Gedruckt auf Kosten des Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Tagesschwankung der Temperatur der Mondoberfläche[1]

Von

Dr. Robert Dietzius in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. April 1923)

Die Meinungen der Astronomen über die Temperatur der Mondoberfläche gehen noch weit auseinander. Dabei handelt es sich keineswegs um eine rein theoretische Frage, welche der Prüfung unzugänglich ist. Die Temperatur der Mondoberfläche kann sehr wohl durch Beobachtungen von der Erde aus — auf mittelbarem Wege durch Messung der Wärmestrahlung — erschlossen werden. Wir vermögen nicht nur die Gesamtstrahlung der sichtbaren Mondscheibe zu messen, sondern auch örtliche Unterschiede festzustellen. Wie die Beobachtung lehrt und auch nicht anders zu erwarten ist, hängt die Temperatur irgend eines Teiles der Mondoberfläche und damit die von ihm ausgehende Wärmestrahlung hauptsächlich von dem Einfallswinkel der Sonnenstrahlen ab, zum Teil aber auch von örtlichen Unterschieden im Reflexionsvermögen des Bodens.

Die ersten einwandfreien Messungen der Wärmestrahlung des Mondes stammen von Langley und Very.[2] Als Langley mit seinem für die Messung der Sonnenstrahlung bestimmten Spektrobolometer versuchsweise die Mondstrahlung untersuchte, bemerkte er zu seiner Überraschung, daß das Mondlicht eine im Vergleich zur sichtbaren Strahlung überaus reichliche Menge langwelliger (unsichtbarer) Strahlung von etwa 7 bis 10 μ Wellenlänge enthalte. Langley erkannte, daß diese langwellige Strahlung nicht wie die sichtbare Strahlung reflektierte Sonnenstrahlung, sondern Wärmestrahlung sei, welche von der durch die Sonnenstrahlung erwärmten

---

[1] Während diese Arbeit gedruckt wurde, ist der Autor gestorben. Die Korrektur wurde von der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik besorgt.

[2] Langley und Very. The temperature of the moon from researches made at the Alleghany Observatory. Nat. Ac. Sc. *4*, part 2, 3. memoir, 1889. Vgl. auch Langley. The invisible solar and lunar spectrum. Amer. J. of Sc. *36* (1888) und The temperature of the moon. Ebenda, *37* (1889).

Mondoberfläche ausgesendet wird. Kurz- und langwelliger Spektralteil sind durch eine Absorptionsbande des atmosphärischen Wasserdampfes vollkommen getrennt.

Die eigentlichen Messungen nahm Langley ohne spektrale Zerlegung der Mondstrahlung vor, indem er kurzwelliges, reflektiertes Sonnenlicht und langwellige Wärmestrahlung nur durch Ein- und Ausschalten einer gewöhnlichen, für langwellige Strahlung undurchlässigen Glasplatte schied.

Die nächste und eingehendere Abhandlung Very's[1] über die Mondtemperatur wurde 1890 von der Utrechter Gesellschaft für Künste und Wissenschaften preisgekrönt. Die beiden genannten Erstlingsarbeiten enthalten nur bolometrische Messungen der zugestrahlten Wärme und noch keine Rückschlüsse auf die Temperatur, wenn man von einer vorsichtigen Schätzung absieht, wonach die effektive Temperatur des Vollmondes +45° C. sein soll.

Erst später ging Very daran, seine Strahlungsmessungen in Celsiusgrade umzurechnen. Er stellte zunächst im Laboratorium eine Reihe von Vorversuchen über die Wärmestrahlung an (das Stefan'sche Gesetz war damals noch unbekannt), um die zur Umrechnung notwendigen Anhaltspunkte zu finden. Very[2] kam zur Folgerung, daß jene Stelle der Mondoberfläche, welche von der im Zenit stehenden Sonne bestrahlt wird, bis auf 454° abs. = 181° C. erwärmt werde, ein Wert, der entschieden zu hoch ist und selbst bei reinem Strahlungsgleichgewicht (die Wärmeleitung durch den Boden setzt die Höchsttemperatur herab) nur möglich wäre, wenn die Solarkonstante einen Wert von 3 (statt 2) gkal/cm^2 Min. hätte. Very hat sich durch Festhalten an dieser hohen Temperatur und Solarkonstante Abbot[3] zum heftigsten Gegner gemacht.

Zu den Gegnern Very's gehörte auch W. Coblentz,[4] der aus Langley's spektrobolometrischen Untersuchungen herauslesen zu sollen glaubte, daß auch die vom Mond zugesandte langwellige Strahlung als einen wesentlichen Bestandteil reflektiertes Sonnenlicht enthalte, während Very der Ansicht ist, daß die vom Mond reflektierte Sonnenstrahlung im langwelligen Teil des Spektrums etwa 3000mal schwächer ist als die Wärmestrahlung des Mondes.

Die Folge dieser Angriffe war, daß Very's Messungen gänzlich in Mißkredit gerieten und man bei Erörterungen der Mondtemperatur zu der alten, auf rein theoretische Erwägungen gestützten Ansicht

---

1 Very. Prize essay on the distribution of the moon's heat and its variation with the phase. Utrecht, Soc. of Arts and Sc., The Hague, 1891.

