ÜBER

BERECHNUNGSFORMEN DES ERDSPHÄROIDES

UND

DIE BESSELSCHEN KONSTANTEN

VON

DR. AUGUST BÖHM EDLEN VON BÖHMERSHEIM

A. Ö. PROFESSOR DER GEOGRAPHIE AN DER K. K. UNIVERSITÄT IN CZERNOWITZ

ABHANDLUNGEN

DER K. K. GEOGRAPHISCHEN GESELLSCHAFT IN WIEN

IX. Band, Nr. 2

WIEN 1911

R. LECHNER (WILH. MÜLLER)

K. U. K. HOF- U. UNIVERSITÄTS-BUCHHANDLUNG

INHALT

Die ideale Erdoberfläche, die den geographischen Messungen und Berechnungen zugrunde gelegt wird, ist bekanntlich die Fläche eines Rotationssphäroides, das durch die Umdrehung einer Ellipse — der Meridianellipse — um ihre kleine Achse erzeugt wird.

Die große Halbachse der Meridianellipse wird in der Regel mit a, die kleine mit b bezeichnet. Durch die beiden Halbachsen ist das Sphäroid nach Gestalt und Größe vollkommen bestimmt.

Aus den beiden Halbachsen werden verschiedene Hilfsgrößen abgeleitet, deren Anwendung für die Berechnung von Vorteil ist, nämlich zunächst die Abplattung $\mathfrak{a} = \frac{a - b}{a}$, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ und die sogenannte zweite Exzentrizität $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$;[1]) ferner die beiden namenlosen und nur durch Buchstaben bezeichneten Hilfsgrößen $m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ und $n = \frac{a - b}{a + b}$.

Jede von diesen Hilfsgrößen läßt sich durch jede andere ausdrücken, wenn man die obigen Gleichungen nach b auflöst und die verschiedenen Ausdrücke für b einander gleichsetzt. Tut man dies und entwickelt man dann in Reihen nach dem binomischen Lehrsatz, so erhält man für $\mathfrak{a}$ die Relationen:

$$(1) \quad \mathfrak{a} = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{1}{2}\Big[\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \frac{1}{8}\varepsilon^6 + \frac{5}{64}\varepsilon^8 + \frac{7}{128}\varepsilon^{10} + \frac{21}{512}\varepsilon^{12} + \\ + \frac{33}{1024}\varepsilon^{14} + \frac{429}{16\,384}\varepsilon^{16} + \ldots\ldots\Big]$$

$$(2) \quad \mathfrak{a} = 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_1^2}} = \frac{1}{2}\Big[\varepsilon_1^2 - \frac{3}{4}\varepsilon_1^4 + \frac{5}{8}\varepsilon_1^6 - \frac{35}{64}\varepsilon_1^8 + \frac{63}{128}\varepsilon_1^{10} - \frac{231}{512}\varepsilon_1^{12} + \\ + \frac{429}{1024}\varepsilon_1^{14} - \frac{6\,435}{16\,384}\varepsilon_1^{16} + \frac{12\,155}{32\,768}\varepsilon_1^{18} - \ldots\ldots\Big]$$

$$(3) \quad \mathfrak{a} = 1 - \sqrt{\frac{1 - m}{1 + m}} = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{1 + m} = \frac{1}{2}\Big[m^2 - m^3 + \frac{3}{4}(m^4 - m^5) + \\ + \frac{5}{8}(m^6 - m^7) + \frac{35}{64}(m^8 - m^9) + \ldots\ldots\Big]$$

[1]) Die Entfernung e eines Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse heißt die lineare Exzentrizität; es ist $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $\varepsilon_1 = \frac{e}{b}$.

$$(4)\quad \mathfrak{a} = \frac{2n}{1+n} = 2\,[n - n^2 + n^3 - n^4 + n^5 - n^6 + n^7 - \ldots\ldots]$$

Bei den Zahlenwerten, die diese Hilfsgrößen beim Erdsphäroid besitzen (worüber später), ist die Reihe (4) am konvergentesten; $\mathfrak{a}$ ist auf 10 (15, 20) Dezimalstellen präzisiert

bei	der	Reihe	(4)	durch	3 (5, 7)	Glieder
„	„	„	(3)	„	4 (6, 8)	„
„	„	„	(1)	„	4 (6, 8)	„
„	„	„	(2)	„	4 (6, 9)	„

bei welcher Zählung — wie auch weiterhin bei solchen Angaben — die Klammern als aufgelöst zu denken sind.

Man erhält ferner für ε^2:

$$(5)\quad \varepsilon^2 = 2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2$$

$$(6)\quad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{1+\varepsilon_1^{\,2}} = \varepsilon_1^{\,2} - \varepsilon_1^{\,4} + \varepsilon_1^{\,6} - \varepsilon_1^{\,8} + \varepsilon_1^{\,10} - \varepsilon_1^{\,12} + \varepsilon_1^{\,14} - \varepsilon_1^{\,16} + \varepsilon_1^{\,18} - \ldots\ldots$$

$$(7)\quad \varepsilon^2 = \frac{2m}{1+m} = 2\,[m - m^2 + m^3 - m^4 + m^5 - m^6 + m^7 - m^8 + \ldots\ldots]$$

$$(8)\quad \varepsilon^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} = 4\,[n - 2n^2 + 3n^3 - 4n^4 + 5n^5 - 6n^6 + 7n^7 - \ldots\ldots]$$

Hier ist natürlich (5) der einfachste Ausdruck und dazu geschlossen. Von den Reihen ist wiederum die mit n am konvergentesten; ε^2 wird auf 10 (15, 20) Dezimalstellen erhalten

bei	der	Reihe	(8)	durch	4 (5, 7)	Glieder
„	„	„	(7)	„	4 (6, 8)	„
„	„	„	(6)	„	4 (7, 9)	„

