ohne entscheidenden Erfolg, namentlich, wie es scheint, weil der Druck in hohem Maasse von Factoren abhängt, die theoretisch erst in zweiter Linie berücksichtigt werden können. Versuche mit wirklichen Probemauern machten Rondelet\*) Bland\*\*), ferner nach Baker: Hope, Pasley, Cunningham, Burgoyne, Michon, Constable und Baker selbst; schliesslich theilt Ardant ein bezügliches Experiment mit im *Mémorial du genie*, 1848, Nr. 15. Zu einem Aufschluss über die eigentlichen Vorgänge bei dem Einsturz von Stützmauern könnte nun das directe Beobachten der Gleitfläche beitragen, welches sich in ähnlicher Weise durchführen lässt, wie die oben beschriebene Ermittlung der Bewegungen beim Absturz durch eine Oeffnung.

Was die Ansichten der verschiedenen Autoren über die Gleitfläche betrifft, so wurde die Fläche, theils der Einfachheit halber, theils in der Meinung, dass es wirklich der Fall sei, in allen Formeln als eben angenommen. Insbesondere nach Levy, Mohr, Considère und Weyrauch ist in den Fällen, wo eine streng richtige Berechnung des Druckes möglich ist — bei Levy gilt das allerdings nur für einzelne Mauerlagen — die Gleitfläche eine Ebene; auch Hagen hält die Gleitfläche für eben. Persy weist nach, dass die Gleitfläche bei horizontaler Oberfläche nur dann eine Ebene sei, wenn die Wand absolut glatt ist und die Erde keine Cohäsion besitzt, und Winkler, dem Crugnola

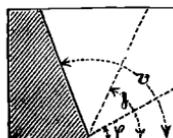
---

\*) Rondelet: *Traité théoretique et pratique de l'art de bâtir*. Tome 3<sup>me</sup>.

\*\*) Bland: *Experimental Essays on the Principles of Construction of Arches, Piers, Buttresses etc.* London 1839.

beistimmt, hält bis auf gewisse Fälle -- wenn der Druck der unbegrenzten Masse unter dem Complement des Reibungswinkel zwischen Stein und Erde gegen die Mauer wirkt -- die Fläche für gekrümmt, rechnet der Einfachheit wegen aber auch unter der Annahme einer ebenen Trennungsfäche.

Die Winkel, welche nach den verschiedenen Theorien die Gleitebene mit der Horizontalen einschliesst, sind in der



rückwärts angehefteten Tabelle 15 zusammengestellt worden, und wurde hierbei der Uebersicht wegen eine einheitliche Nomenclatur eingeführt.

Es bedeutet (siehe beistehende Figur)

$\varphi$  den Neigungswinkel der natürlichen Böschung gegen die Horizontale,

$\varphi'$  den Reibungswinkel zwischen Sand und Wand,

$\gamma$  den Neigungswinkel der Gleitfläche gegen die Horizontale,

$\nu$  den Neigungswinkel der an den Sand grenzenden Wandfläche gegen die Horizontale, so dass bei hinterschnittenen Mauern  $\nu < 90^\circ$ , bei Mauern mit vorliegender Rückwand  $\nu > 90^\circ$  ist.

Scheffler's Formel (Tab. 15) lässt sich, indem man die Tangenten durch Sinus und Cosinus ausdrückt, transformiren in

$$\operatorname{ctg} \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi' + \nu - 90)}{\cos^2(\varphi + \varphi' + \nu - 90) \cos(\nu - 90) \sin \varphi}} - \operatorname{tg}(\varphi + \varphi' + \nu - 90) \right\} \dots 27)$$

welcher Ausdruck für  $\varphi' = 0$  (Theorie Français) in

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \frac{\nu + \varphi}{2}$$

und für  $\varphi' = \varphi$  in

$$\operatorname{ctg} \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\frac{2 \cos \varphi \cos(\varphi + \nu - 90)}{\cos^2(2\varphi + \nu - 90) \cos(\nu - 90)}} - \operatorname{tg}(2\varphi + \nu - 90) \right\}$$

$$= \left\{ \pm \sqrt{\frac{\cos(2\varphi + \nu - 90) + \cos(\nu - 90)}{\cos^2(2\varphi + \nu - 90) \cos(\nu - 90)}} - \operatorname{tg}(2\varphi + \nu - 90) \right\} \dots \dots \dots 28)$$

übergeht und für  $\varphi' + \nu > 180^\circ$  imaginär wird.

Die Gleichungen 27 und 28 stimmen mit den Formeln 299 und 315 in Rebhann's: „Theorie des Erddruckes und der Futtermauern“, Wien, 1871, überein, nur setzt v. Rebhann wie Scheffler blos das + Zeichen.

Eine andere Gleichung entsprechend 28) findet sich in den „Vorträgen über Baumechanik von Carl v. Ott“, nämlich

$$\operatorname{cotg}(\nu - \gamma) = \operatorname{ctg}(\gamma - \varphi) + \sqrt{[\operatorname{ctg}(\nu - \varphi) + \operatorname{ctg} 2\varphi][\operatorname{ctg}(\nu - \varphi) - \operatorname{ctg} \nu]}$$

und hier ist das + Zeichen für alle Winkel richtig.