2 Very. The probable range of temperature on the moon. Astroph. Journ. *8* (1898), p. 199 und 265.

3 Abbot und Fowle. The temperature of the moon. Ann. of the Astroph. Obs. Smiths. Inst. *2* (1908), p. 174 und On the best value of the solar constant. Astr. J. *35* (1912), p. 92.

4 Coblentz. Radiation from selectively reflecting bodies. Phys. Rev. *24* (1907), p. 314.

Langley's[1] Zuflucht nahm, wonach auch bei vollem Sonnenschein die Temperatur der Mondoberfläche kaum über den Gefrierpunkt steige. Dies dürfte die Meinung sein, die auch heute noch am meisten im Umlauf ist, nachdem sich auch der bekannte Mondforscher W. H. Pickering[2] ihr angeschlossen hat.

Dabei ist diese Temperatur »kaum über dem Gefrierpunkt« ein einmaliges Zugeständnis Langley's an seinen Mitarbeiter Very. Langley's Lieblingsidee war eine viel tiefere Temperatur. An einer anderen Stelle des genannten Werkes behauptet Langley, daß die Temperatur eines Planeten ohne Atmosphäre im Abstand des Mondes von der Sonne nicht viel über — 225° C. betragen könne und in einem anderen Werke,[3] daß ohne Atmosphäre die Temperatur des Erdbodens in den Tropen bei vertikaler Sonne nicht über — 200° C. steigen könne. Für eine derartig tiefe Mittagstemperatur auf dem Monde setzte sich auch Coblentz ein.

Diese offenbar unrichtige Ansicht Langley's ist auf die damalige Unkenntnis der Strahlungsgesetze und die damals übliche Überschätzung der »Glashauswirkung« unserer Atmosphäre zurückzuführen.

Über die Verwirrung, die dadurch angerichtet wurde,[4] gibt ein Aufsatz Very's[5] Aufschluß. Bei unserer heutigen Kenntnis der Strahlungsgesetze ist diese Verwirrung durchaus nicht notwendig. Ziel dieses Aufsatzes ist es, die Theorie richtigzustellen und mit den Messungen — unter Bedachtnahme auf die unterlaufenen systematischen Fehler — in Einklang zu bringen.

Wir wollen zunächst prüfen, inwieweit die Wärmestrahlung des Mondes gemessen werden kann, ohne eine Entstellung der Messungsergebnisse durch die reflektierte Sonnenstrahlung befürchten zu müssen.

Es sei S die von der Sonne pro cm^2 und Sek. zugestrahlte Energie, E_s die effektive Temperatur der Sonne, r ihr Halbmesser und d die mittlere Entfernung Sonne—Erde. Dann ist die nach dem Stefan'schen Gesetz ausgestrahlte Energie $4\pi r^2 s . E_s^4$ gleich der auf die Kugeloberfläche vom Halbmesser d auffallenden Energie $4\pi d^2 S$

---

1 Langley und Very l. c. p. 193.

2 W. H. Pickering. Is the moon a dead planet? Century Mag. 1902, p. 91. Ebenso bei P. Schwahn. Der Mond als Gestirn und Weltkörper. Himmel und Erde. 1914.

3 Langley. Researches on solar heat. p. 213. Prof. Papers of the Signal Serv. Nr. 15. Washington 1884.

4 Bezeichnend ist, daß Ph. Fauth, der Schrittmacher des Glazialkosmologen Hörbiger, sich für eine ähnliche niedrige Höchsttemperatur (— 173° C.) einsetzt und sich dabei — unter Verwechslung von absoluter Temperatur und ° C. — auf Very beruft.

5 Very. The temperature assigned by Langley to the moon. Science. *37* (1913), p. 949.

oder, da r/d den scheinbaren Halbmesser ρ_s der Sonne (im Bogenmaß) bedeutet

$$s E_s^4 = S/\rho_s^2, \tag{1}$$

und entsprechend gilt für die Eigenstrahlung M des Mondes

$$s E_m^4 \doteq M/\rho_m^2. \tag{2}$$

Nun ist die Konstante des Stefan'schen Gesetzes $s = 1 \cdot 28 . 10^{-12}$, der mittlere scheinbare Halbmesser der Sonne im Winkelmaß 15993′, des Mondes 15543′, also im Bogenmaß $1/\rho_s^2 = 46206$, $1/\rho_m^2 = 48919$.

Setzen wir die Solarkonstante

$$S = 1 \cdot 94 \, \mathrm{gkal}/cm^2. \mathrm{Min} = 0 \cdot 032 \, \mathrm{gkal}/cm^2. \mathrm{Sek.},$$

so erhalten wir aus (1) als effektive Temperatur der Sonne $E_s = 5820°$; für rund $S = 2 \cdot 0$ ist $E_s = 5900°$.

Um die Menge R der vom Mond reflektierten Sonnenstrahlung zu berechnen, müssen wir folgendes bedenken: 1. reflektiert der Mond nur einen Bruchteil der Sonnenstrahlung (mittlere gemessene Albedo $w = 0 \cdot 13$). 2. wird bei der Reflexion die Sonnenstrahlung diffus zerstreut; dadurch wird sie im Verhältnis des Raumwinkels $\pi \rho_m^2$ des Mondes zum Raumwinkel 2π des Himmelsgewölbes geschwächt. Infolge des Zusammenwirkens beider Umstände ist

$$R = w S \rho_m^2/2 = w s E_s^4 \rho_s^2 \rho_m^2/2 = 0 \cdot 13 \, S/97838. \tag{3}$$

Very rechnete — anscheinend infolge Abrundung von ρ_m — mit $0 \cdot 13 \, S/97300$, Coblentz mit rund $S/500000$.