Für $\varepsilon_1^{\,2}$ erhält man:

$$(9)\quad \varepsilon_1^{\,2} = \frac{2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2}{(1-\mathfrak{a})^2} = 2\mathfrak{a} + 3\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{a}^3 + 5\mathfrak{a}^4 + 6\mathfrak{a}^5 + 7\mathfrak{a}^6 + 8\mathfrak{a}^7 + 9\mathfrak{a}^8 + \ldots\ldots$$

$$(10)\quad \varepsilon_1^{\,2} = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{18} + \ldots\ldots$$

$$(11)\quad \varepsilon_1^{\,2} = \frac{2m}{1-m} = 2\,[m + m^2 + m^3 + m^4 + m^5 + m^6 + m^7 + m^8 + \ldots\ldots]$$

$$(12)\quad \varepsilon_1^{\,2} = \frac{4n}{(1-n)^2} = 4\,[n + 2n^2 + 3n^3 + 4n^4 + 5n^5 + 6n^6 + 7n^7 + \ldots\ldots]$$

Auch hier konvergiert die Reihe mit n am stärksten; $\varepsilon_1^{\,2}$ wird auf 10 (15, 20) Dezimalstellen geliefert

von	der	Reihe	(12)	durch	3 (5, 7)	Glieder
„	„	„	(11)	„	4 (6, 8)	„
„	„	„	(9)	„	4 (6, 8)	„
„	„	„	(10)	„	4 (7, 9)	„

Für m erhält man die Ausdrücke und Reihen:

$$(13)\quad m = \frac{2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2}{2 - 2\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}^2 - \frac{1}{4}(\mathfrak{a}^4 + \mathfrak{a}^5) - \frac{1}{8}\mathfrak{a}^6 + \frac{1}{16}(\mathfrak{a}^8 + \mathfrak{a}^9) + \ldots\ldots$$

$$(14)\quad m = \frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^4 + \frac{1}{4}\varepsilon^6 + \frac{1}{8}\varepsilon^8 + \frac{1}{16}\varepsilon^{10} + \frac{1}{32}\varepsilon^{12} + \frac{1}{64}\varepsilon^{14} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{128}\varepsilon^{16} + \frac{1}{256}\varepsilon^{18} + \ldots\ldots\right]$$

$$(15)\quad m = \frac{\varepsilon_1{}^2}{2 + \varepsilon_1{}^2} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1{}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1{}^4 + \frac{1}{4}\varepsilon_1{}^6 - \frac{1}{8}\varepsilon_1{}^8 + \frac{1}{16}\varepsilon_1{}^{10} - \frac{1}{32}\varepsilon_1{}^{12} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{64}\varepsilon_1{}^{14} - \frac{1}{128}\varepsilon_1{}^{16} + \frac{1}{256}\varepsilon_1{}^{18} - \ldots\ldots\right]$$

$$(16)\quad m = \frac{2n}{1 + n^2} = 2\,[n - n^3 + n^5 - n^7 + \ldots\ldots]$$

Die konvergenteste Reihe ist auch hier wieder die mit n; m wird auf 10 (15, 20) Dezimalstellen bestimmt

bei	der	Reihe	(16)	durch	2 (3, 4)	Glieder
„	„	„	(13)	„	2 (4, 5)	„
„	„	„	(14)	„	4 (6, 8)	„
„	„	„	(15)	„	4 (6, 8)	„

Für n endlich ergibt sich:

$$(17)\quad n = \frac{\mathfrak{a}}{2 - \mathfrak{a}} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{a}^3 + \frac{1}{8}\mathfrak{a}^4 + \frac{1}{16}\mathfrak{a}^5 + \frac{1}{32}\mathfrak{a}^6 + \ldots\ldots\right]$$

$$(18)\quad n = \left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^4 + \frac{5}{16}\varepsilon^6 + \frac{7}{32}\varepsilon^8 + \frac{21}{128}\varepsilon^{10} + \frac{33}{256}\varepsilon^{12} + \frac{429}{4\,096}\varepsilon^{14} + \right.$$
$$\left. + \frac{715}{8\,192}\varepsilon^{16} + \ldots\ldots\right]$$

$$(19)\quad n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} + 1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} - 1}{\varepsilon_1}\right)^2 = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} - 1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} + 1} =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\varepsilon_1{}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1{}^4 + \frac{5}{16}\varepsilon_1{}^6 - \frac{7}{32}\varepsilon_1{}^8 + \frac{21}{128}\varepsilon_1{}^{10} - \frac{33}{256}\varepsilon_1{}^{12} + \frac{429}{4\,096}\varepsilon_1{}^{14} - \right.$$
$$\left. - \frac{715}{8\,192}\varepsilon_1{}^{16} + \ldots\ldots\right]$$

$$(20)\quad n = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{1 + \sqrt{1 - m^2}}} = \frac{\sqrt{1 + m} - \sqrt{1 - m}}{\sqrt{1 + m} + \sqrt{1 - m}} = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} = \frac{m}{1 + \sqrt{1 - m^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[m + \frac{1}{4}m^3 + \frac{1}{8}m^5 + \frac{5}{64}m^7 + \frac{7}{128}m^9 + \ldots\ldots\right]$$

Die weitaus konvergenteste Reihe ist hier die meines Wissens bisher noch nicht aufgestellt gewesene mit m; n wird auf 10 (15, 20) Glieder erhalten

bei der Reihe	(20)	durch	2	(3, 4)	Glieder
„ „ „	(17)	„	3	(5, 7)	„
„ „ „	(18)	„	4	(6, 8)	„
„ „ „	(19)	„	4	(6, 8)	„

Es ist übrigens wohl selbstverständlich, daß man, um eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen scharf zu erhalten, bei Reihenentwicklungen wie auch sonst immer einige Stellen mehr berechnen muß, damit sich die durch die Vernachlässigung eben dieser Stellen entstehenden Fehler nicht summieren.