Endlich leitet Holzhey (Vorträge über Baumechanik, Wien, 1879, S. 1030) Scheffler's Gleichung in folgender Form ab:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \varphi \sqrt{\sin \nu \sin(\varphi + \varphi')} + \sin \nu \sqrt{\sin \varphi \sin(\nu + \varphi')}}{\cos \varphi \sqrt{\sin \nu \sin(\varphi + \varphi')} + \cos \nu \sqrt{\sin \varphi \sin(\nu + \varphi')}}$$

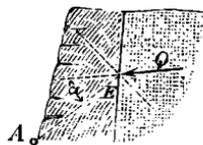
welcher Ausdruck für eine verticale Wand, also für  $\nu = 90^\circ$  in

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi \left[ 1 + \sqrt{\frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi \sin(\varphi + \varphi')}} \right]$$

übergeht.

Besonders zu erwähnen ist die Ansicht de Lafont's, dass die Vorgänge im Innern des Sandes, je nach der Art des Mauereinsturzes deswegen verschieden seien, weil die Reibung an der inneren Mauerfläche von der Bewegungsrichtung der Mauer abhängt. Kann sich die Mauer blos um eine bestimmte Achse  $A$  drehen, so sei der Reibungswiderstand, den eine Kraft  $Q$  hervorruft, in deren Richtung sich ein Erdtheilchen  $E$  beim Einsturze bewegt, gleich  $Q \cdot \operatorname{tg} \varphi' \cdot \cos \alpha$  zu setzen, wobei  $\operatorname{tg} \varphi'$  den Reibungs-Coëfficienten zwischen

Mauer und Erde und  $\alpha$  den Winkel zwischen der Kraft-  
 richtung und einer Normalen auf die Bewegungslinie des  
 betreffenden Standpunktes bedeutet, und wie es scheint, die  
 Richtung des Reibungswiderstandes mit der Wandrichtung  
 zusammenfallen soll, mit anderen Worten: nur die zur  
 Bewegungsrichtung senkrechte Componente einer Kraft ver-  
 ursache eine Reibung. De Lafont setzt  
 bei verticaler Mauer  $Q$  horizontal und in  
 Folge dessen bei horizontaler Mauerver-  
 schiebung  $\alpha = 0$ , wobei immerhin bemerkt  
 werden muss, dass sich in Wirklichkeit ein  
 an der Wand befindliches Sandtheilchen beim Absturz ziem-  
 lich parallel der Gleitfläche und nicht wagrecht bewegt.

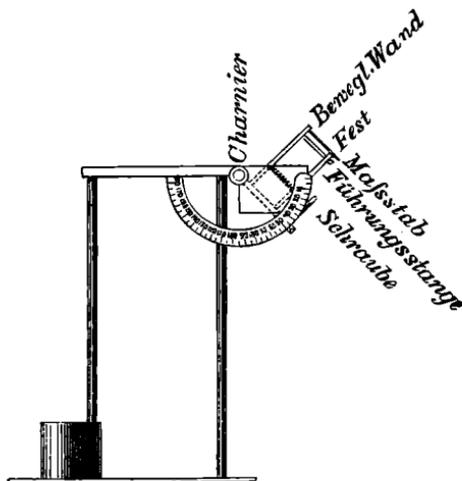


## 2. Beschreibung der Versuche.

Die Methode glied insoferne jener bei Beobachtung  
 der Absturzerscheinungen durch Bodenöffnungen, als wieder  
 weisser und gefärbter Sand in abwechselnden Lagen auf-  
 getragen wurde, und die Fixirung der Schichten nach er-  
 folgter Deformation durch Einguss von geschmolzenem  
 Paraffin erfolgte. Zunächst traten hölzerne  
 offene Rahmen aus 3 rechtwinklig aneinander  
 stossenden Stäbchen an die Stelle der früher  
 benutzten Ringe und als Stützmauern  
 fungirten Holzkeile, Glasplatten und dergleichen, die von  
 Hand weggezogen wurden, wobei, wo es nothwendig war,  
 wieder andere Keile als Führung dienten. Sollte mit Sicher-  
 heit der Reibungswinkel  $\varphi'$  zwischen Sand und Wand so  
 gross werden wie  $\varphi$ , so wurde die betreffende Wand mit  
 Sand beklebt. Bei manchen Versuchen wurde das Holz-  
 klötzchen nicht auf einmal weggezogen, weil die hierbei  
 entstehende Böschung der Sandoberfläche die Bildung  
 immer flacher werdender Gleitflächen verursacht hätte und  
 diese neuen Gleitflächen die ursprüngliche hätten schneiden  
 und entstellen können, es wurde vielmehr der Klotz immer



nur wenig verrückt, und jedesmal zwischen den einzelnen Verschiebungen frischer Sand nachgefüllt. Nachdem sich die Tauglichkeit der Methode überhaupt gezeigt hatte, wurde es versucht, durch Anwendung eines Metallapparates die Genauigkeit des Resultates zu erhöhen und das Experimentiren zu erleichtern. Das Blechstück, welches hier die Stützmauer vorstellte und stets mit Sand beklebt wurde, konnte mittelst eines Charnieres in eine beliebige Neigung gebracht werden und liess sich mittelst einer Schraube normal zu sich selbst verschieben, während ein Gradbogen



und ein Maassstab das Ablesen der Neigungswinkel und der Verschiebung gestatteten; ferner wurden hier Messingrahmen statt der Holzrahmen verwendet. Uebrigens wurden auch einige Versuche mit Holzrahmen und einer um ihren Fuss in einem Charnier drehbaren Wand namentlich zur Constatirung der Gleitebene bei rückliegender Wand ( $\nu < 90^\circ$ ) gemacht, indem bei vorliegender Wand ( $\nu > 90^\circ$ ) eine Drehung zu undeutliche Resultate — die Schichten brachen nicht genug scharf ab — liefert.