Setzen wir noch $S = 1 \cdot 94/60$ ein, so finden wir

$$R = 4 \cdot 296 . 10^{-8} \, \mathrm{kal}/cm^2 . \mathrm{Sek}.$$

Setzen wir weiters in (2) versuchsweise $E_m = 400°$, $350°$ abs. usw., so finden wir die Werte der folgenden Tabelle.

Wärmestrahlung M (10^{-8} kal/cm^2.Sek.) des Mondes bei verschiedener Annahme der effektiven Temperatur E_m.

E_m	400	350	300	250	200	150	100	50° abs.
M	72·2	39·3	21·2	10·2	4·2	1·32	0·25	0·016

Solange also die effektive Temperatur des Mondes wesentlich über dem Gefrierpunkt liegt, ist M wesentlich größer als der früher angegebene Wert R, ohne daß jedoch die reflektierte Strahlung R gegen die Eigenstrahlung M vernachlässigt werden könnte.

Anders verhält es sich, wenn wir nur die langwellige Strahlung in Betracht ziehen. Nach dem Planck'schen Gesetz kommt von der schwarzen Strahlung $s\,T^4$ auf die Einheit des Wellenlängenbereiches der Anteil

$$I = C\lambda^{-5} / (e^{c/\lambda T} - 1), \tag{4}$$

wobei $C = 0{\cdot}83.10^{-12}$ und $c = 1{\cdot}43$ ist.

Auf die Einheit des Wellenlängenbereiches kommt also von der durch (2) gegebenen Wärmestrahlung M des Mondes der Anteil $i_m = I_m \rho_m^2$ und von der durch (3) gegebenen reflektierten Sonnenstrahlung R der Anteil $i_r = w\, I_s^4 \rho_s^2 \rho_m^2/2$, wobei $T = E_s$, beziehungsweise $T = E_m$ zu setzen ist, um aus (4) I_s, beziehungsweise I_m zu erhalten. Die numerische Rechnung liefert die Werte der folgenden Tabelle.

Intensität i_r (kal/cm^2. Sek.) der vom Mond reflektierten Sonnenstrahlung und Intensität i_m der Wärmestrahlung des Mondes bei verschiedener effektiver Temperatur der Mondoberfläche und bei verschiedener Wellenlänge.

		i_m für						
λ	i_r	$E_m = 400$	350	300	250	200	150	100° abs.
2	32	0·91	0·07	0·002	—	—	—	—
4	2·8	217	60	11·0	1·0	0·3	0·007	—
6	0·62	573	242	77·7	16·0	1·5	0·07	—
8	0·21	599	347	135	40·4	6·8	0·35	0·001
10	0·088	487	289	145	56	13·3	1·24	0·01
12	0·043	364	178	132	58	17·6	2·42	0·05
14	0·024	267	171	108	54	19·2	3·5	0·12
16	0·014	196	137	87	47	18·7	4·2	0·22
20	0·006	107	79	54	32	15·2	4·3	0·42
λ_{Max}	0·49	7·2	8·2	9·6	11·5	14·4	19·2	28·8 μ

Die letzte Zeile der Tabelle enthält die Wellenlänge der stärksten Strahlungsintensität, berechnet aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz $\lambda_{Max}.E_m = 0{\cdot}288$.

Wie man sieht, besteht Very's Behauptung, daß bei einer Mondtemperatur von etwa 100° C. im Bereiche der langen Wellen die Wärmestrahlung des Mondes einige tausendmal größer sei als die reflektierte Sonnenstrahlung, vollkommen zu Recht und wurde von Coblentz mit Unrecht bestritten.

Aus den Messungen Langley's[1] geht hervor, daß das Mondspektrum ein Strahlungsmaximum bei etwa 8·3 μ besitzt, an der gleichen Stelle wie ein schwarzer Strahler von etwa 70° C. Coblentz glaubte, daß durch selektive Absorption der Strahlung

[1] Langley selbst schrieb das Maximum dem Bereiche 13 bis 14 μ zu infolge falscher Berechnung der Dispersion des Steinsalzprismas. Abbot hat später den Irrtum richtiggestellt.

in der Erdatmosphäre das Maximum sich nach $10 \cdot 2\,\mu$ verschieben müßte. Nachdem die Beobachtungen es dennoch bei $8 \cdot 3\,\mu$ zeigen, schloß er auf eine Überlagerung von Mond- und reflektierter Sonnenstrahlung. Coblentz hat aber mit einer viel zu starken Absorption gerechnet. Wie die neuesten Untersuchungen Abbot's[1] zeigen, ist unsere Atmosphäre gerade für Strahlen von 8 bis $9\,\mu$ sehr gut durchlässig (auch bei reichlichem Wasserdampf). Dadurch ist auch dieser Irrtum aufgeklärt.