Jede Halbachse läßt sich durch die andere und eine der Hilfsgrößen ausdrücken; die betreffenden Relationen sind diese:

$$a = \frac{b}{1-\mathfrak{a}} = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b\sqrt{1+\varepsilon_1^2} = b\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = b\,\frac{1+n}{1-n} \tag{21}$$

$$b = a\,(1-\mathfrak{a}) = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{a}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2}} = a\sqrt{\frac{1-m}{1+m}} = a\,\frac{1-n}{1+n} \tag{22}$$

In neuerer Zeit wird mitunter[1]) noch eine weitere Hilfsgröße $c = \frac{a^2}{b}$ benützt; hiefür ergeben sich folgende Relationen:

$$c = \frac{a}{1-\mathfrak{a}} = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = a\sqrt{1+\varepsilon_1^2} = a\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = a\,\frac{1+n}{1-n} \tag{23}$$

$$c = \frac{b}{(1-\mathfrak{a})^2} = \frac{b}{1-\varepsilon^2} = b\,(1+\varepsilon_1^2) = b\,\frac{1+m}{1-m} = b\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 \tag{24}$$

Die Größe c entspricht dem Krümmungsradius in den Polen der Meridianellipse und wird deshalb bei manchen geodätischen Entwicklungen in Verbindung mit der auf die kleine Halbachse — die Umdrehungsachse — bezogenen zweiten Exzentrizität mit Vorteil benützt.

Meridianbogenlängen

Für ein als geradlinig zu betrachtendes Bogenelement dM der Meridianellipse zwischen den geographischen Breiten φ und $d\varphi$ gilt nach Helmert:[2])

$$dM = a\,(1-n)\,(1-n^2)\left[\left(1+n\,\mathfrak{e}^{2i\varphi}\right)\left(1+n\,\mathfrak{e}^{-2i\varphi}\right)\right]^{-\frac{3}{2}} d\varphi \tag{25}$$

wobei $\mathfrak{e}$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet und $i = \sqrt{-1}$.

[1]) W. Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, III. Bd., 5. Aufl., Stuttgart 1907, S. 207 ff.

[2]) F. R. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Bd., Leipzig 1880, S. 46. — Auf die Wiederholung der Ableitung kann hier füglich verzichtet werden.

Nach dem binomischen Lehrsatz (auf zwei Glieder mehr als bei Helmert) entwickelt ist nun:

$$(26)\qquad \left(1+n\,e^{\pm 2i\varphi}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\,n\,e^{\pm 2i\varphi} + \frac{15}{8}\,n^2\,e^{\pm 4i\varphi} - \frac{35}{16}\,n^3\,e^{\pm 6i\varphi} + \\ + \frac{315}{128}\,n^4\,e^{\pm 8i\varphi} - \frac{693}{256}\,n^5\,e^{\pm 10i\varphi} + \frac{3\,003}{1\,024}\,n^6\,e^{\pm 12i\varphi} - \ldots\ldots$$

Multipliziert man die beiden in (26) enthaltenen Reihen und führt statt des Imaginären die Cosinus ein, so folgt für (25):

$$(27)\quad dM = a\,[A_0 - 2\,A_2 \cos 2\varphi + 4\,A_4 \cos 4\varphi - 6\,A_6 \cos 6\varphi + 8\,A_8 \cos 8\varphi - \\ - 10\,A_{10} \cos 10\varphi + 12\,A_{12} \cos 12\varphi - \ldots\ldots]\,d\varphi$$

wobei die Koeffizienten A die folgenden sind:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
A_0 &= (1-n)\,(1-n^2)\left[1 + \frac{9}{4}\,n^2 + \frac{225}{64}\,n^4 + \frac{1\,225}{256}\,n^6 + \ldots\ldots\right] \\
A_2 &= \frac{3}{2}\,(1-n)\,(1-n^2)\left[n + \frac{15}{8}\,n^3 + \frac{175}{64}\,n^5 + \ldots\ldots\right] \\
A_4 &= \frac{15}{16}\,(1-n)\,(1-n^2)\left[n^2 + \frac{7}{4}\,n^4 + \frac{315}{128}\,n^6 + \ldots\ldots\right] \\
A_6 &= \frac{35}{48}\,(1-n)\,(1-n^2)\left[n^3 + \frac{27}{16}\,n^5 + \ldots\ldots\right] \\
A_8 &= \frac{9}{512}\,(1-n)\,(1-n^2)\left[35\,n^4 + \frac{231}{4}\,n^6 + \ldots\ldots\right] \\
A_{10} &= \frac{693}{1\,280}\,(1-n)\,(1-n^2)\,[n^5 + \ \ldots] \\
A_{12} &= \frac{1\,001}{2\,048}\,(1-n)\,(1-n^2)\,[n^6 + \ldots\ldots]
\end{aligned}\right.$$

Die Koeffizienten A sind hier so adjustiert, daß sie aus der bevorstehenden Integration nicht wie bei Helmert (A_0 ausgenommen) nur zur Hälfte, sondern in ihrer Gänze hervorgehen. Aus diesem Grunde sind sie nicht mit den Helmertschen Koeffizienten A identisch, obwohl der Wert der Formel (27) für dM natürlich derselbe ist wie bei der bezüglichen Formel Helmerts, abgesehen von der hier weiter getriebenen Entwicklung.

Helmert multipliziert nun die Reihen seiner Koeffizienten mit $(1-n^2)^2$ aus, um deren Konvergenz zu erhöhen. Dabei bleibt jedoch $\frac{1}{1+n}$ als Faktor außerhalb einer jeden Reihe übrig, was für die numerische Auswertung unbequem ist. Multiplizieren wir dagegen unsere Reihen mit $(1-n)$ $(1-n^2)$ aus, so nehmen die Koeffizienten A von (28) die folgende einfache Gestalt an:

$$
(29) \begin{cases}
A_0 = 1 - n + \frac{5}{4}(n^2 - n^3) + \frac{81}{64}(n^4 - n^5) + \frac{325}{256}(n^6 - n^7) + \ldots\ldots{}^{1)} \\
A_2 = \frac{3}{2}\left[n - n^2 + \frac{7}{8}(n^3 - n^4) + \frac{55}{64}(n^5 - n^6) + \ldots\ldots\right] \\
A_4 = \frac{15}{16}\left[n^2 - n^3 + \frac{3}{4}(n^4 - n^5) + \frac{91}{128}(n^6 - n^7) + \ldots\ldots\right] \\
A_6 = \frac{35}{48}\left[n^3 - n^4 + \frac{11}{16}(n^5 - n^6) + \ldots\ldots\right] \\
A_8 = \frac{315}{512}\left[n^4 - n^5 + \frac{13}{20}(n^6 - n^7) + \ldots\ldots\right] \\
A_{10} = \frac{693}{1\,280}\left[n^5 - n^6 + \ldots\ldots\right] \\
A_{12} = \frac{1\,001}{2\,048}\left[n^6 - n^7 + \ldots\ldots\right]
\end{cases}
$$