Bei allen Experimenten wurde der oben beschriebene Rheinsand verwendet und war die Sandoberfläche horizontal. Es bildete sich stets eine ebene Gleitfläche.

## 3. Verticale Wand, horizontale Oberfläche.

Es bedeute  $\alpha$  den Winkel, den die Verschiebungsrichtung mit der Horizontalen einschliesst, sei also positiv bei Verschieben nach oben und negativ bei Senkung der Mauer und die übrigen Bezeichnungen seien dieselben wie vorher. Da  $\varphi = 33^\circ 40'$  war, ist  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2} = 61^\circ 50'$

Tab. 16.

Nummer	$\alpha$	$\gamma$	Wandbeschaffenheit
1	0°	60°	Holz wand
2	0°	60°	desgl.
3	0°	59°	desgl.
4	0°	60°	Glasplatte
5	+ 50°	59°	Holz wand
6	+ 50°	62°	desgl.
7	— 1°	58°	Messing m. Sand beklebt
8	um den Fuss gekippt	62°	Eisen m. Sand beklebt
Im Mittel		60°	

(Vgl. Fig. 18.)

Hiernach lässt sich der Satz aussprechen:

Bei lothrechter Stützwand und wagrechter Sandoberfläche hat eine horizontale oder aufwärts gerichtete Verschiebung der Stützwand oder ein Kippen um ihren Fuss die Bildung einer Gleitfläche zur Folge, deren Neigungswinkel  $\gamma$  gleich oder etwas kleiner als  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$

ist. Der Rauheitsgrad der Wand ist hierbei ohne Einfluss. Da möglicherweise ein Wegziehen der Mauer andere Erscheinungen bewirken könnte, als ein Nachgeben der Wand in Folge des Sanddruckes selbst, wurde ein Versuch (Nr. 9) in der Weise vorgenommen, dass zwischen

das bewegliche Blech des Metallapparates und den Sand ein loses Stück Pappe eingeschaltet wurde, welches bei dem Zurückschrauben des Bleches in Folge des Sanddruckes umkippte. Es fand sich hierbei  $\gamma = 59^\circ$ , also anscheinend eben so gross wie bei den Experimenten 1 bis 8. Um festzustellen, wie weit eine Begrenzung der Sandmasse die Erscheinungen beeinflussen könne, wurde die Gleitfläche bei schmalem Sandkörper untersucht:

Tab. 17.

Nummer	Breite des Sandkörpers mm.	Höhe der Wand mm.	$\gamma$
10	20	28	$60^\circ$
11	20	40	$58^\circ$
12	20	40	$58^\circ$
13	10	40	$61^\circ$
14	10	50	$62^\circ$

Ferner wurde zum gleichen Zwecke ein vom Mauerfuss schräg ansteigender Boden eingelegt; das Resultat war:

Tab. 18.

Nummer	Steigung des Bodens	$\nu$	Figur
15	$50^\circ$	$62^\circ$	19
16	$70^\circ$	der Sand rutscht auf dem Boden selbst herunter	20

Die geschilderten Begrenzungen hatten demnach an den Vorgängen nichts geändert. Anders verhielt es sich bei Verschiebung nach abwärts; je steiler dieselbe erfolgte, desto mehr richtete sich die Gleitfläche auf und zwar weicht für kleine  $\alpha$  der Winkel  $\gamma$  nur wenig von  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  ab, nimmt dann rascher zu bis für  $\alpha = -90^\circ$  die Gleitfläche an der Wand selbst liegt.

Tab. 19.

Nummer	$\alpha$	$\gamma$
17	20	62°
18	20	62°
19	20	59°
20	50	70°

#### 4. Vorgeneigte Wand. Horizontale Oberfläche. Horizontale Verschiebung.

Auch bei diesen Versuchen zeigte sich  $\gamma$  bei genügend rauher Wand unabhängig von ihrer Neigung gleich  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  und war die Wand flacher als  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  geneigt, so bildete sich ein Doppelkeil, dessen beide Begrenzungen mit der Horizontalen die Winkel  $\gamma = \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  und  $\gamma_1 = 180 - \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  einschlossen.

Tab. 20.

Nummer	$\nu$	$\gamma$	$\gamma_1$	Wandbeschaffenheit
21	110°	62	—	Holz mit Sand beklebt
22, 23	138°	70	?	Glasplatte
24	160°	62	62	Holz ziemlich glatt
25	180°	62	62	Holz
26	180°	?	62	Glasplatte

(Vgl. Fig. 21 und 22)

#### 5. Vorgeneigte Wand. Horizontale Oberfläche. Verschiebung normal zur Wandrichtung.

Zuerst wurde mit Holzprismen experimentirt.

