Sonder-Abdruck aus dem LI. Bde. der Sitzungsb. der kais. Akad. der Wissenschaften.

Über die Krümmung der Spectrallinien.

Von L. Ditscheiner.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. April 1865.)

(Mit 1 Tafel.)

Wenn man durch ein Prisma, dessen brechende Kante vertical gestellt ist, eine Reihe verticaler Linien, etwa die Kanten eines Fensterkreuzes betrachtet, so sieht man diese nicht in ihrer ursprünglichen Gestalt, sondern sie erscheinen, von der durch das Prisma gleichzeitig verursachten Dispersion abgesehen, gekrümmt. Jede dieser krummen Linien besitzt in der horizontalen Richtung eine Axe, da sie über und unter derselben gleichmässig sich ausdehnt und in dem Durchschnittspunkte mit dieser Axe eine verticale Tangente, von der sich die einzelnen Punkte, je weiter sie von der Axe entfernt sind, auch immer mehr in der Richtung gegen die Prismenkante entfernen [1]). Hat man das Prisma ursprünglich so gehalten, dass der in der horizontalen Ebene gegen das Auge austretende, von einer bestimmten Verticallinie kommende Strahl keinen sehr grossen Winkel gegen die Normale der dem Auge näher gelegenen Prismenfläche bildet, so kann man das Prisma um einen nicht unbedeutenden Winkel in dem einen oder dem andern Sinne drehen, ohne dass das Auge im Stande wäre, eine bedeutende Änderung in der Form der krummen Linie zu bemerken. Wird dieser Winkel grösser und hat man das Prisma so gedreht, dass die Prismenkante sich vom Auge entfernte, so wird die Krümmung eine immer bedeutendere, je mehr sich dieser Winkel jenem von 90 Graden nähert. Hat man aber das Prisma im entgegengesetzten Sinne gedreht, nähert man sich also dem senkrechten Austritte des genannten Strahles oder ist man, wie dies bei Substanzen mit kleinen Brechungsquotienten und bei kleinen brechenden Winkel noch möglich ist, über diesen hinausgegangen, so erreicht man bald die

[1]) v. Quintus Icilius. Experimentalphysik. S. 255.

Grenze der Totalreflexion, man ist also dann nicht mehr im Stande, die betreffende Linie zu beobachten. Da diese Drehung in den meisten Fällen nur wenige Grade betragen kann, so werden auch die während derselben eintretenden Änderungen in der Form der krummen Linie für das Auge nicht leicht merklich sein, nur so viel ist unmittelbar zu erkennen, dass die die Grenze der Totalreflexion bildende Linie mit der letzten noch sichtbaren Linie bezüglich der Form übereinstimmend ist. Da bei dieser Drehung alle Linien in demselben Sinne gekrümmt erscheinen, so wird auch keine derselben, wie das Prisma auch immer gestellt sein mag, gerade erscheinen können.

Betrachtet man durch ein solches Prisma einen verticalen Stab, so erscheint derselbe ebenfalls gekrümmt, aber man ist, wenn derselbe nur genügend biegsam ist, leicht im Stande demselben eine solche Form zu geben, dass er durch das Prisma angesehen, als gerade verticale Linie erscheint. Es besitzt dann in Wahrheit eine ähnliche Form, wie die durch das Prisma gesehenen geraden Linien nur wird er im entgegengesetzten Sinne gekrümmt sein müssen, seine convexe Seite wird gegen die Prismenkante gerichtet sein.

Aber nicht nur bei Beobachtung des Spectrums mit freiem Auge, sondern auch bei jenen Spectralapparaten, welche mit Collimator und Beobachtungsfernrohr versehen sind, tritt die Erscheinung von gekrümmten Spectrallinien auf; nur sind diese Linien im entgegengesetzten Sinne gekrümmt als jene, die sich bei Beobachtung mit freiem Auge zeigen, da durch das astronomische Beobachtungsfernrohr die ganze Erscheinung umgekehrt wird. Es ist dies besonders dann der Fall, wenn wegen Erreichung grösserer Intensität, die Brennweite der Objectivlinse des Fernrohres und der Collimatorlinse keine sehr grosse ist und wenn das Fernrohr ein höheres Spectrum im Gesichtsfeld zeigen soll, was bei gleicher Intensität nur durch eine höhere Spalte zu erreichen ist.

Mit der Anzahl der Prismen steigt unter übrigens gleichen Umständen die Abweichung der Spectrallinien von der geraden Linie.

Es gibt kaum einen Spectralapparat, bei welchem man nicht die Krümmung dieser Linien bei genauerer Beobachtung bemerken kann, ein Übelstand, der sich jedoch glückiicherweise, wenn auch auf Kosten der Intensität auf ein Minimum bringen lässt. Dort, wo man eine grössere Lichtintensität verlangt, wie etwa bei spectralanalytischen Untersuchungen, wo es sich auch nicht um eine genaue Messung handelt, ist die Krümmung der Linien von keinem schädlichen Einflusse und man kann sich dieselbe gefallen lassen. Bei schärferen Messungen aber kann diese Krümmung eine Ungenauigkeit verursachen, wenn nämlich das Prisma nicht sehr vollkommen aufgestellt ist, wenn also seine Kante nicht sehr genau parallel zur Spalte ist.