Die Integration von (27) ergibt nunmehr für den Meridianbogen M_φ vom Äquator bis zur geographischen Breite φ:

$$
(30) \quad M_\varphi = a\,[A_0\,\varphi - A_2 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi - A_6 \sin 6\varphi + A_8 \sin 8\varphi - \\
- A_{10} \sin 10\varphi + A_{12} \sin 12\varphi - \ldots\ldots]
$$

wobei die Koeffizienten A die in (29) angeschriebenen Werte besitzen und φ im ersten Gliede analytisch zu verstehen ist, so daß

$$
(31) \qquad \varphi = \frac{\pi}{180}\,\varphi^0 = \frac{\pi}{10\,800}\,\varphi' = \frac{\pi}{648\,000}\,\varphi''
$$

je nachdem der Winkel φ geometrisch in Graden, Minuten oder Sekunden gegeben ist. Setzt man, wie üblich,

$$
(32) \qquad \varrho^0 = \frac{180}{\pi} \qquad \varrho' = \frac{10\,800}{\pi} \qquad \varrho'' = \frac{648\,000}{\pi},^{2)}
$$

so wird

$$
(33) \qquad \varphi = \frac{1}{\varrho^0}\,\varphi^0 = \frac{1}{\varrho'}\,\varphi' = \frac{1}{\varrho''}\,\varphi''
$$

Die Formeln (30) und (29) enthalten mehr Glieder, als in der Regel benötigt werden. In der Praxis kann man die höheren Glieder als A_8 und

[1]) n^7 ist, wo es erscheint, nur dem Formelbild zuliebe beachtet.

[2]) Hier sei bemerkt, daß die bezüglichen Angaben bei Jordan (l. c. S. 188) unrichtig sind, da bei der Multiplikation von 180 mit 60 und mit $60 \cdot 60$ der Hunderter vor 80 übersehen wurde. Die weiter ausgerechneten Werte und deren Logarithmen auf S. 189 dagegen sind richtig.

die höheren Potenzen von n als die vierte vernachlässigen und wird das Schlußresultat in Metern immer noch auf 3 Dezimalstellen genau erhalten, was in Anbetracht unserer wirklichen Kenntnis der Erddimensionen mehr als ausreichend ist. Nur bei der Berechnung von Tafeln mit kleinen Interpolationsintervallen wird noch um einen oder zwei Schritte weiterzugehen sein.

Will man direkt die Länge eines Meridianbogens $\varDelta M_\varphi$ zwischen zwei geographischen Breiten φ_1 und φ_2 von der mittleren geographischen Breite φ und dem Breitenunterschiede $\varDelta\varphi$ berechnen, wobei also $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi$ und $\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\varphi$, so ergibt sich aus (30) nach einer goniometrischen Umformung:

$$(34)\quad \varDelta M_\varphi = a\,[A_0\,\varDelta\varphi - 2\,A_2\cos 2\,\varphi\sin\varDelta\varphi + 2\,A_4\cos 4\,\varphi\sin 2\,\varDelta\varphi - \\ - 2\,A_6\cos 6\,\varphi\sin 3\,\varDelta\varphi + 2\,A_8\cos 8\,\varphi\sin 4\,\varDelta\varphi - \\ - 2\,A_{10}\cos 10\,\varphi\sin 5\,\varDelta\varphi + 2\,A_{12}\cos 12\,\varphi\sin 6\,\varDelta\varphi - \ldots\ldots]$$

wobei $\varDelta\varphi$ im ersten Gliede wiederum den Arcus bedeutet.

Setzt man in (30) $\varphi^0 = 90$ und dementsprechend $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so werden die Glieder von A_2 angefangen alle gleich Null und man erhält für den Meridianquadranten M_{90}:

$$(35)\quad M_{90} = \frac{\pi}{2}\,a\,A_0 = \frac{\pi}{2}\,a\left[1 - n + \frac{5}{4}(n^2 - n^3) + \frac{81}{64}(n^4 - n^5) + \frac{325}{256}(n^6 - n^7) + \ldots\ldots\right]$$

Man kann nun in den Koeffizienten (29) n durch jede andere Hilfsgröße und obendrein in der Formel (30) a durch b ersetzen, wozu in erster Linie die Relationen (17) — (20) — und deren zu bildenden Potenzen — und (21) dienen. Man kann aber auch jeden auf diese Weise neu erhaltenen Ausdruck wieder umformen und zu diesem Behufe unter den Relationen (1) — (16) wählen. Dann muß sich zeigen, welche Halbachse und welche Hilfsgröße die für die Rechnung praktischste und einfachste Formel ergibt.

Es wird genügen, diese Operationen für das Hauptglied A_0, beziehungsweise für den Meridianquadranten durchzuführen, da hiernach auch auf die Gestaltung der anderen Glieder geschlossen werden kann.

Man erhält auf diese Weise die folgenden Ausdrücke für den Meridianquadranten, wobei die Entwicklung allenthalben so weit getrieben ist, als es in (29) noch der Berücksichtigung von n^6 entspricht.