Da die Einzelwerthe von  $\gamma$  bei Anwendung von Holzprismen stark schwankten, wurde, um eine grössere Genauig-

Tab. 21.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\alpha$	Mittelwerth $\gamma$	Mittelwerth $\gamma_1$
27—28	75	— $15^\circ$	61° 30'	—
29—33	70	— $20^\circ$	66° 12'	—
34—35	60	— $30^\circ$	68° 30'	} war nicht mit Sicherheit zu messen.
36—39	50	— $40^\circ$	69° 20'	
40—43	39	— $51^\circ$	71° 20'	
44	30	— $60^\circ$	78°	
45	20	— $70^\circ$	80 bis 85°	
46—47	0	— $90^\circ$	ca. 90°	

(Vgl. Fig. 23)

keit zu erzielen, der oben beschriebene Apparat construirt und mit demselben ergab sich das nachfolgende Resultat:

Tab. 22.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\alpha$	$\gamma$	Wandbeschaffenheit
7	89	— 1	58°	} Messing mit Sand beklebt
48	80	— 10	58°	
49	70	— 20	62°	
50	60	— 30	64°	
51	50	— 40	64°	
52—53	40	— 50	66°	
54	30	— 60	66°	
55	20	— 70	72°	
56	10	— 80	ca. 76°	
57	0	— 90	ca. 90°	

(Vgl. Fig. 24 und 25.)\*

Auch diese Versuchsreihe, welche in ihren Werthen für  $\gamma$  durchweg hinter der vorhergehenden zurückbleibt, zeigt keine sehr stetige Zunahme, gibt aber immerhin, ebenso wie die vorige Tabelle zu erkennen, dass  $\gamma$  mit  $\alpha$  wächst

\*) In Fig. 25 und 26 der Tafel sind die Pfeile, welche die Bewegungsrichtung der Wand andeuten, irrtümlich verkehrt gezeichnet.

und zwar Anfangs langsam, später rascher, so dass sich etwa die empirische Regel aufstellen liesse

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 90^\circ}{2} + \operatorname{tg} (-\alpha)$$

Bei Umkippen der Wand um ein an ihrem Fuss angebrachtes Charnier ergab sich:

Tab. 23.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\gamma$	Wand- beschaffenheit	Anmerkung
8	$90^\circ$	$62^\circ$	Eisen mit Sand beklebt	Die Winkel $\gamma$ waren schlechter messbar als bei Verschie- bung
56	$62^\circ$	$63^\circ$		
57	$60^\circ$	ca. $66^\circ$		
59	$57^\circ$	$65^\circ$		
59	$20^\circ$	$77^\circ$		

Das Umkippen um ein Charnier scheint also einer zur Wand normalen Verschiebung vollständig zu entsprechen.

6. Zurückgeneigte Wand. Horizontale Oberfläche. Verschiebung horizontal oder aufwärts.

Tab. 24.

Nummer	$\nu$	$\alpha$	$\gamma$	Wand- beschaffenheit
1-8	90	siehe oben	$60^\circ$	siehe oben
60	70	$0^\circ$	$51^\circ$	
61	70	$0^\circ$	$52^\circ$	
62	70	$0^\circ$	$53^\circ$	
63	70	$20^\circ$	$52^\circ$	
64	70	$20^\circ$	$52^\circ$	
65	50	$0^\circ$	$43^\circ$	
66	50	$0^\circ$	$43^\circ$	
67	50	$40^\circ$	$43^\circ$	
68	50	$40^\circ$	$43^\circ$	
69	50	um den Fuss gekippt	$43^\circ$	

(Vgl. Fig. 26 und 27.)

Hier zeigte sich deutlich das Gesetz  $\gamma = \frac{\varphi + \nu}{2}$ , demzufolge die Gleitfläche den Winkel zwischen der Wand und einer durch den Wandfuss unter der Neigung der natürlichen Böschung gelegten Ebene halbiert. Für  $\nu = 90^\circ$  folgt  $\gamma = \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  und für  $\nu = \varphi$  wird auch  $\gamma = \varphi$ .

### 7. Gleitfläche gestampften Sandes.

Bei horizontaler Oberfläche und ebenfalls wagrechter Verschiebung gab eine verticale Holzwand in zwei Versuchen (70, 71) jedesmal  $\gamma = 70^\circ$ , während eine Holzwand (72) mit der Neigung  $\nu = 180^\circ - 50^\circ$  einen von zwei Gleitflächen begrenzten Keil gab mit den Winkeln  $\gamma = 75^\circ$  und  $\gamma_1 = 74^\circ$  (vergleiche Fig. 28).

### 8. Anhang.

Endlich wurden, um weitere Verhältnisse nachzuahmen, welche bei Stützmaureinstürzen eintreten können, noch folgende Anordnungen getroffen: Nr. 73. Ein parallelepipedischer Klotz von 6·6<sup>cm</sup> Breite und 4·0<sup>cm</sup> Höhe wurde um seine vom Sand abstehende untere Kante gedreht, so dass unter seiner anderen Unterkante Sand durchrutschen konnte; es bildete sich eine vielleicht gekrümmte Gleitfläche mit  $\gamma = \text{ca. } 65^\circ$ .\*)

Nr. 74 und 75. Ein Klotz, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bildete, wurde um den, dem Sand abgewendeten Scheitel des rechten Winkels gedreht. Dabei entstanden zwei Gleitflächen, und die der Wand zugekehrte Gleitfläche schloss bei zweimaliger Vornahme des Experiments jedesmal einen Winkel von  $25^\circ$  mit der Wandfläche oder  $65^\circ$  mit der Horizontalen ein. Da bei einigen Ver-

---

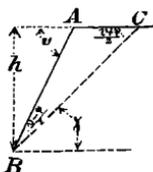
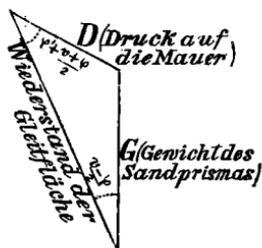
\*) Vgl. Engösser, Zeitsch. f. Bauwesen 1880, Sp. 208—210 u. Cramer ebenda 1879, Sp. 521—526.

suchen Audé's ähnliche Fälle vorliegen, muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass sie keinen directen Schluss auf die Vorgänge bei Umkippen um den inneren Mauerfuss zulassen.