Der Grund dieser Erscheinung ist darin zu suchen, dass jene Strahlen, welche von Punkten unter oder über dem Durchschnittspunkte, der durch das Auge senkrecht auf die Prismenkante gelegten Ebene mit der betrachteten verticalen Linie, in das Auge gelangen, durch die Brechung im Prisma so abgelenkt werden, dass sie nach dem Austritte aus diesem nicht mehr in einer durch das Auge gehenden verticalen Ebene, sondern in einer Kegelfläche liegen. Es würde keinen Schwierigkeiten unterliegen, die Gleichung dieser Kegelfläche abzuleiten, man hätte nämlich durch einen das Auge repräsentirenden Punkt und durch irgend einen andern mit den unbestimmten Coordinaten x, y, z ausgezeichneten, eine Linie zu legen, den Durchschnitt dieser mit der einen Prismenfläche zu suchen, durch diesen Durchschnittspunkt den gebrochenen Strahl zu legen und endlich für dessen Durchschnittspunkt mit der zweiten Prismenfläche den abermals gebrochenen Strahl zu suchen. Durch die Bedingung, dass dieser letzte austretende Strahl durch einen Punkt der beobachteten Verticallinie gehen müsse, wird sich eine Relation für die gegenseitige Abhängigkeit der ursprünglich ganz beliebigen Coordination x, y, z gewinnen lassen, welche unmittelbar die gesuchte Gleichung der Kegelfläche liefert. Aber diese Gleichung ist eine so complicirte, dass ihre Discussion eine ungemein schwierige ist, wenn man sich nicht eine Bedingung stellt, welche wir schon im Voraus acceptiren wollen, die nämlich, dass die beobachtete Verticallinie in bedeutender oder unendlicher Entfernung von dem Prisma sich befinde, dass also die von einem Punkte dieser Verticallinie auf das Prisma fallenden Strahlen als parallel angesehen werden können.

Das Versetzen der Spalte, und als solche wollen wir in der Folge die beobachtete Verticallinie immer ansehen, geschieht aber bei den Spectralapparaten durch die Anwendung einer Collimatorlinse, in deren Brennpunkt die Spalte sich befindet. Für diesen Fall nun werden wir die Gleichung der oben bezeichneten Kegelfläche, deren Spitze dann im Mittelpunkte der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohres zu verlegen sein wird, aufsuchen; die erhaltenen Resultate werden also nur dann von Giltigkeit sein können, wenn die beobachtete Linie sehr weit von dem Prisma, also auch vom Auge entfernt ist.

Alle von irgend einem Punkte der Spalte ausgehenden Strahlen werden durch die Collimatorlinse bekanntlich in der Weise gebrochen, dass sie nach ihrem Austritte aus dieser, als zur Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkte der Linse parallel angesehen werden können, vorausgesetzt, dass die Spalte keine sehr bedeutende Höhe gegen die Brennweite der Linse habe. Die von Punkten, über oder unter dem Durchschnittspunkte der optischen Axe des Collimators mit der Spalte, durch die Linse kommenden Strahlen werden also mit dieser Axe einen gewissen Winkel bilden und also auch bezüglich des Prismas eine Einfallsebene besitzen, die nicht mit der Ebene der beiden Prismenflächennormalen zusammenfällt. Nach dem Austritte aus dem Prisma, werden die in ihrem Parallelismus durch die Brechung nicht gestörten Linien durch ein Fernrohr betrachtet, in einer durch den Brennpunkt der Objectivlinse senkrecht auf der optischen Axe stehenden Ebene wird das Bild der Spalte entstehen und zwar für jeden Punkt dort, wo die durch den Mittelpunkt der Objectivlinse parallel zu den aus dem Prisma kommenden Strahlen gezogene Linie diese Verticalebene schneidet. Ist das Prisma nicht zwischen Collimator und Fernrohr, so erscheint das Bild der verticalen Spalte wieder als verticale Linie; die durch den Mittelpunkt der Objectivlinse und jeden Punkt des Spaltenbildes gelegten Linien bilden eine Ebene. Durch die Brechung im Prisma aber werden die Strahlen so abgelenkt, dass die durch das Spaltenbild und den Mittelpunkt der Objectivlinse gelegten Linien eine Kegelfläche bilden. Diese Linien aber müssen nach ihrer Brechung durch das Prisma, wenn wir ihren Weg rückwärts verfolgen, zu der durch die Spalte und den Mittelpunkt der Collimatorlinse gelegten Ebene parallel sein, denn nur in diesem Falle werden sie durch die Collimatorlinse wieder zur verticalen Spalte geführt werden können. Diese Bedingung kann uns nun dazu dienen, die Gleichung der genannten Kegelfläche abzuleiten, mit ihrer Kenntniss kommen wir leicht zur Gleichung des Spaltenbildes, wir brauchen nur durch den Brennpunkt der Objectivlinse eine Verticalebene zu legen und den Durchschnitt derselben mit der Kegelfläche zu bestimmen.