$$(36)\quad M_{90} = \frac{\pi}{2}\,a\left[1 - \frac{1}{2}\mathfrak{a} + \frac{1}{16}\mathfrak{a}^2 + \frac{1}{32}\mathfrak{a}^3 + \frac{17}{1\,024}\mathfrak{a}^4 + \frac{19}{2\,048}\mathfrak{a}^5 + \right. \\ \left. + \frac{89}{16\,384}\,a^6 + \ldots\ldots\right]$$

$$(37)\quad M_{90} = \frac{\pi}{2}\,a\left[1 - \frac{1}{4}\,\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\,\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\,\varepsilon^6 - \frac{175}{16\,384}\,\varepsilon^8 - \frac{441}{65\,536}\,\varepsilon^{10} - \right. \\ \left. - \frac{4\,851}{1\,048\,576}\,\varepsilon^{12} - \ldots\ldots\right]$$

$$(38)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} a \left[1 - \frac{1}{4} \varepsilon_1{}^2 + \frac{13}{64} \varepsilon_1{}^4 - \frac{45}{256} \varepsilon_1{}^6 + \frac{2\,577}{16\,384} \varepsilon_1{}^8 - \frac{9\,417}{65\,536} \varepsilon_1{}^{10} + \right.$$
$$\left. + \frac{139\,613}{1\,048\,576} \varepsilon_1{}^{12} - \frac{522\,821}{4\,194\,304} \varepsilon_1{}^{14} + \ldots\ldots \right]$$

$$(39)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} a \left[1 - \frac{1}{2} m + \frac{5}{16} m^2 - \frac{9}{32} m^3 + \frac{241}{1\,024} m^4 - \frac{449}{2\,048} m^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{3\,221}{16\,384} m^6 - \ldots\ldots \right]$$

$$(40)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} b \left[1 + \frac{1}{2} \mathfrak{a} + \frac{9}{16} \mathfrak{a}^2 + \frac{19}{32} \mathfrak{a}^3 + \frac{625}{1\,024} \mathfrak{a}^4 + \frac{1\,269}{2\,048} \mathfrak{a}^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{10\,241}{16\,384} \mathfrak{a}^6 + \ldots\ldots \right]$$

$$(41)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} b \left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{13}{64} \varepsilon^4 + \frac{45}{256} \varepsilon^6 + \frac{2\,577}{16\,384} \varepsilon^8 + \frac{9\,417}{65\,536} \varepsilon^{10} + \right.$$
$$\left. + \frac{139\,613}{1\,048\,576} \varepsilon^{12} + \frac{522\,821}{4\,194\,304} \varepsilon^{14} + \ldots\ldots \right]$$

$$(42)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} b \left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon_1{}^2 - \frac{3}{64} \varepsilon_1{}^4 + \frac{5}{256} \varepsilon_1{}^6 + \frac{175}{16\,384} \varepsilon_1{}^8 + \frac{441}{65\,536} \varepsilon_1{}^{10} - \right.$$
$$\left. - \frac{4\,851}{1\,048\,576} \varepsilon_1{}^{12} + \ldots\ldots \right]$$

$$(43)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} b \left[1 + \frac{1}{2} m + \frac{5}{16} m^2 + \frac{9}{32} m^3 + \frac{241}{1\,024} m^4 + \frac{449}{2\,048} m^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{3\,221}{16\,384} m^6 + \ldots\ldots \right]$$

$$(44)\qquad M_{90} = \frac{\pi}{2} b \left[1 + n + \frac{5}{4} (n^2 + n^3) + \frac{81}{64} (n^4 + n^5) + \frac{325}{256} (n^6 + n^7) + \ldots\ldots \right]$$

Es ist bemerkenswert, daß in (35) und (44), in (37) und (42), in (38) und (41) und in (39) und (43) je dieselben Zahlenkoeffizienten auftreten, nur mit zur Hälfte verschiedenen Vorzeichen. Dies hat seinen Grund in den Beziehungen zwischen a und b, ε^2, $\varepsilon_1{}^2$, m und n, die in (21) und (22) vermerkt sind.

Man sieht, daß die Entwicklungen mit ε^2 und mit $\varepsilon_1{}^2$ die monströsesten sind und daß die mit $\mathfrak{a}$ günstiger sind als die mit m. Am günstigsten aber sind die mit n, gleichviel ob in Verbindung mit a oder mit b; bei a ist die Reihe wegen der negativen Glieder konvergenter als bei b, doch wird dies vollkommen dadurch ausgeglichen, daß sie dort eben mit dem verhältnismäßig größeren a multipliziert wird. Manche Geographen und Geodäten haben indessen eine ausgesprochene Vorliebe für b. Will man nun nicht nur den Meridianquadranten, sondern ganz allgemein irgendeinen Meridianbogen lieber mit Hilfe von b berechnen als mit Hilfe von a, so braucht man nur in Formel (30), beziehungsweise (34) b anstatt a zu schreiben und in den dazugehörenden Koeffizienten (29) alle negativen Vorzeichen durch positive zu ersetzen, da die Gesetzmäßigkeit, die eben vorhin bei dem Gliede A_0 bemerkt wurde, aus demselben Grunde wie dort auch bei den folgenden Gliedern eintritt.

Da sich beim Meridianquadranten, beziehungsweise bei A_0 nächst der Entwicklung mit n die mit $\mathfrak{a}$ am günstigsten erwiesen hat, ist es nicht ohne Interesse zu sehen, wie sich die Entwicklung mit $\mathfrak{a}$ bei den übrigen Koeffizienten gestaltet. Im folgenden sind deshalb alle A in der Entwicklung mit $\mathfrak{a}$ verzeichnet:

$$
(45)\left\{\begin{aligned}
A_0 &= 1-\frac{1}{2}\mathfrak{a}+\frac{1}{16}\left(\mathfrak{a}^2+\frac{1}{2}\mathfrak{a}^3\right)+\frac{1}{1\,024}\left(17\,\mathfrak{a}^4+\frac{19}{2}\mathfrak{a}^5\right)+\frac{89}{16\,384}\mathfrak{a}^6+\ldots\ldots\\
A_2 &= \frac{3}{4}\left[\mathfrak{a}-\frac{1}{32}(\mathfrak{a}^3+\mathfrak{a}^4)-\frac{1}{512}\left(\frac{25}{2}\mathfrak{a}^5+9\,\mathfrak{a}^6\right)-\ldots\ldots\right]\\
A_4 &= \frac{15}{64}\left[\mathfrak{a}^2+\frac{1}{2}\mathfrak{a}^3+\frac{1}{16}\left(3\,\mathfrak{a}^4+\frac{1}{2}\mathfrak{a}^5\right)-\frac{69}{2\,048}\mathfrak{a}^6-\ldots\ldots\right]\\
A_6 &= \frac{35}{192}\left[\mathfrak{a}^3+\mathfrak{a}^4+\frac{1}{32}\left(\frac{43}{2}\mathfrak{a}^5+11\,\mathfrak{a}^6\right)+\ldots\ldots\right]\\
A_8 &= \frac{315}{8\,192}\left[\mathfrak{a}^4+\frac{1}{2}\left(3\,\mathfrak{a}^5+\frac{113}{40}\mathfrak{a}^6\right)+\ldots\ldots\right]\\
A_{10} &= \frac{693}{20\,480}\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^5+\mathfrak{a}^6+\ldots\ldots\right]\\
A_{12} &= \frac{1\,001}{131\,072}\left[\mathfrak{a}^6-\ldots\ldots\right]
\end{aligned}\right.
$$

Vergleicht man nun (45) mit (29), so ist die Überlegenheit von n über $\mathfrak{a}$ bezüglich der Berechnungsformel für Meridianbogen sofort ersichtlich.