Um die Temperatur T (abs.) zu bestimmen, welche die bestrahlte Mondoberfläche annimmt, wollen wir zunächst in erster Annäherung annehmen, daß der Wärmetransport durch Leitung von den Oberflächenschichten nach innen oder in umgekehrter Richtung klein ist gegen jene Wärmemengen, welche ein- und ausgestrahlt werden. Im Strahlungsgleichgewicht ist

$$a_1 S \cos i = s E_m{}^4 = a_2 s T^4$$

oder

$$s T^4 = (a_1/a_2) . S \cos i, \tag{5}$$

wobei a_1 den Absorptionskoeffizienten der Mondoberfläche für das einfallende Sonnenlicht, a_2 den Absorptions- und gleichzeitig Emissionskoeffizienten für die langwellige Strahlung des Mondes und i den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen bedeutet.

Entsprechend der Albedo $w = 0 \cdot 13$ ist $a_1 = 1 - 0 \cdot 13 = 0 \cdot 87$. Für a_2 nimmt Very $7/8 = 0 \cdot 875$ an, nachdem der Absorptionskoeffizient fast aller Mineralien für langwellige Strahlung sehr groß und nach Verys eigenen Untersuchungen in Übereinstimmung mit späteren Untersuchungen anderer ungefähr von dieser Größenordnung ist. Es ist hingegen kein Mineral bekannt, bei welchem Coblentz' Annahme $a_2 = 0 \cdot 1$ angenähert zuträfe.

Nehmen wir $a_1 = a_2 = 0 \cdot 87$ an und setzen wir in (5) die früher angegebenen Werte ein, so wird $T^4 = 0 \cdot 0253 . 10^{12} \cos i$ und es ergibt sich folgende Tabelle.

Temperatur der Mondoberfläche bei Strahlungsgleichgewicht (ohne Leitung) bei verschiedenem Einfallswinkel i der Sonnenstrahlung.

$i =$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	85	88°
$T =$	126	125	119	111	100	85	63	32	—17	—56	—100° C.

Die Wärmeleitung durch den Boden verhindert, daß reines Strahlungsgleichgewicht besteht. Da aber der Tag auf dem Monde mehr als 29mal so lang dauert als auf unserer Erde, ändert die Sonne für einen Punkt der Mondoberfläche nur sehr langsam ihren Höhenwinkel und daher ist dort wesentlich mehr Zeit als auf der Erde zur Annäherung an das Strahlungsgleichgewicht gegeben.

---

[1] Annals of the Astroph. Obs. Vol. 4 (1922), p. 286.

Wir werden daher erwarten, daß bei hohem Sonnenstand die Bodentemperatur ziemlich nahe dem Strahlungsgleichgewicht kommt. Dagegen wird in der Nacht die Temperatur noch immer weit vom absoluten Nullpunkt entfernt bleiben infolge der Wärmezufuhr aus den tieferen Schichten, wo sich im Laufe des langen Tages die nach abwärts wandernde Wärme aufspeichert. Genaueren Aufschluß erhalten wir, wenn wir auch die Wärmeleitung durch den Boden in Rechnung ziehen.

Die Differenzialgleichung für die Wärmeleitung im Erdboden lautet[1]

$$\partial T/\partial t = a^2 \partial^2 T/\partial x^2 \tag{6}$$

wobei

$$a^2 = k/c\rho \tag{7}$$

ist, a^2 die Temperatur-, k die Wärmeleitfähigkeit genannt wird, c die spezifische Wärme und ρ die Dichte bedeutet.

Ein partikuläres Integral von (6) lautet

$$T = A e^{-bx} \cos(2\pi t/U - bx + \eta),$$

wobei $b = \sqrt{(\pi/a^2 . U)}$ gesetzt ist und A, b und η willkürliche Konstanten sind, und zwar bedeutet A die Amplitude der Temperaturwelle für $x = 0$ (Oberfläche), U die Periode, η die Phase zur Zeit $t = 0$.

Die Grenzbedingung unseres Problemes ist eine Vorschrift, welche den Wärmehaushalt der Oberfläche regelt. Nach Definition von k ist $k . \partial T/\partial x$ die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit von unten nach oben fließt (ein negatives Vorzeichen bedeutet Wärmetransport von oben nach unten).

Für die Oberfläche muß dies gleich sein der ausgestrahlten Wärme vermindert um die eingestrahlte Wärme, also:

$$k(\partial T/\partial x)_{x=0} = a_2 s \overline{T}^4 - a_1 S \cos i, \tag{8}$$

wenn wir mit $\overline{T}$ die Temperatur an der Oberfläche bezeichnen.

Durch Differentiation unseres partikulären Integrales und leichte Umformung ergibt sich

$$(\partial T/\partial x)_{x=0} = A b \sqrt{2} \cos(225° + 2\pi t/U + \eta).$$

Auf der rechten Seite von (8) ist sowohl $\overline{T}$ als der Einfallswinkel i der Sonnenstrahlen eine Funktion der Zeit t, der ganze Ausdruck auf der rechten Seite gewiß keine einfache cos-Welle. Daher ist unser partikuläres Integral noch nicht allgemein genug.

[1] Weber. Die Differenzialgleichungen der mathematischen Physik, 2. Bd.