Wir wählen ein rechtwinkliches Coordinatensystem $OXYZ$, so dass OY die Richtung der optischen Axe des Fernrohres ist und da es gleichgiltig, in welcher Entfernung vom Prisma die Objectivlinse desselben sich befindet, so wollen wir deren Mittelpunkt nach O verlegen, durch welchen Punkt gleichzeitig die Prismenkante, die also dann mit OZ zusammenfällt, geht. ON und ON' seien die Normalen der beiden Prismenflächen, ON jener der Fläche, in welcher der Eintritt der vom Spaltenbild kommenden, und ON' jener, durch welche der Austritt der gegen die Collimatorlinse nnd Spalte gehenden Lichtstrahlen erfolgt. Den Winkel der optischen Axe des Fernrohres mit der ersten Normalen ON bezeichnen wir mit α, er ist gleichzeitig der Einfallswinkel jenes Strahles, der während der Brechung in der Ebene der beiden Normalen bleibt, der also vom Mittelpunkte der Spalte in das Fernrohr gelangt. Den Winkel NON' beider Normalen, d. i. den Prismenwinkel selbst bezeichnen wir mit A. Durch einen Punkt mit den unbestimmten Coordinaten x, y, z und durch O legen wir eine gerade Linie, welche eine um O als Mittelpunkt gelegte Kugel vom Radius $= 1$ etwa in A schneidet. Die Winkel, welche diese Linie mit den drei Coordinatenaxen bildet, nämlich AX, AY und AZ sind gegeben durch

$$\cos a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos b = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos c = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Der Winkel, welchen dieser einfallende Strahl mit der ersten Normale ON bildet, nämlich $AM = m$ wird bestimmt durch

$$\cos m = \cos b \cos \alpha + \sin b \sin \alpha \cos AYM$$

und wegen $\cos AYM = \cos AYX = \frac{\cos a}{\sin b}$ wird

$$\cos m = \cos b \cos \alpha + \cos a \sin \alpha$$

$$= \frac{y \cos \alpha + x \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

oder

$$\sin m = \sqrt{\frac{(y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Der in das Prisma eintretende gebrochene Strahl schneidet die Kugel in einem Punkte des grössten Kreises AN, und seine Lage ergibt sich, unter μ den Brechungsquotienten einer bestimmten Farbe des Prismas verstanden durch die Relation $\mu \sin BN = \sin AN$, woraus wir, wenn BN mit m' bezeichnet, und der Kürze halber $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gesetzt wird, finden:

$$\sin m' = \frac{1}{\mu R} \sqrt{(y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 + z^2}.$$

und

$$\cos m' = \frac{1}{\mu R} \sqrt{R^2 \mu^2 - (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 - z^2}.$$

Den Einfallswinkel des Strahles OB gegen die zweite Prismenfläche, nämlich BN', bezeichnen wir mit n und erhalten

$$\cos n = \cos m' \cos A + \sin m' \sin A \cos w$$

und wegen

$$\cos w = \frac{\cos b - \cos m \cos \alpha}{\sin m \sin \alpha}$$

$$= \frac{y \sin \alpha - x \cos \alpha}{\sqrt{(y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 + z^2}}$$

wird, nach Einführung der Werthe für $\cos m'$ und $\sin m'$ und nach einigen Reductionen,

$$\cos n = \frac{1}{\mu R} \Big[\cos A \sqrt{\mu^2 R^2 - (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 - z^2}$$

$$+ (y \sin \alpha - x \cos \alpha) \sin A\Big],$$

woraus

$$\sin^2 n = \frac{1}{\mu^2 R^2} \Big[\mu^2 R^2 \sin^2 A + z^2 \cos^2 A$$

$$- (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 (\sin^2 A - \cos^2 A)$$

$$- 2(y \sin \alpha - x \cos \alpha) \sin A \cos A \sqrt{\mu^2 R^2 - (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 - z^2}\Big].$$

Der schliesslich aus dem Prisma austretende Strahl OC wird die Kugelfläche in dem grössten Kreise $N'B$ schneiden, und wenn $N'C=n'$ gesetzt wird, ist wegen $\sin n' = \mu \sin n$

$$\sin^2 n' = \frac{1}{R^2}\Big[\mu^2 R^2 \sin^2 A + z^2 \cos^2 A$$
$$-(y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2(y\sin\alpha - x\cos\alpha)\sin A\cos A\sqrt{\mu^2R^2-(y\sin\alpha-x\cos\alpha)^2-z^2}\Big]$$

Die von diesen austretenden Strahlen zu erfüllende Bedingung, dass sie alle in einer durch den Punkt O gehenden Verticalebene liegen, da sie alle durch den Punkt O gehend zu einer bestimmten verticalen Ebene parallel sein müssen, werden wir dadurch ausdrücken können, dass, welche Werthe x, y, z auch immer haben mögen, der Winkel $N'D$ constant sein muss, vorausgesetzt, dass der grösste Kreis CD durch Z geht. Um nun $N'D$ zu bestimmen, brauchen wir vorerst den Winkel $CN'D = w'$. Es wird aus dem sphärischen Dreiecke $BN'N$

$$\sin w' = \frac{\sin m'}{\sin n}\sin w = \frac{z}{\mu R\sin n}$$
$$= \frac{z}{R\sin n'}.$$