Für $b=a$ gehen die Formeln (35) — (44), wenn man sie, um den vollständigen Umfang zu erhalten, mit 4 multipliziert, in den Ausdruck $4\pi a$ für den Umfang des Kreises vom Halbmesser a über, da alsdann die in den Reihen auftretenden Hilfsgrößen gleich Null sind.

Parallelkreisbogen

Bezeichnet u_φ den Umfang eines Parallelkreises in der geographischen Breite φ, r_φ den Halbmesser des Parallelkreises und N_φ die bis zur Umdrehungsachse verlängerte Normale, so ist:

$$
(46)\left\{\begin{aligned}
N_\varphi &= \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\\
u_\varphi &= 2\,\pi\,r_\varphi = 2\,\pi\,N_\varphi\cos\varphi
\end{aligned}\right.
$$

Wenn man nicht Tabellen für N_φ zur Verfügung hat, so gestaltet sich die direkte Berechnung der Parallelkreisumfänge und -Grade viel einfacher mit Hilfe der reduzierten Breite. Bezeichnet man die der geographischen Breite φ entsprechende reduzierte Breite mit ψ, so ist:[1])

$$(47) \begin{cases} tg\,\psi = \frac{b}{a}\,tg\,\varphi \\ u_\varphi = 2\,\pi\,a\cos\psi \end{cases}$$

Zonenflächen

Der Flächeninhalt Z_φ einer rings um die Erde reichenden Zone vom Äquator bis zur geographischen Breite φ ist nach Helmert[2]) mit Entwicklung dreier weiterer Glieder:

$$(48) \quad Z_\varphi = 2\,\pi\,a^2\,[z_1 \sin\varphi - z_3 \sin 3\,\varphi + z_5 \sin 5\,\varphi - z_7 \sin 7\,\varphi + z_9 \sin 9\,\varphi - - z_{11} \sin 11\,\varphi + z_{13} \sin 13\,\varphi - \ldots\ldots]$$

wobei die Koeffizienten z die folgenden Werte haben:

$$(49) \begin{cases} z_1 = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 - \frac{1}{16}\varepsilon^6 - \frac{5}{128}\varepsilon^8 - \frac{7}{256}\varepsilon^{10} - \frac{21}{1\,024}\varepsilon^{12} - \ldots\ldots \\ z_3 = \frac{1}{6}\varepsilon^2 + \frac{1}{48}\varepsilon^4 + 0 - \frac{1}{192}\varepsilon^8 - \frac{5}{768}\varepsilon^{10} - \frac{27}{4\,096}\varepsilon^{12} - \ldots\ldots \\ z_5 = \frac{3}{80}\varepsilon^4 + \frac{1}{40}\varepsilon^6 + \frac{1}{64}\varepsilon^8 + \frac{5}{512}\varepsilon^{10} + \frac{25}{4\,096}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots \\ z_7 = \frac{1}{112}\varepsilon^6 + \frac{19}{1\,792}\varepsilon^8 + \frac{5}{512}\varepsilon^{10} + \frac{17}{2\,048}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots \\ z_9 = \frac{5}{2\,304}\varepsilon^8 + \frac{17}{4\,608}\varepsilon^{10} + \frac{9}{2\,048}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots \\ z_{11} = \frac{3}{5\,632}\varepsilon^{10} + \frac{53}{45\,056}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots \\ z_{13} = \frac{7}{53\,248}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots \end{cases}$$

Führen wir mit Hilfe von (5) anstatt der numerischen Exzentrizität die Abplattung ein und berücksichtigen dabei, um im Hinblick auf die wirklichen Werte von ε und $\mathfrak{a}$ keine geringere Genauigkeit zu erhalten, noch $\mathfrak{a}^7$,[3]) so bekommen wir für die z die für die Rechnung weit bequemeren Ausdrücke:

[1]) A. v. Böhm: Abplattung und Gebirgsbildung. Leipzig 1910, S. 28, Anmerkung. — In den geographischen Handbüchern ist diese einfache Formel nicht verzeichnet; auch Jordan hat sie nicht. Dagegen findet sie sich bei E. Haentzschel: Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Leipzig 1903, S. 45—46.

[2]) L. c., S. 62.

[3]) Hiebei sind auch noch die in (49) vernachlässigten Glieder mit ε^{14} berücksichtigt worden, da diese auch noch $\mathfrak{a}^7$ liefern. Dadurch werden die neuen Koeffizienten z noch genauer als die in (49) angeschriebenen. Ein weiteres Glied in (48) mit $\sin 15\,\varphi$ und z_{15}

$$(50)\begin{cases} z_1 = 1 - \mathfrak{a} \\ z_3 = \frac{1}{3}\mathfrak{a} - \frac{1}{12}(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^3) - \frac{1}{48}(3\mathfrak{a}^4 + 2\mathfrak{a}^5) - \frac{1}{192}(5\mathfrak{a}^6 + 3\mathfrak{a}^7) - \ldots\ldots \\ z_5 = \frac{1}{20}(3\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^3) - \frac{1}{80}(\mathfrak{a}^4 + 3\mathfrak{a}^5) - \frac{1}{320}(13\mathfrak{a}^6 - 11\mathfrak{a}^7) - \ldots\ldots \\ z_7 = \frac{1}{14}\mathfrak{a}^3 + \frac{1}{112}(7\mathfrak{a}^4 + 3\mathfrak{a}^5) - \frac{1}{224}(\mathfrak{a}^6 + 5\mathfrak{a}^7) - \ldots\ldots \\ z_9 = \frac{1}{144}(5\mathfrak{a}^4 + 7\mathfrak{a}^5) + \frac{1}{288}(11\mathfrak{a}^6 + 5\mathfrak{a}^7) + \ldots\ldots \\ z_{11} = \frac{1}{704}(12\mathfrak{a}^5 + 23\mathfrak{a}^6 + 25\mathfrak{a}^7) + \ldots\ldots \\ z_{13} = \frac{1}{832}(7\mathfrak{a}^6 + 17\mathfrak{a}^7) + \ldots\ldots \end{cases}$$