Jedenfalls läßt sich aber die rechte Seite von (8) in Form einer Fourier'schen Reihe als Summe von cos-Wellen schreiben. Wenn wir uns auf die Untersuchung der täglichen Periode beschränken, kommen als Perioden dieser Wellen nur die Dauer des Tages ($U = 29 \cdot 53$ irdische Tage) auf dem Monde und die ganzzahligen Teile dieser Periode in Betracht.

Wir finden also eine hinreichend allgemeine Lösung von (6) in der Form

$$T = A_0 + \sum_n A_n e^{-b_n x} \cos\,(2\pi nt/U - b_n x + \eta_n). \tag{9}$$

Wir überzeugen uns leicht, daß dies der Gleichung (6) genügt, sobald

$$b_n = \sqrt{(\pi\, n/a^2 U)} \tag{10}$$

gesetzt wird. Weiters ist

$$\overline{T} = A_0 + \Sigma A_n \cos(2\pi nt/U + \eta_n), \tag{11}$$

$$(\partial T/\partial x)_{x=0} = \Sigma A_n b_n \sqrt{2} \cos\,(225° + 2\pi nt/U + \eta_n) \tag{12}$$

und die Randbedingung (8) schreibt sich

$$\begin{aligned} k\sqrt{(2\pi/a^2 U)}\,.\,\Sigma A_n \sqrt{n}\, \cos(225° + 2\pi nt/U + \eta_n) = \\ = a_2\, s\, \overline{T}^4 - a_1\, S \cos i. \end{aligned} \tag{13}$$

Wir wollen wie früher $a_1 = a_2 = 0 \cdot 87$ annehmen. Ehe wir an die numerische Rechnung gehen, müssen wir für den Koeffizienten k/a einen bestimmten Wert wählen. In Hann's Lehrbuch der Meteorologie (3. Aufl., p. 781) sind einige Zahlenwerte für die Wärmeleitfähigkeit k und die Temperaturleitfähigkeit a^2 verschiedener irdischer Bodenarten und Gesteine zusammengestellt. Weitere Angaben habe ich den physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen.

Darnach findet man als Wert von k/a für Sandboden 0·0281, Trappfels 0·047, Sandstein von Calton Hill 0·070, Granit aus Finnland 0·070, vom Schwarzwald 0·064, Porphyr 0·066, Basalt 0·063, Trachyt 0·050. Ich habe mich entschlossen, die Rechnung für den Mond mit dem Zahlenwert von Sandboden durchzuführen, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Ist es nicht ausgeschlossen, daß die Mondoberfläche mit einem losen sandartigen Material bedeckt ist, das zu irgend einer lang zurückliegenden Zeit durch Verwitterung entstanden ist und infolge des Fehlens von Wasser und Wind ruhig an Ort und Stelle liegen bleibt.

2. Kommt es mir vor allem darauf an, die extremen Schwankungen zu finden, denen im Laufe eines vollen Tages die Mondoberfläche ausgesetzt ist. Wäre der Boden wärmeundurchlässig ($k = 0$), so müßte bei Tag die Temperatur des reinen Strahlungsgleichgewichtes erreicht werden und nachts die Oberfläche sich bis nahe an den absoluten Nullpunkt abkühlen. Je größer k/a, desto kleiner wird die Tagesschwankung. Wenn wir eine untere Grenze für die Nachttemperatur finden wollen, müssen wir für k/a einen kleinen Wert wählen.

Wenn wir unsere Zahlenwerte in die Randbedingung (13) einsetzen, so schreibt sie sich

$$0\cdot0000440\, \Sigma A_n \sqrt{n} \cos(225^\circ + 2\pi nt/U + \eta_n) =$$
$$= 1\cdot1136 . 10^{-12}\, \overline{T}^4 - 0\cdot02813 \cos i. \qquad (14)$$

Die linke Seite der Gleichung bedeutet die Wärmezufuhr zur Oberfläche durch Leitung von unten, das 1. Glied auf der rechten Seite die ausgestrahlte Wärme, das 2. die von der Sonne eingestrahlte Wärme, alles pro cm^2 und Sek. Das 2. Glied ist Null für die ganze Nachtzeit.

Der Einfallswinkel i der Sonnenstrahlen hängt außer von der Tageszeit auch von der geographischen Breite des Mondortes ab. Um über die extremen Temperaturschwankungen Aufschluß zu erhalten, wollen wir unsere Rechnung für jene Mondorte durchführen, wo die Sonne mittags im Zenit steht, also etwa für den Mondäquator zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche (auf dem Monde). In diesem Falle ändert sich i proportional der Zeit t, und zwar ist $i = 2\pi t/U$, wenn wir die Zeit von Mondmittag an zählen.

Zur bequemeren numerischen Rechnung dividieren wir noch die Randbedingung (14) durch $1\cdot1136 . 10^{-4}$. Sie schreibt sich dann

$$0.395\, \Sigma A_n \sqrt{n} \cos(225^\circ + 2\pi nt/U + \eta_n) =$$
$$= \overline{T}^4/10^8 - 253 \cos 2\pi\, t/U. \qquad (15)$$

Unsere Grundgleichung (6) ist durch (9) erfüllt, wie immer wir die Amplituden A_n und die Phasen η_n in (9) [und (11)] wählen. Unsere Aufgabe ist es, sie so zu bestimmen, daß auch der Randbedingung (15) Genüge geleistet wird. Wir können dies durch ein fortgesetztes Näherungsverfahren erreichen. Wir gehen von irgend einer Näherung für $\overline{T}$ als Funktion von t aus, indem wir etwa die Oberflächentemperatur $\overline{T}$ als einfache cos-Welle ansetzen, welche ungefähr um Mittag ein Maximum hat, das nicht weit hinter dem Strahlungsgleichgewicht zurücksteht.