Aus dem rechtwinklichen sphärischen Dreiecke $N'CD$ erhalten wir sodann, wenn die Seite $N'D$ desselben mit v bezeichnet wird

$$\operatorname{cotg} v = \frac{\operatorname{cotg} n'}{\cos w'}$$

und quadrirt, ferner statt $\operatorname{cotg} n'$ und $\cos w'$ die entsprechenden Sinuse eingeführt wird nach einiger Reduction

$$\operatorname{cotg}^2 v = \frac{R^2(1-\sin^2 n')}{R^2\sin^2 n' - z^2}$$

woraus

$$\sin^2 v = \frac{R^2\sin^2 n' - z^2}{R^2 - z^2}.$$

Führt man nun statt $\sin^2 n'$ seinen oben angeführten Werth ein und bedenkt man, dass $R^2 - z^2 = x^2 + y^2$ ist, so erhält man nach einer kleinen Reduction und nach Hinwegschaffung des Bruches

$$(x^2+y^2)\sin^2 v = (\mu^2 R^2 - z^2)\sin^2 A$$
$$-(y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2(y\sin\alpha - x\cos\alpha)\sin A\cos A\sqrt{\mu^2 R^2-(y\sin\alpha-x\cos\alpha)^2-z^2}.$$

Um $\sin^2 v$ zu bestimmen, bedenken wir, dass diese Gleichung auch giltig sein muss für jenen Strahl, der mit der optischen Axe des Fernrohres zusammenfällt, für welchen aber $x = z = 0$ ist. Durch Substitution dieser Werthe erhält man da y^2 zu beiden Seiten ebenfalls wegfällt

$$\sin^2 v = \mu^2\sin^2 A - \sin^2\alpha(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2\sin\alpha\sin A\cos A\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}$$
$$= \sin^2 A(\mu^2-\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha\cos^2 A - 2\sin\alpha\sin A\cos A\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}$$
$$= (\sin\alpha\cos A - \sin A\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha})^2.$$

Es wird somit die Gleichung für unsere Kegelfläche, wenn wir statt R^2 seinen Werth $x^2+y^2+z^2$ setzen, ferner die Glieder, welche x^2+y^2 ebenso jene, welche z^2 allein enthalten, zusammen nehmen

$$(x^2+y^2)\left[\sin^2\alpha(\sin^2 A-\cos^2 A) + 2\sin\alpha\sin A\cos A\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}\right]$$
$$+z^2(\mu^2-1)\sin^2 A - (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2(y\sin\alpha - x\cos\alpha)\sin A\cos A\sqrt{M} = 0,$$

wobei $M = (x^2+y^2)\mu^2 - (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2 + z^2(\mu^2-1)$.

Um nun die Gleichung des durch die Objectivlinse gebildeten Spaltenbildes zu erhalten, hätten wir in dieser Gleichung nur $y=p$, d. i. die Brennweite dieser Linse zu setzen; da wir es hier aber mit einer Kegelfläche zu thun haben, so genügt es $y=1$ zu substituiren, wir haben dann nur in der so erhaltenen Gleichung um auf jene des eigentlichen Spaltenbildes zu kommen statt x und z, $\frac{x}{p}$ und $\frac{z}{p}$ zu setzen.

Um aber eine weitere Discussion dieser Gleichung zu ermöglichen, müssen wir uns noch einige Abkürzungen erlauben, die wir vorerst bei einem speciellen Falle anwenden wollen; wir meinen jenen, für welchen $\alpha = 0$ und $A = 45°$ ist, für welchen also bei einem $45°$ Prisma, der horizontal in das Auge kommende Strahl senkrecht gegen die Prismenfläche austritt. Wir erhalten unter dieser Bedingung, nachdem $y = 1$ gesetzt worden ist, folgende Gleichung

$$z^2(\mu^2-1)+2x\sqrt{(x^2+1)\mu^2-x^2+z^2(\mu^2-1)}=0,$$

aus welcher man unmittelbar erkennt, dass x nur negativer Werthe fähig ist, da μ grösser als 1 und die Wurzelgrösse als von cos m' herrührend, nur einen positiven Werth haben kann. Wird diese Gleichung nach z aufgelöst, so erhält man

$$z=\pm\sqrt{\frac{2x}{\mu^2-1}(x\pm\mu\sqrt{1+x^2})}.$$

Da x negativ und $\mu\sqrt{1+x^2}$ stets grösser als x ist, so ist unter der Wurzel nur das negative Zeichen erlaubt, es kann also z nur zwei Werthe erhalten, die sich aber bezüglich des Zeichens unterscheiden; wesswegen auch die Curve um die x Axe symmetrisch ist.