### 9. Folgerung für die Berechnung von Stützmauern.

Bei horizontaler Oberfläche und verticaler oder vorgelegter Wand rechne man nach den Angaben von Mohr und Weyrauch, deren Theorien durch die Versuche mit wagrechter Verschiebung eine Bestätigung erfahren haben; bei Senkung der Stützmauer treten allerdings Umlagerungen der Sandkörnchen ein, doch scheinen diese geeignet, den Druck in ähnlicher Weise zu vermindern, wie dieses bei Senkung einer beweglichen Bodenklappe der Fall ist. Bei rückliegender Mauer, für welche die strenge Theorie bis jetzt keine Anhaltspunkte hat, lässt sich mit Hilfe der nun erlangten Kenntniss der Gleitflächenlage wenigstens Folgendes sagen.

Das Gewicht  $G$  des drückenden Prismas zerlegt sich in den Widerstand der Gleitfläche, welcher mit derselben den Winkel  $90^\circ - \varphi$  einschliesst, und in den Druck  $D$  auf die Wand, welcher einen Winkel  $90^\circ - \varphi'$  mit ihr bilden soll. Es folgt aus dem Kräftedreieck



$$D = G \frac{\sin \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \left( \varphi' + \frac{\nu + \varphi}{2} \right)} \dots \dots \dots 29)$$

Das Gewicht  $G$  ist abhängig vom Prismenquerschnitt und ergibt sich (siehe Fig.) zu

$$G = \frac{\sigma}{2} A B \cdot B C \sin A B C = \sigma \frac{h^2}{2} \frac{\sin \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \nu \sin \frac{\nu + \varphi}{2}}$$

wobei  $h$  die Mauerhöhe und  $\sigma$  das spezifische Gewicht der Schüttung bedeutet. Die Einsetzung in 29 liefert

$$D = \sigma \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \nu \sin \frac{\nu + \varphi}{2} \sin \left( \varphi' + \frac{\nu + \varphi}{2} \right)} \quad \dots 30)$$

welche Gleichung zunächst noch allgemein für ein beliebiges  $\varphi'$  streng richtig ist. Nun ist bei verticaler Wand der Druck wagrecht, steht also normal zur Wand; bei rückliegender Mauer kann man im Zweifel sein, ob er stets normal, oder — so lange der Reibungscoefficient zwischen Sand und Wand es zulässt — wagrecht bleibt. Als empirische Regel soll nun aufgestellt werden:

für  $\nu = 90^\circ$  sei  $\varphi' = 0$

für  $\nu = \varphi$  sei  $\varphi' = \varphi$

eine Bedingung, die z. B. durch die Gleichung

$$\sin \varphi' = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \nu \dots \dots \dots 31)$$

erfüllt wird.

Mit den Formeln 30 und 31 wäre eine Näherungsmethode zur Berechnung des Druckes auf rückliegende Mauern gegeben. Die Berechnung wird einfacher, wenn man stets  $\varphi' = 0^\circ$  setzt; es geht dann Formel 30 über in

$$D = \frac{\sigma h^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{\nu - \varphi}{2} \right)}{\sin \nu \sin^2 \left( \frac{\nu + \varphi}{2} \right)} \dots \dots \dots 32)$$

Zum Vergleich soll die Normalcomponente  $N = D \cos \varphi'$  nach verschiedenen Formeln und das Resultat der Versuche

Audé's neben einander gestellt werden. (Vergleiche Winkler, „Neue Theorie etc.“ \*) S. 134.)

Tabelle für  $\frac{N}{\sigma h^2}$  bei  $\cotg \varphi = 1.5$  oder  $\varphi = 33^\circ 41' 24''$ .

Tab. 25.

ctg $\nu$	Audé's Messung	Formel 30 und 31	Formel 32	Winkler's praktische Regel ( $\varphi' = \varphi$ und Maximal- druck-Prisma)
0	0,1173	0,1432	0,1432	0,1142
0,2	0,0847	0,0994	0,1082	0,0814
0,4	0,0584	0,0651	0,0785	0,0558
0,6	0,0316	0,0397	0,0536	0,0360
0,8	0,0154	0,0220	0,0330	0,0211
1,0	0,0064	0,0103	0,0171	0,0105
1,2	0,0016	0,0035	0,0062	0,0037

### III. Gleitfläche bei Sandmassen, welche seitlich gedrückt werden (Sandschub).

#### 1. Geschichtliche Einleitung.

Viele der Autoren, welche die Frage des Erddruckes behandelten, befassten sich auch mit dem praktisch weniger wichtigen Problem, welches der Schub sei, den eine Wand gegen eine Erdmasse ausüben müsse, um diese zum Ausweichen zu bringen. Poncelet behandelte diesen Fall, wie es scheint, zuerst\*\*) und zwar suchte er jenes Prisma, zu dessen Fortschieben die geringste Kraft nöthig ist und leitete eine graphische Construction ab, welche Culmann,\*\*\*)

\*) Die Druckmessungen gaben überhaupt Resultate, welche nach Winkler am besten mit der Theorie des Maximaldruckprismas und  $\varphi' = \varphi$  stimmen. Doch sagt Winkler: „dass sich aber immerhin noch so starke Abweichungen zeigen, dass die bisherigen Versuche keine genügende Beruhigung für die Verlässlichkeit dieser Theorie geben“.