Mit den angenommenen Werten der Amplitude A_1, der Phase η_1 und der Mitteltemperatur A_0 berechnen wir mittels (11) $\overline{T}$ für einige über den Mondtag verstreute Tageszeiten. Für die gleichen Zeiten berechnen wir sodann die rechte Seite der Randbedingung (15) und unabhängig davon die linke Seite. Die Wertereihen beider Seiten werden nicht übereinstimmen, die Differenz rechte minus linke Seite wird irgend einen täglichen Gang zeigen, den wir graphisch darstellen. Dem Augenschein nach wird entweder eine ganztägige oder eine dritteltägige oder vierteltägige Welle usw. darin zum Vorschein kommen. Wir bestimmen angenähert Amplitude und Phase dieser Welle und erhalten so die Zusatzwelle, welche wir zur linken Seite von (15) hinzufügen müssen, um bessere Übereinstimmung zu erhalten.

Dividieren wir die Amplitude der Zusatzwelle durch $0 \cdot 395 \sqrt{n}$ und setzen wir die Phase um 225° herab, so erhalten wir Amplitude und Phase der entsprechenden Zusatzwelle zur rechten Seite von (11), denn nur durch diesen Faktor und diese Phasenverschiebung unterscheiden sich die linke Seite von (15) und die rechte von (11).

Bei Addition der Zusatzwelle muß man beachten, daß cos-Wellen mit gleicher Periode, aber verschiedener Phase und Amplitude sich zu einer einzigen cos-Welle mit neuer Phase und Amplitude addieren. Nach Addition der Zusatzwelle haben wir eine bessere Näherung für $\overline{T}$ gefunden, mit welcher wir die Rechnung wiederholen. Da sich durch das geänderte $\overline{T}$ auch die rechte Seite von (15) ändert, ist es nicht möglich, der Reihe nach ganztägige, halbtägige, dritteltägige usw. Wellen zu berechnen, sondern nach Bestimmung der Wellen höherer Ordnung ergibt sich die Notwendigkeit, nachträglich an den bereits bestimmten Hauptwellen Verbesserungen anzubringen; doch werden diese rasch kleiner, da sich $\overline{T}^4$ durch die Zusatzwellen hoher Ordnung und kleiner Amplitude nicht mehr viel ändert. Infolge dieser unvermeidlichen, nachträglich anzubringenden Verbesserungen lohnt es sich aber auch nicht, die Zusatzwellen gleich das erstemal genau zu berechnen.

Ausgehend von der Näherungslösung $A_0 = 220°$ abs., $A_1 = 120$ und $\eta_i = 0$ kam ich nach nahezu 20mal wiederholtem Näherungsverfahren zur Lösung:

$$\overline{T} = 272° + 93 \cos (z - 16°) + 32 \cos (2z - 5°) + 8 \cos (3z + 120°) + \\ + 10 \cos (4z + 160°) + 2 \cos (5z - 45°) + 3 \cdot 5 \cos (6z - 45°), \qquad (16)$$

wobei zur Abkürzung $z = 2\pi t/U$ gesetzt ist.

Daß wir Wellen ziemlich hoher Ordnung brauchen, um den Temperaturverlauf der Oberfläche des Bodens gut darzustellen, geht aus folgender Überlegung hervor: Der Temperaturanstieg wird sich auf die Zeit von Sonnenaufgang bis kurz nach Mittag, das ist auf etwa $^1/_4$ Tag, beschränken. Gegen Abend nimmt mit sinkender Sonne die Temperatur rasch ab, nach Sonnenuntergang wird sie die ganze Nacht hindurch weiter sinken, aber nur mehr langsam und ziemlich gleichmäßig. Ein derartiger Funktionsverlauf, bestehend aus raschem Anstieg, raschem Abfall und einem langen Stück langsamen Abfalles kann nicht durch ein oder zwei Wellen allein dargestellt werden.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über den täglichen Gang der Temperatur und des Wärmehaushaltes des Bodens.

Täglicher Gang der Temperatur $\overline{T}$ der Mondoberfläche.

W = vertikaler Leitungsstrom an der Oberfläche (10^{-4} kal/cm^2.Sek.), A ausgestrahlte, B eingestrahlte Wärme pro cm^2 und Sek. in denselben Einheiten, g = vertikaler Temperaturgradient (° C/cm) an der Oberfläche.