Nehmen wir nun an, dass wir die krumme Linie, wie dies auch thatsächlich bei den Spectralapparaten der Fall ist, nicht sehr weit über die x Axe beobachten können, so wird es erlaubt sein, x^2 gegen die Einheit zu vernachlässigen, wodurch wir erhalten, wenn wir gleichzeitig die ganze Gleichung auf das Quadrat erheben

$$z^2=\frac{2x^2}{\mu^2-1}-\frac{2\mu x}{\mu^2-1}$$

eine Gleichung, die eine Hyperbel repräsentirt. Aber es ist in diesem Falle auch erlaubt, x^2 gegen x und z^2 zu vernachlässigen, indem die Erfahrung lehrt, dass x gegen z sehr klein ist, es wird also x^2 gegen z^2 noch viel kleiner sein. Wir kommen so auf

$$z^2=-\frac{2\mu}{\mu^2-1}x$$

eine Gleichung einer Parabel.

Ganz dasselbe, was wir der Einfachheit wegen, bei einem speciellen Falle gethan, kann man auch mit unserer obigen allgemeinen Gleichung vornehmen und sie so auf jene einer Parabel zurückführen.

Setzen wir in unserer allgemeinen Gleichung für die Kegelfläche $y = 1$, erheben wir dieselbe auf das Quadrat, so können wir, da auch z gegen die Einheit als sehr klein angenommen werden muss, alle Glieder, welche höhere als die zweiten Potenzen der Variablen, so wie jene, welche x^2 allein enthalten, weglassen und erhalten so nach einigen Reductionen

$$\begin{aligned}(\mu^2-1)\sin A\,(\cos A\sin\alpha-\sin A\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha})z^2\\ =2\cos\alpha\,[\sin A\cos A\,(\mu^2-2\sin^2\alpha)\\ +\sin\alpha\,(\sin^2 A-\cos^2 A)\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}]\,x.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist aber noch einer weiteren Vereinfachung fähig, wenn wir an den geeigneten Orten statt dem Einfallswinkel α, den ihm entsprechenden Brechungswinkel β einführen, nämlich statt $\sin\alpha$ und $\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}$ setzen, $\mu\sin\beta$ und $\mu\cos\beta$. Man erhält so

$$\begin{aligned}(\mu^2-1)\sin A\,(\cos A\sin\beta-\sin A\cos\beta)\,z^2\\ =2\mu\cos\alpha\,[\sin A\cos A\,(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\\ +\sin\beta\cos\beta\,(\sin^2 A-\cos^2 A)]\,x\end{aligned}$$

und wegen $2\sin a\cos a=\sin 2a$ und $\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$, wird

$$\begin{aligned}-(\mu^2-1)\sin A\sin(A-\beta)\,z^2\\ =\mu\cos\alpha\,(\sin 2A\cos 2\beta-\sin 2\beta\cos 2A)\,x.\end{aligned}$$

Hieraus

$$z^2=-\frac{\mu\cos\alpha\sin 2(A-\beta)}{(\mu^2-1)\sin A\sin(A-\beta)}\,x$$

und schliesslich

$$z^2=-\frac{2\mu\cos\alpha\cos(A-\beta)}{(\mu^2-1)\sin A}\,x$$

als die Gleichung unseres Spaltenbildes für eine Brennweite $=1$ der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohres. Ist diese Brennweite aber $=p$, so wird

$$z^2=-\frac{2p\mu\cos\alpha\cos(A-\beta)}{(\mu^2-1)\sin A}\,x.$$

Wir haben diese Gleichung abgeleitet unter der Voraussetzung, dass der in der horizontalen Ebene von der Objectivlinse auf das Prisma fallende Strahl die Richtung gegen die Prismenkante habe, wie etwa bei der Minimumstellung. Bei Prismen aber von kleinem brechenden Winkel oder von hinreichend kleinen Brechungsquotienten kann dieser Strahl auch so gehen, dass er sich immer mehr von der Prismenkante zu entfernen sucht. Die Ableitung für diesen Fall ist ganz dieselbe, wie die eben durchgeführte, nur haben die Normalen der Prismenflächen gegen den einfallenden Strahl, d. i. die y Axe die Lage wie etwa in Fig. 2. Wir können aber die entsprechende Gleichung aus unserer obigen einfach dadurch erhalten, dass wir statt α, $-\alpha$ also auch statt β, $-\beta$ setzen, wodurch

$$z^2 = \frac{2p\mu \cos\alpha \cos(A+\beta)}{(\mu^2-1)\sin A} x$$

wird. Es wird jedoch diese Formel nur sehr selten in Anwendung kommen, da sie nur bei kleinen Prismenwinkeln und kleinen Brechungsquotienten möglich wird, ein Fall, der bei Spectralapparaten geradezu vermieden wird.

Bei der ersteren Formel erkennen wir sofort, dass der Parameter, der uns als Mass für die Krümmung dienen kann, unter sonst gleichen Umständen desto grösser wird, je grösser die Brennweite der Objectivlinse des Fernrohres ist. Die Anwendung von Fernröhren mit grösserer Brennweite wird also auch weniger krumme Spectrallinien ergeben.