\*\*) Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente von Poncelet, übersetzt und mit einem Anhang vermehrt von J. W. Lahmeyer, Braunschweig 1844. S. 104 u. f.

\*\*\*) Die graphische Statik von K. Culmann, Zürich 1866, S. 71 u. f.

Wilhelm Ritter\*) und Crugnola\*\*) wiederholten. Rebhann in seiner „Theorie des Erddruckes und der Futtermauern, Wien 1871“ gibt auf Seite 439 eine Formel, welche nach Einführung derselben Bezeichnungsweisen wie oben lautet

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} (\nu - \varphi - \varphi') +$$

$+ \sqrt{[(\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} (\nu - \varphi - \varphi')) [\operatorname{ctg} (\nu - \varphi - \varphi') - \operatorname{ctg} \nu] 33}$  ein Ausdruck der unmittelbar aus Scheffler's Gleichung für gewöhnlichen Erddruck resultirt, wenn daselbst  $-\varphi$  statt  $\varphi$  und  $-\varphi'$  statt  $\varphi'$  gesetzt wird. Es muss bemerkt werden, dass hiernach  $\gamma$  für  $\nu = \varphi + \varphi'$  in Null überginge, so dass in diesem Falle eine horizontale Gleitfläche entstände, und der nöthige Schub unendlich gross würde, oder bei  $\nu \leq \varphi + \varphi'$  jedes Fortschieben unmöglich wäre. Setzt man wie Aug. Ritter\*\*\*)  $\varphi' = 0$ , so liefert Formel (33) für  $\nu = 90^\circ$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \left( \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right)$$

Für die zum Fortschieben der Erde nöthige Kraft, welche Lahmeyer als Uebersetzer Poncelet's Hebkraft nannte, führte Culmann den Namen Schub und Rebhann passiver Erddruck ein. Scheffler, de Lafont, Winkler und Ott behandelten den betreffenden Gegenstand nicht. Considère, †) Mohr, ††) Rankine †††)

\*) Die Statik der Tunnelgewölbe von Wilhelm Ritter, Berlin 1879. S. 23—25.

\*\*) Sulla spinta delle terre etc. p. c. d. Ing. Gaetano Crugnola, Torino 1880. p. 99 u. f.

\*\*\*) Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik von Aug. Ritter, Dr. Phil. etc. Hannover 1876.

†) Annal. des ponts et chaussées 1870, I. Sem. S. 561 u. f.

††) Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover 1871—1872. Vgl. Mohr bezüglich Considère.

†††) A manual of applied mechanics (in der 5. Aufl. S. 222—221).

und Weyrauch \*) haben auch hier eine Betrachtung des kleinsten Elementes eingeführt und ist nach ihnen bei horizontaler Oberfläche und innerhalb gewisser Grenzen bei beliebig geneigter Mauer  $\gamma = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ . Hierbei setzten sie voraus, dass der Druck auf eine horizontale Fläche in allen Punkten derselben ein gleicher sei, also genau dem Producte aus der Tiefe dieser Ebene unter der Oberfläche in das specifische Gewicht der Schüttung entspreche, eine beim Schube jedenfalls gewagtere Annahme als beim Drucke. Bei letzterem konnte man immer sagen, es sei die Erde nicht im Augenblicke des Absturzes, sondern früher betrachtet worden und dass die Umgrenzungen nur einen Theil der Erdmasse, welche man sich als früher unendlich gross denken könne, ersetze, ohne an den statischen Verhältnissen etwas zu ändern; beim Schube ist eine solche Betrachtungsweise nicht möglich; da handelt es sich blos um den Augenblick des Rutschens und die Wandpressung bewirkt noch vor demselben eine unbekannte Umlagerung der Theilchen.

## 2. Versuche bei horizontaler Oberfläche, verticaler Wand, horizontaler Verschiebung.

Die Versuche wurden in ganz ähnlicher Weise, wie die oben beschriebenen, vorgenommen, nur mit dem Unterschiede, dass das betreffende die Wand darstellende Holzklötzchen nicht weggezogen, sondern gegen den Sand gepresst wurde. Die Verschiebung erfolgte immer in horizontaler Richtung und wurde nur Rheinsand benützt.

Bei Nummer 76 bis 82 blieben die Seitenumfassungen fest und blos die Wand wurde verschoben; da dieses möglicher Weise  $\gamma$  hätte beeinflussen können, wurden bei 83

---

\*) Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen, Wien 1881, S. 29 u. f.

die Seitenumfassungen mit der Wand verschoben, so dass nur die Bodenplatte an Ort und Stelle blieb.

Tab. 26.