Noch einfacher aber wird die ganze Formel für die Berechnung der Zonenflächen, wenn man laut (21) in der Hauptformel (48) a^2 durch $\frac{ab}{1-\mathfrak{a}}$ ersetzt, dort aber den Nenner wegläßt und dafür die Koeffizienten z in (50) durch $(1-\mathfrak{a})$ dividiert. Alsdann erhält man:

$$(51)\quad Z_\varphi = 2\pi ab\,[Z_1 \sin\varphi - Z_3 \sin 3\varphi + Z_5 \sin 5\varphi - Z_7 \sin 7\varphi + + Z_9 \sin 9\varphi - Z_{11} \sin 11\varphi + Z_{13} \sin 13\varphi - \ldots\ldots]$$

und dazu:

$$(52)\begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_3 = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{a}^3\right) + \frac{1}{4}\left(\mathfrak{a}^2 + \frac{5}{12}\mathfrak{a}^4\right) + \frac{1}{16}\left(\mathfrak{a}^5 + \frac{7}{12}\mathfrak{a}^6 + \frac{1}{3}\mathfrak{a}^7\right) + \ldots\ldots \\ Z_5 = \frac{3}{20}\left(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^5 + \frac{1}{2}\mathfrak{a}^7\right) + \frac{1}{5}\mathfrak{a}^3 + \frac{1}{16}\left(3\mathfrak{a}^4 + \frac{7}{4}\mathfrak{a}^6\right) + \ldots\ldots \\ Z_7 = \frac{1}{14}\left(\mathfrak{a}^3 + \frac{9}{4}\mathfrak{a}^5\right) + \frac{15}{112}(\mathfrak{a}^4 + \mathfrak{a}^7) + \frac{5}{32}\mathfrak{a}^6 + \ldots\ldots \\ Z_9 = \frac{5}{144}\left(\mathfrak{a}^4 + \frac{7}{2}\mathfrak{a}^6\right) + \frac{1}{12}\left(\mathfrak{a}^5 + \frac{5}{3}\mathfrak{a}^7\right) + \ldots\ldots \\ Z_{11} = \frac{1}{176}\left[3\mathfrak{a}^5 + 5\left(\frac{7}{4}\mathfrak{a}^6 + 3\mathfrak{a}^7\right)\right] + \ldots\ldots \\ Z_{13} = \frac{1}{104}\left(\frac{7}{8}\mathfrak{a}^6 + 3\mathfrak{a}^7\right) + \ldots\ldots \end{cases}$$

---

würde zwar auch noch $\mathfrak{a}^7$ enthalten, sich aber bei der numerischen Auswertung erst in der 20. Dezimalstelle bemerkbar machen.

Die Hauptformel für die Berechnung der Zonenflächen gestaltet sich also mit ab als Grundlage viel günstiger als mit a^2 oder b^2, weil in dem ersten Falle darin $\sin\varphi$ mit dem Koeffizienten 1 auftritt. Aber auch die übrigen Koeffizienten Z können auf eine außerordentlich einfache und noch dazu geschlossene Form gebracht werden, wenn man in ihnen mit Hilfe der Relation (4) und deren nach dem binomischen Lehrsatz zu entwickelnden Potenzen $\mathfrak{a}$ durch n ersetzt. Alsdann gewinnen die Koeffizienten Z die Formen:

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} Z_1 &= 1 \\ Z_3 &= \frac{1}{3}(2n + n^2) \\ Z_5 &= \frac{1}{5}(3n^2 + 2n^3) \\ Z_7 &= \frac{1}{7}(4n^3 + 3n^4) \\ Z_9 &= \frac{1}{9}(5n^4 + 4n^5) \\ Z_{11} &= \frac{1}{11}(6n^5 + 5n^6) \\ Z_{13} &= \frac{1}{13}(7n^6 + 6n^7) \end{aligned}\right.$$

Das gesetzmäßige Fortschreiten der Koeffizienten Z springt dabei in die Augen.

Man kann nun die Hauptformel (51) und die Z (53) bequem in eine einzige Formel zusammenziehen und einfach schreiben:

$$(54)\quad Z_\varphi = 2\pi ab\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}(2n+n^2)\sin 3\varphi + \frac{1}{5}(3n^2+2n^3)\sin 5\varphi - \right.$$
$$- \frac{1}{7}(4n^3+3n^4)\sin 7\varphi + \frac{1}{9}(5n^4+4n^5)\sin 9\varphi -$$
$$\left. - \frac{1}{11}(6n^5+5n^6)\sin 11\varphi + \frac{1}{13}(7n^6+6n^7)\sin 13\varphi - \ldots\ldots\right]$$

Diese unzweifelhaft einfachste und für die numerische Auswertung bequemste Formel ist auf anderem Wege schon 1833 von Grunert[1]) gefunden worden, der ihr jedoch eine für die Rechnung weniger handliche Form[2]) gegeben hat. In eben dieser Gestalt hat sie 1903 auch Haentzschel[3]) ent-

[1]) A. Grunert: Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833, S. 46.