Je grösser der Brechungsquotient μ des Prismas ist, desto grösser wird auch die Krümmung der Linien sein, denn für ein grösseres μ wird sowohl der Bruch $\frac{\mu}{\mu^2-1}$ als auch $\cos(A-\beta)$ kleiner.

Endlich wird auch die Krümmung eine desto bedeutendere sein, je grösser der brechende Winkel A des Prismas ist; denn $\sin A$ im Nenner wird grösser, $\cos(A-\beta)$ im Zähler kleiner.

Was den Einfluss der Stellung des Prismas, die von α abhängig, anbelangt, so ist dieser nicht sogleich zu erkennen, da $\cos\alpha$ bei einem Wachsen von α kleiner wird, während $\cos(A-\beta)$ grösser wird. Es ist in diesem Falle ein Maximum des Parameters bei einer gewissen Stellung des Prismas zu erwarten. Bei unserer zweiten Gleichung ist dies jedoch nicht der Fall, da sowohl $\cos\alpha$ als auch $\cos(A+\beta)$ bei einem Wachsen von α immer kleiner werden. Um den Werth von α oder des ihm entsprechenden β zu finden, bei welchen der Parameter P ein Maximum wird, substituiren wir in dessen Gleichung statt $\cos\alpha$ den entsprechenden Werth $\sqrt{1-\mu^2\sin^2\beta}$

und setzen den ersten Differenzialquotienten $\frac{dP}{d\beta}=0$, wodurch wir die Gleichung erhalten

$$\mu^2 \sin\beta \cos(A-2\beta) = \sin(A-\beta),$$

welche leicht auf die Form

$$\operatorname{tg}^3\beta - \frac{2\mu^2-1}{\mu^2-1}\operatorname{tg} A \operatorname{tg}^2\beta - \frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\mu^2-1}\operatorname{tg} A = 0$$

gebracht werden kann. Es liefert uns diese Gleichung jenen Werth von β, für welchen P ein Maximum.

Aus dieser Gleichung erhält man jederzeit drei reele Wurzeln, von welchen jedoch nur eine in unserem Falle angewendet werden kann, denn dieses β ist gewissen Bedingungen unterworfen. Einmal darf es nicht negativ sein, da unsere Gleichung für negative β kein Maximum besitzt, dann darf $\sin\beta$ nie grösser als $\frac{1}{\mu}$ sein, weil α nie grösser als 90° sein kann, endlich ist es wegen der möglichen Totalreflexion an der zweiten Prismenfläche an die Bedingung gebunden $\mu\sin(A-\beta)=1$, β darf nämlich nie kleiner sein als der daraus resultirende Werth.

Eine Wurzel dieser Gleichung aber ist stets negativ und liegt zwischen

$$\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}} \text{ und } \operatorname{tg}\beta = 0,$$

die eine positive Wurzel liegt zwischen

$$\operatorname{tg}\beta = 0 \text{ und } \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}, \text{ wobei } \sin\beta = \frac{1}{\mu}$$

die zweite positive endlich zwischen

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(2\mu^2-1)\operatorname{tg} A + \sqrt{(2\mu^2-1)^2 + 4(\mu^4-1)}}{2(\mu^2-1)}.$$

Es ist sogleich ersichtlich, dass nur die erste positive Wurzel ein mögliches Maximum zu liefern im Stande, wenn überhaupt ein solches erlaubt ist, denn es kann der Fall eintreten, dass das so erhaltene β zwischen 0 und jenen Werth liegt, den $\mu\ \sin(A-\beta) = 1$ gibt, ein Fall, für welchen das Maximum wegen bereits eingetretener Totalreflexion nicht mehr zu beobachten ist.

Ich habe für einen mittleren Brechungsquotienten $\mu = 1{\cdot}5$ und für verschiedene Prismenwinkel die Werthe für die drei Wurzeln gerechnet.

Für $A = 26^\circ\ 33'\ 55''$ ($\operatorname{tg} A = 0{\cdot}5$) sind dieselben

$$-55^\circ\ 33'\ 38'';\ 8^\circ\ 11'\ 6'';\ 68^\circ\ 15'\ 6''$$

da β nicht grösser als $41^\circ\ 48'\ 38''$ und nicht kleiner als $-15^\circ 14' 43''$ sein kann, so ist nur $\beta = 8^\circ\ 11'\ 6''$ anzuwenden. Bei einem Einfallswinkel $\alpha = 12^\circ\ 19'\ 9''$ wird also das Maximum des Parameters eintreten, also auch die entsprechende Linie am wenigsten gekrümmt erscheinen.

Für $A = 45^\circ$ sind die Wurzeln

$$-44^\circ\ 54'\ 39'';\ 15^\circ\ 39'\ 9'';\ 70^\circ\ 38'\ 31''.$$

Da β nicht grösser als $41^\circ\ 48'\ 38''$ und nicht kleiner als $3^\circ\ 11'\ 22''$ sein kann, so ist nur $\beta = 15^\circ\ 39'\ 9''$ zu gebrauchen, für welches $\alpha = 23^\circ\ 52'\ 21''$ wird.