Zeit	Mg	2	4	6	8	10p	Mn	2	4	6	8	10a
$\overline{T}$	384	372	339	262	229	222	211	207	199	195	286	361
W	–42	–20	9	44	29	25	20	20	20	10	–58	–56
A	240	215	147	51	30	27	22	20	17	16	75	187
B	281	244	141	0	0	0	0	0	0	0	141	244
g	–1·60	–0·74	0·32	1·68	1·10	0·96	0·76	0·75	0·75	0·37	–2·20	–2·14

Die Kopfzeile enthält die Zeit. Um die Vorstellung zu erleichtern, ist t nicht in Sekunden angegeben, sondern an Stelle von t die Größe $24\,t/U$, das ist die Zeit in Mondstunden, wenn man mit Mondstunde den 24. Teil eines vollen Tages auf dem Monde bezeichnet. Die zweite Zeile gibt die absolute Temperatur der Mondoberfläche an, berechnet aus (16), die dritte gibt die Wärmezufuhr aus der Tiefe zur Mondoberfläche an (negativ bei Wärmestrom nach unten), berechnet durch Einsetzen der Amplituden und Phasen von (16) in die linke Seite von (14). Die vierte Zeile gibt die von dem erhitzten Boden ausgestrahlte Wärme, die fünfte den Wärmegewinn durch die einfallende Sonnenstrahlung, berechnet aus der rechten Seite von (14), alle Wärmemengen pro cm^2 und Sek.

Unsere Randbedingung erfordert, daß man die Werte der dritten Zeile auch erhält, wenn man die fünfte von der vierten subtrahiert. Diese Forderung ist ziemlich gut erfüllt, es verlohnt sich wohl nicht, die etwas mühsame Näherungsrechnung weiterzuführen.

Die sechste Zeile der Tabelle enthält das vertikale Temperaturgefälle an der Oberfläche (negativ bei Temperaturabnahme nach innen). Die Werte der dritten Zeile (Wärmetransport durch Leitung) unterscheiden sich von jenen der sechsten Temperaturgefälle nur durch den Proportionalitätsfaktor k (Wärmeleitungsfähigkeit des Bodens) = 0·00262.

Die tiefste Temperatur kurz vor Sonnenaufgang beträgt demnach 194° abs. = —79° C., die Mittagstemperatur 384° = 111° C., sie steht nur um 15° hinter der früher berechneten Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes zurück. Das Maximum beträgt 385° abs. und tritt mit einer Verspätung von $^1/_8$ Mondstunde, d. i. etwa 10 irdische Stunden nach Mondmittag, auf.

Zur Zeit des raschen Anstieges der Einstrahlung am Vormittag entsteht in der obersten Schichte des Mondbodens ein starkes Temperaturgefälle nach innen. Bei hochstehender und langsam sinkender Sonne nimmt es langsam ab und noch reichlich vor Sonnenuntergang (6p) kehrt es sich um, da sich entsprechend der verringerten Einstrahlung die Oberflächenschichten rascher abkühlen als die tieferen. Ungefähr bei Sonnenuntergang ist das Temperaturgefälle nach oben am stärksten. Im Laufe der Nacht nimmt sowohl die Temperatur als das Temperaturgefälle in der Nähe der Oberfläche als der Wärmetransport durch Leitung zur Oberfläche allmählich ab.

Die Oberflächentemperaturen während des Tages wollen wir noch ausführlicher in Intervallen von $^2/_3$ Mondstunden, oder was in unserem Falle dasselbe ist, von 10 zu 10° Höhenwinkel der Sonne angeben, um sie mit den entsprechenden von Very durch Interpolation zwischen seine gemessenen Strahlungstemperaturen berechneten Temperaturen vergleichen zu können.

Temperatur der Mondoberfläche in Abhängigkeit von dem Einfallswinkel der Sonnenstrahlung. R gerechnet, V nach Very.

	i	80	70	60	50	40	30	20	10	0°
R	ante	215	248	286	320	345	360	371	379	384° abs.
	post	289	317	339	354	364	372	380	384	384
V	ante	227	292	331	365	400	430	447	453	454
	post	240	318	365	400	424	444	450	453	454

Beim Vergleich müssen wir bedenken, daß Very's Temperaturangaben gewiß zu hoch sind. Wenn auch die Grundlagen unserer Rechnung etwas unsicher sind, so besteht doch über die Höchsttemperatur wenig Zweifel. Sie kann schwerlich weit von der Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes (399° abs.) bei im Zenit stehender Sonne entfernt sein. Die Wärmeleitung setzt sie nur hinab, für keinen Fall hinauf. Bei Berechnung der Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes ist die einzige einigermaßen unsichere Größe die Absorptionskonstante a_2 für langwellige Strahlung. Die Gleichgewichtstemperatur ändert sich mit a_2 nur verkehrt proportional der 4. Wurzel aus a_2. Um Very's Temperatur von 454° zu ermöglichen, müßte a_2 statt 0·87 den unwahrscheinlich kleinen Wert 0·53 haben. Eher käme ein noch größerer Wert als 0·87 in Betracht (für Wasser ist $a_2 = 0 \cdot 96$). Die Annahme eines systematischen Fehlers bei Very wird um so wahrscheinlicher, als damals die absolute Eichung des Bolometers Schwierigkeiten machte. Langley hatte zu jener Zeit mit Hilfe desselben Bolometers eine um mehr als die Hälfte zu große Solarkonstante (3·13) abgeleitet.

Während der Nacht nimmt nach unserer Rechnung die Temperatur der Mondoberfläche von 262° abs. = —11° C. bei

Sonnenuntergang auf —78° C. bei Sonnenaufgang ab. Hätten wir eine bessere Wärmeleitungsfähigkeit des Bodens angenommen, so hätten wir eine höhere Nachttemperatur erhalten; eine tiefere würde voraussetzen, daß die Oberflächenschichte des Mondes aus einem Material besteht, das die Wärme noch schlechter leitet als irdischer Sandboden und damit auch schlechter als alle festen irdischen Gesteine.