Nummer	Höhe der Schüttung cm.	Grösse der Verschiebung cm.	Entfernung der rückwärtigen Begrenzung v. der Wand cm.	$\gamma$	Entfernung des Gleitflächenfusses v. Fusse der Wand cm.	Anmerkung
76	4,5	?	5,8	58°	3,0	Die Gleitfläche ging durch die Oberkante der Rückwand
77	2,5	?	6,0	40°	2,0	
78	2,2	0,8	—	34°	0,8	Der Sand war rückwärts abgöbscht. Trotzdem verschob er sich nicht vollständig; sondern liess ein Prisma rutschen.
79	2,5	0,6	—	34°	1,5	
80	2,6	0,6	—	34°	2,5	
81	—	4,0	—	Mehrere Gleitflächen		
82	—	4,0	—	Mehrere Gleitflächen		
83	—	?	—	34°	1,6	

vgl. Fig. 29, 30 u. 31.

Es lässt sich folgendes Gesetz aussprechen:

Bei horizontaler Oberfläche und verticaler Wand bildet sich bei einer rückwärts unbegrenzten Sandmasse eine ebene Gleitfläche, welche unter einem grösseren Winkel als  $\frac{1}{2}$  ( $90^\circ - \varphi$ ) ansteigt, und nicht durch den Fuss der Wand geht. Bei rückwärtiger Begrenzung wird die Gleitfläche um so steiler, je geringer die Entfernung zwischen der Rückwand und der Vorderwand ist.

Bei der Verschiebung wellt sich der an der Wand anstossende Theil der Oberfläche. Bei grösserer Verschiebung entstehen mehrere zum Theil gekrümmte Gleitflächen, die Oberfläche wölbt sich etwas stärker ohne auffallende Erscheinungen zu zeigen; im Innern hingegen bilden sich Verwerfungen, wie sie bisher nur bei cohärirenden Körpern, die einem grossen Drucke ausgesetzt sind, bekannt waren, und es soll die Aehnlichkeit dieser in kleinem Maassstabe beobachteten Vorgänge mit den Schichtenknickungen, wie sie die Gebirge im grossen Dimensionen zeigen, besonders hervorgehoben werden.

### 3. Versuche bei horizontaler Oberfläche, vorgeneigter Wand und Verschiebung normal zur Wand.

Diese Versuche wurden mit dem Metallapparate in der Weise ausgeführt, dass der bewegliche Theil der Bodenfläche mit der vorschraubbaren Wand bis zur gewünschten Neigung niedergeklappt wurde, der Sand also rückwärts auf einer horizontalen, vorne auf einer zur Wand senkrechten Bodenfläche ruhte. Das Messingplättchen, welches die Wand vorstellte, wurde um es rau zu machen, mit Sand beklebt.

Tab. 27.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\alpha$	Grösse der Verschiebung cm.	$\gamma$	Anmerkung
84	$70^\circ$	$20^\circ$	1,0	$37^\circ$	} Die rückwärtige Begrenzung verursachte eine steile Gleitfläche. Die rückwärtige Begrenzung war weiter von der Wand entfernt als bei 84 und 85
85	$70^\circ$	$20^\circ$	1,4	$40^\circ$	
86	$70^\circ$	$20^\circ$	1,2	$33^\circ 30'$	
87	$56^\circ$	$34^\circ$	0,8	$35^\circ 30'$	
88	$20^\circ$	$70^\circ$	1,2	$66^\circ$	
89	$10^\circ$	$80^\circ$	?	$74^\circ$	
90	$0^\circ$	$90^\circ$	1,4	90	

Vergl. Fig. 32 u. 33.

Die Gleitebenen fielen demnach bei Verschiebungen, welche unter einer geringeren Neigung als jener der natürlichen Böschung erfolgten, in die Verlängerung des geneigten Bodentheiles, auf welchem die Wand sich empor bewegte. Bei flacherer Verschiebung stieg die Gleitfläche unter dem Neigungswinkel der natürlichen Böschung an. Die Gleitfläche ging nicht nur bei 84 bis 86, sondern scheinbar auch bei 87 bis 90 durch den Fuss der Wand.

Fasst man die wichtigeren Resultate dieser Untersuchung zusammen, so lauten dieselben:\*)

Beim Absturz trockenen Sandes setzt sich immer ein verticaler Cylinder in Bewegung. Hierbei nimmt die Schichtensenkung von unten nach oben ab. Der Druck auf eine Oeffnung (Kreisfläche, Stollen etc.) entspricht einer Gleichung

$$K = \frac{\sigma F^2}{2u} \cdot \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Bei horizontaler Verschiebung einer verticalen oder vorgeneigten Stützmauer oder beim Umkippen derselben um ihren inneren Fuss steigt bei horizontaler Sandoberfläche die entstehende Gleitebene unter  $\gamma = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$  an; eine Verschiebung schräg nach abwärts hat ein grösseres  $\gamma$  zur Folge. Man rechne bei verticalen oder vorgeneigten Stützmauern nach Mohr, Weyrauch oder anderen Anhängern der „strengen“ Theorie.

Bei horizontaler Verschiebung einer rückgeneigten Stützmauer oder beim Umkippen um ihren inneren Fuss ist

$$\gamma = \frac{90^\circ + \nu}{2}.$$

$$\text{Der Erddruck ist } D = \frac{\sigma h^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \nu \sin \frac{\nu - \varphi}{2} \sin \left( \varphi' + \frac{\nu + \varphi}{2} \right)}$$

worin sich  $\varphi'$  aus  $\sin \varphi' = \operatorname{tg} \varphi \cos \nu$  näherungsweise berechnen lässt.