Für $A = 60^\circ$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$-64^\circ\ 5'\ 22'';\ 18^\circ\ 35'\ 47'';\ 75^\circ\ 59'\ 32''.$$

Da β wieder nicht grösser als $41^\circ\ 48'\ 38''$ und nicht kleiner als $18^\circ\ 11'\ 22''$ sein darf, so ist wieder nur die erste positive Wurzel anzuwenden erlaubt, aber der entsprechende Werth von β nähert sich schon sehr der Grenze, bei welcher die Totalreflexion beginnt; α wird in diesem Falle $= 28^\circ\ 34'\ 40''$. Der Strahl, für welchen $\alpha = 27^\circ\ 55'\ 13''$ ist, wird schon total reflectirt.

Endlich ist für $A = 80^\circ$ das Maximum nicht mehr zu beobachten, denn keine der drei Wurzeln

$$-80^\circ\ 23'\ 11'';\ 24^\circ\ 56'\ 1'';\ 84^\circ\ 40'\ 35''$$

gibt ein hier mögliches β, da β kleiner als $41^\circ\ 48'\ 38''$ und grösser als $38^\circ\ 11'\ 22''$ sein muss.

Um das Maximum des Parameters oder die Stellung des Prismas, bei welcher die Krümmung der Spectrallinien die geringste ist, beobachten zu können, wird man also Prismen mit kleinen brechenden Winkeln wählen müssen.

Für die Minimumstellung des Prismas, welche bei Spectralapparaten meistens oder wenigstens nahezu eingehalten werden muss, ist $\beta = \frac{A}{2}$, somit $\cos\alpha = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\frac{A}{2}}$, also auch die Gleichung einer Spectrallinie

$$z^2 = -\frac{2\mu p \sqrt{1-\mu^2 \sin^2\frac{A}{2}} \cdot \operatorname{Cos}\frac{A}{2}}{(\mu^2-1)\sin A} x$$

$$= -\frac{\mu p \sqrt{1-\mu^2 \sin^2\frac{A}{2}}}{(\mu^2-1)\sin\frac{A}{2}} x.$$

Alle jene Strahlen, welche von einem Punkte ausgehend, an der zweiten Prismenfläche die Grenze der Totalreflexion bilden, liegen ebenfalls in einer Kegelfläche, deren Gleichung aus unseren bereits abgeleiteten sich ergibt. Für die Grenze der Totalreflexion ist nämlich die Bedingung gestellt, dass $\sin n' = 1$ sei. Wenn wir diese Bedingung in unsere Gleichung für $\sin n'$ einführen, so gibt diese unmittelbar die Gleichung der genannten Kegelfläche. Sie nimmt aber eine einfachere Form an, wenn wir das Coordinatensystem so wählen, dass die y Axe senkrecht auf der ersten Prismenfläche, dass also $\alpha = 0$ wird, wir bekommen dann nach einer kleinen Reduction

$$x^2(\mu^2-2)\sin^2 A + y^2(\mu^2\sin^2 A - 1) + z^2(\mu^2-1)\sin^2 A$$
$$= -2x\sin A \cos A \sqrt{(\mu^2-1)x^2 + \mu^2 y^2 + (\mu^2-1)z^2}$$

oder auch

$$[x^2(\mu^2-2)\sin^2 A + y^2(\mu^2\sin^2 A - 1) + z^2(\mu^2-1)\sin^2 A]^2$$
$$= 4x^2 \sin^2 A \cos^2 A\,[(\mu^2-1)x^2 + \mu^2 y^2 + (\mu^2-1)z^2].$$

Setzt man statt y nun die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Prismenfläche, so erhält man den Schnitt der Kegelfläche mit dieser Ebene.

Würde man nun diese Kegelfläche durch eine Ebene schneiden die senkrecht auf jenem Strahl steht der in der horizontalen

Ebene auf das Prisma gelangend die Grenze der Totalreflexion bildet, also durch eine Ebene schneiden, die mit der y Axe einen Winkel $90 - \alpha$ bildet, wobei $\sin\alpha = \mu \sin\beta$ und $\mu \sin(A-\beta) = 1$, so würde man, wenn auch noch das Coordinatensystem so gewählt würde, dass die y Axe der genannte horizontale Strahl und die schneidende Ebene vom leuchtenden Punkte, dem Coordinatenmittelpunkte, um p entfernt ist, nach ähnlichen Abkürzungen, wie wir sie uns bei Ableitung der Gleichung des Spaltenbildes erlaubt haben, eine Gleichung erhalten, die mit jener identisch ist, die sich durch Substitution desselben Werthes von α, in die Gleichung unseres Spaltenbildes ergibt. Man kann hieraus ersehen, dass die Grenze der Totalreflexion dieselbe Form haben müsse, wie die letzte noch sichtbare Linie. Aber zu diesem Resultate kann man noch auf eine kürzere Weise gelangen, wenn man bedenkt, dass jene Strahlen, welche die genannte Grenze bilden, alle so gebrochen werden, dass sie nach ihrem Austritte in der zweiten Prismenfläche, also in einer verticalen Ebene liegen, eben so wie wenn sie von einer verticalen, unendlich weit entfernten Linie auf das Prisma fielen. Die Fläche, welche diese Strahlen nach ihrer ersten Brechung im Prisma selbst bilden, ist eine windschiefe, da sie nach dieser Brechung nicht mehr homocentrisch sind.