Sogar Very, der sich für eine hohe Tagestemperatur des Mondes einsetzte, glaubte, daß die Nachttemperatur dem absoluten Nullpunkt nahe komme. Very hatte bei dem Einfallswinkel der Sonnenstrahlung von 76° auf dem Mond aus seinen Messungen eine Mondtemperatur von 258° abs. abgeleitet. Für $i = 102°$ (Sonne 12° unter dem Horizont) erhielt er an dem Galvanometer seines Bolometers keinen merklich größeren Ausschlag als durch die Strahlung des Himmels in der Nähe des Mondes und setzte deshalb für $i = 102°$ $T = 0°$ abs. und durch Interpolation für $i = 80°$ $T = 240°$ abs. für $i = 90°$, d. i. Sonnenuntergang, $T = 75°$ abs.

Wie aber unsere frühere Tabelle zeigt, verschiebt sich mit abnehmender Temperatur der Mondoberfläche der Wellenbereich der ausgesandten Strahlung zur Hauptsache nach Wellen länger als 10 μ. Für $T = 288°$ abs. fällt das Maximum der Strahlung jenseits 10 μ, wo die zu uns kommende Mondstrahlung bereits durch eine atmosphärische Absorptionsbande wesentlich geschwächt wird und für $T = 222°$ abs. jenseits von 13 μ, wo so gut wie gar keine Strahlung mehr durchgelassen wird. Dafür sendet unsere Atmosphäre selbst Strahlung dieser Wellenlängen zu und Very selbst hat bereits diese Strahlung des Nachthimmels gemessen und notwendigerweise messen müssen, um die Strahlung des Mondes ohne die zusätzliche Himmelsstrahlung zu bestimmen, die allerdings bei hoher Mondtemperatur im Vergleich zur Mondstrahlung nicht viel ausgibt.

Wenn also die Strahlung der beschatteten Teile des Mondes unmerklich ist (gelegentlich einer Mondfinsternis beobachtete Langley ein allmähliches Absinken der Wärmestrahlung bis auf einen geringen Rest), so folgt daraus noch nicht, daß sie keine Strahlung aussenden.

Nimmt die Temperatur der Mondoberfläche von 350° abs. auf 250° abs. ab, so nimmt in dem für Strahlung gut durchlässigen Bereich unserer Atmosphäre von 8 bis 10 μ die Intensität der ausgesandten Strahlung auf $^1/_5$ bis $^1/_9$ ab, bei Abnahme auf 200° abs. gar auf $^1/_{22}$ bis $^1/_{50}$. Die Grenztemperatur, bei welcher die Strahlung für Very unmeßbar wurde, wird also noch weit vom absoluten Nullpunkt entfernt bei einer Temperatur gelegen haben, die wohl nicht viel unter 250° abs. lag. Vielleicht könnte man mit dem inzwischen durch Abbot viel empfindlicher gemachten Spektrobolometer die Wärmestrahlung bis zu noch tieferer Temperatur verfolgen, doch besteht kaum Aussicht, beim Mond tiefer als etwa 200° abs. zu kommen, weil schließlich auch ein empfindlicher Meßapparat nichts nützt, wenn die ganze Strahlung in der Atmosphäre absorbiert und der letzte Rest von der Himmelsstrahlung überlagert wird.

Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß Very's vielbestrittene Messungen der Tagestemperatur des Mondes im wesentlichen qualitativ richtig sind, doch müssen Very's Temperaturen etwas herabgesetzt werden, die Höchsttemperatur von 454° abs. auf etwa 385° abs. Gänzlich unglaubwürdig ist hingegen die ältere später von Coblentz wieder aufgenommene und hartnäckig verteidigte Ansicht Langley's, daß sich die Temperatur der Mondoberfläche bei vollem Sonnenschein kaum über —200° C. erhebe. Auch die gelegentlich gemilderte Ansicht Langley's, daß sie sich bei im Zenit stehender Sonne nicht viel über den Gefrierpunkt erhebe, ist zu verwerfen.

Das hier behandelte Problem scheint mir auch eine Nutzanwendung auf ein Problem der irdischen Meteorologie zuzulassen. Die Theorie der Wärmeleitung im Erdboden ist so weit gediehen, daß wir die Temperaturvorgänge in der Tiefe bei gegebenem Verlauf der Oberflächentemperatur mit ziemlich befriedigender Genauigkeit berechnen können. Ungelöst ist aber noch die Aufgabe, die Temperaturvorgänge in der Tiefe einschließlich des Temperaturverlaufes an der Oberfläche aus den bestimmenden meteorologischen Elementen (im wesentlichen Einstrahlung, Ausstrahlung und äußere Wärmeleitung durch die Luft) abzuleiten. Beim Mond ist die entsprechende Aufgabe einfacher, weil hier infolge des Fehlens einer Atmosphäre mit all ihren Trübungen die Strahlung eindeutiger gegeben ist und die äußere Wärmeleitung wegfällt. Wenn wir aber erst einmal das einfachere Problem gelöst haben, sind wir wohl auch der Lösung des anderen um einen guten Schritt näher gekommen.