Bei Verschiebung des Sandes mittelst einer Wand bildet sich bei horizontaler Oberfläche und Wandbewegung eine Gleitebene, deren  $\gamma > 1/2 (90 - \varphi)$  ist. Eine der

---

\*) Es bedeutet:  $\sigma$  spezifisches Gewicht der Schüttung,  $u$  Umfang der Bodenöffnung,  $F$  Fläche der Bodenöffnung,  $\varphi$  Neigungswinkel der natürlichen Böschung,  $\nu$  Winkel zwischen der Wand und der Horizontalen,  $\gamma$  Winkel zwischen der Gleitfläche und der Horizontalen,  $h$  Höhe der Wand.

schiebenden Vorderwand nahe Rückwand bewirkt die Entstehung einer steileren Gleitebene. Sand kann ähnliche Schichtenknickungen erfahren wie cohäirende Massen.

---

Vorliegende Arbeit wurde in den Laboratorien der Herren Professoren Dr. Wüllner und Dr. Michaelis ausgeführt und es stellte hierbei auch Herr Geheimer Regierungsrath von Kaven die Mittel seines Fonds zur Verfügung. Es werde den genannten Herren Professoren für ihre bereitwillige Unterstützung, sowie Herrn Privat-Dozent Dr. La Coste für vielfache Rathschläge und häufige Hilfe bei Vornahme der Versuche der beste Dank des Verfassers an dieser Stelle ausgedrückt.

---

Autor	Verticale Wand $\gamma$	Geneigte Wand $\gamma$
Coulomb	$\frac{\varphi + 90^0}{2}$	
Prony	$\frac{\varphi + 90^0}{2}$	$\frac{\varphi + 90^0}{2}$
Andoy Français Navier	$\frac{\varphi + 90^0}{2}$	$\frac{\varphi + v}{2}$
Hagen	$\text{arcctg} \left[ \sqrt[3]{\text{ctg} \frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\text{tg} \frac{\varphi}{2}} \right]$ z. B. für $\varphi = 34^0$ , $\gamma = 50^0 58'$	
Poncelet Saint-Guilhem Scheffler v Rebhann Culmann	$\text{ctg} \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\text{tg}(\varphi + \varphi') [\text{tg}(\varphi + \varphi') + \text{ctg} \varphi]} - \text{tg}(\varphi + \varphi') \right\}$	$\text{ctg} \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\text{tg}(\varphi + \varphi' + v - 90^0) - \text{tg}(v - 90^0)} \times \right.$ $\left. \sqrt{\text{tg}(\varphi + \varphi' + v - 90^0) + \text{ctg} \varphi - \text{tg}(\varphi + \varphi' + v - 90^0)} \right\}$
Winklers prakt. Regel	wobei das Zeichen + gilt für $\varphi + \varphi' < 90^0$ und das Zeichen - für den kaum vorkommenden Fall, dass $\varphi + \varphi' > 90^0$ ist.	wobei das Zeichen + für $\varphi + \varphi' + v < 180^0$ und das Zeichen - für $\varphi + \varphi' + v > 180^0$ gilt.
Holzhey v. Ott Wilhelm Ritter Crugnola's Regel	Die Formeln stammen von Scheffler; doch setzte Scheffler wohl aus Versehen nur das + Zeichen. Sämtliche Autoren geben sehr einfache graphische Methoden, die obigen Formeln entsprechen. für $\varphi' > \varphi$ ist statt $\varphi'$ in obigen Formeln $\varphi$ zu setzen.	
	Beispiele: $\varphi' = \varphi = 33^0 40$ gibt $\gamma = 56^0 30'$  $\varphi' = 0$ gibt $\gamma = \frac{\varphi + 90^0}{2}$	Beispiele: $\varphi' = \varphi, v = 180^0 - \frac{\varphi + 90^0}{2}$ gibt $\gamma = \frac{\varphi + 90^0}{2}$ $\varphi' = 0$ , gibt $\gamma = \frac{v + \varphi}{2}$  Es ist noch zu bemerken, dass für $v > 180^0 - \frac{\varphi + 90^0}{2}$ und $\varphi > \varphi'$ Scheffler $\gamma = \frac{\varphi + 90^0}{2}$ setzt; ob eine zweite Gleitfläche $\gamma = 180^0 - \frac{\varphi + 90^0}{2}$ hierbei entsteht, wird nicht ausdrücklich gesagt. Bestimmt nimmt dieses Winkler an. In den anderen Theorien wird keine doppelte Gleitfläche erwähnt.
Levy, Winklers Theorie, Considère's Theorie, Boussinesq Cramer	$\gamma$ unbekannt und zwar entsteht nach Winkler, Considère eine gekrümmte Gleitfläche, nach Boussinesq und Cramer ist der untere Theil krumm, der obere unter $\frac{90^0 + \varphi}{2}$ geneigt	für $v = 180^0 - \frac{90^0 + \varphi}{2}$ und $\varphi' > \varphi$ sei $\gamma = \frac{90^0 + \varphi}{2}$
Mohr, Rankine Considère's Rechnungsregel, Weyrauch*)	$\frac{\varphi + 90^0}{2}$	für $v = 90^0$ bis $180^0$ bei nicht zu glatter Wand sei $\gamma = \frac{\varphi + 90^0}{2}$

\*) Auf Grund einer unrichtigen Rechnung findet Kreuter, Professor an der Staatsgewerbeschule zu Brünn,  $\gamma = \frac{\varphi + v}{2}$  (vergleiche Zeitschrift für Baukunde, I. Bd., S. 181, ferner Wochenschrift des österr. Ing.- und Arch.-Vereines III. S. 8.)