Die Frage also, wie man bei Spectralapparaten möglichst diese krummen Linien als gerade erhalten könne, wird ganz einfach in Anwendung von Fernröhren mit Objectivlinsen von grosser Brennweite ihre Beantwortung finden, da man jene Stellung des Prismas, bei welcher der Parameter ein Maximum wird, nicht leicht einzuhalten im Stande ist. Es sind nämlich aus anderen Gründen bei Spectralapparaten Prismen von grösseren brechenden Winkeln und einem grösseren Brechungsvermögen im Gebrauche, bei welchen das genannte Maximum in der Nähe der Grenze der Totalreflexion eintritt. Bei diesen Fernröhren ist auch noch die Ocularlinse in Betracht zu ziehen, da das Auge nicht unmittelbar das von der Objectivlinse erzeugte Bild beobachtet. In dieser Beziehung sind Oculare mit kurzer Brennweite, also starker Vergrösserung anzurathen. Ist nämlich die Gleichung des Spaltenbildes im Brennpunkte der Objectivlinse

$$z^2 = -mx$$

so ist dieses vom Mittelpunkte der Ocularlinse um die Grösse

$$\alpha = -\frac{p's}{p'-s}$$

entfernt, wobei p' die Brennweite des Oculars und s die deutliche Sehweite des Beobachters sind, welcher die krumme Linie in der Form

$$z^2 = -\frac{s-p'}{p'} \,.\, mx$$

sieht, eine Parabel, die einen um so grösseren Parameter hat, je kleiner p' ist.

Es ist auch zweckmässig, der Collimatorlinse eine grössere Brennweite zu geben, da in diesem Falle selbst bei höherer Spalte, die von deren einzelnen Punkten ausgehenden Strahlen eine geringere Neigung mit der optischen Axe nach dem Austritte aus der Linse besitzen, also auch weniger schief auf das Prisma gelangen.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Fig. 1.

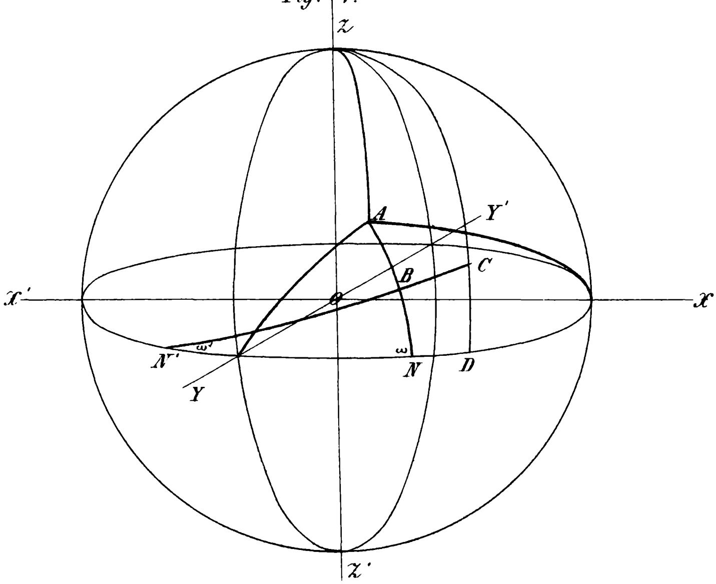
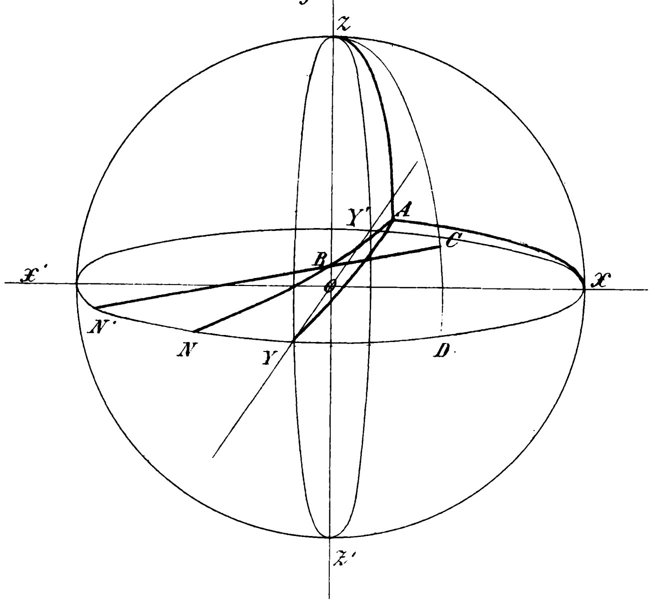


Fig. 2.



Aus d. k. k. Hof-u. Staatsdruckerei.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LI. Bd. II. Abth. 1865.