[2]) $Z = 2\pi ab\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}n(n+2)\sin 3\varphi + \frac{1}{5}n^2(2n+3)\sin 5\varphi - \right.$
$\left. - \frac{1}{7}n^3(3n+4)\sin 7\varphi + \ldots\ldots\right]$

[3]) E. Haentzschel: Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Leipzig 1903, S. 53—57.

wickelt, indem er schon vor der Integrierung in den Ausdruck für das Zonendifferential

$$dZ = 2\pi a^2 \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi$$

an Stelle von a^2 und ε^2 das Produkt der beiden Halbachsen und n einführte. Denselben Weg wie Haentzschel hatte übrigens schon 1893 Roedel[1]) eingeschlagen, der aber seine Entwicklung bei einer noch minder handlichen Form abbrach. Merkwürdig ist es aber, daß, wie schon Haentzschel bemerkt, die Grunertsche Formel der Aufmerksamkeit der Geodäten völlig entgangen zu sein scheint, trotzdem sie ja sozusagen durch einen Federstrich auf die in (54) gegebene handliche Form gebracht werden konnte. Aber auch in der neuesten Auflage (1907) des III. Bandes des Jordanschen Handbuches findet Grunerts Formel keine Beachtung.

Die Formel (54) gibt den Flächeninhalt der ganzen, rings um die Erde reichenden Zone. Um den Inhalt eines Zonenabschnittes zwischen zwei Meridianen, die um λ^0 voneinander abstehen, zu erhalten, hat man den Inhalt der ganzen Zone mit $\frac{\lambda^0}{360}$ zu multiplizieren.

Für einen Zonenabschnitt mit der mittleren Breite φ und der Amplitude $\Delta\varphi$ in geographischer Breite zwischen zwei Meridianen von dem geographischen Längenunterschied λ^0 ist der Flächeninhalt $\Delta Z_{\varphi,\lambda}$, indem man den durch die goniometrische Umformung sich ergebenden Faktor $4\pi ab$ vor der eckigen Klammer mit $\frac{\lambda^0}{360}$ multipliziert und durch 4 abkürzt:

$$(55)\qquad \Delta Z_{\varphi,\lambda} = \pi a b \frac{\lambda^0}{90}\Big[Z_1\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi - Z_3\cos 3\varphi\sin\tfrac{3}{2}\Delta\varphi + Z_5\cos 5\varphi\sin\tfrac{5}{2}\Delta\varphi - Z_7\cos 7\varphi\sin\tfrac{7}{2}\Delta\varphi + Z_9\cos 9\varphi\sin\tfrac{9}{2}\Delta\varphi - Z_{11}\cos 11\varphi\sin\tfrac{11}{2}\Delta\varphi + Z_{13}\cos 13\varphi\sin\tfrac{13}{2}\Delta\varphi - \ldots\ldots\Big]$$

wobei die Koeffizienten Z die in (53) angesetzten Werte haben.

Setzt man in (54) $\varphi = 90^0$ und multipliziert mit 2, so erhält man für die Oberfläche O des Erdsphäroides den Ausdruck:

$$(56)\qquad O = 4\pi a b\Big[1 + \tfrac{1}{3}(2n+n^2) + \tfrac{1}{5}(3n^2+2n^3) + \tfrac{1}{7}(4n^3+3n^4) + \tfrac{1}{9}(5n^4+4n^5) + \tfrac{1}{11}(6n^5+5n^6) + \tfrac{1}{13}(7n^6+6n^7) + \ldots\ldots\Big]$$

Mit Hilfe der Relationen (1) — (22) kann man nun auch die Oberfläche durch ab, a^2 oder b^2 in Verbindung mit einer jeden der fünf Hilfsgrößen ausdrücken, wie nachstehend der Vollständigkeit wegen geschieht:

[1]) E. Roedel: Ableitung einer neuen Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotationsellipsoids. Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXVIII, Leipzig 1893, S. 56 bis 60.

$$(57)\qquad O = 4\pi a b\left[1 + \frac{1}{3}\mathfrak{a} + \frac{2}{5}\mathfrak{a}^2 + \frac{46}{105}\mathfrak{a}^3 + \frac{29}{63}\mathfrak{a}^4 + \frac{547}{1155}\mathfrak{a}^5 + \frac{620}{1287}\mathfrak{a}^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{21\,932}{45\,045}\mathfrak{a}^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(58)\qquad O = 4\pi a b\left[1 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 + \frac{17}{120}\varepsilon^4 + \frac{211}{1680}\varepsilon^6 + \frac{4\,601}{40\,320}\varepsilon^8 + \frac{93\,461}{887\,040}\varepsilon^{10} + \right.$$
$$\left. + \frac{907\,771}{9\,225\,216}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots\right]$$

$$(59)\qquad O = 4\pi a b\left[1 + \frac{1}{6}\varepsilon_1{}^2 - \frac{1}{40}\varepsilon_1{}^4 + \frac{1}{112}\varepsilon_1{}^6 - \frac{5}{1152}\varepsilon_1{}^8 + \frac{7}{2816}\varepsilon_1{}^{10} - \right.$$
$$\left. - \frac{21}{13\,312}\varepsilon_1{}^{12} + \ldots\ldots\right]$$

$$(60)\qquad O = 4\pi a b\left[1 + \frac{1}{3}m + \frac{7}{30}m^2 + \frac{43}{210}m^3 + \frac{449}{2520}m^4 + \frac{4\,537}{27\,720}m^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{21\,613}{144\,144}m^6 + \frac{101\,467}{720\,720}m^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(61)^{1)}\qquad O = 4\pi a b\left[1 + \frac{2}{3}n + \frac{14}{15}n^2 + \frac{34}{35}n^3 + \frac{62}{63}n^4 + \frac{98}{99}n^5 + \frac{142}{143}n^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{194}{195}n^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(62)\qquad O = 4\pi a^2\left[1 - \frac{2}{3}\mathfrak{a} + \frac{1}{15}\mathfrak{a}^2 + \frac{4}{105}\mathfrak{a}^3 + \frac{1}{45}\mathfrak{a}^4 + \frac{46}{3465}\mathfrak{a}^5 + \frac{367}{45\,045}\mathfrak{a}^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{232}{45\,045}\mathfrak{a}^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(63)\qquad O = 4\pi a^2\left[1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{15}\varepsilon^4 - \frac{1}{35}\varepsilon^6 - \frac{1}{63}\varepsilon^8 - \frac{1}{99}\varepsilon^{10} - \frac{1}{143}\varepsilon^{12} - \ldots\ldots\right]$$

$$(64)\qquad O = 4\pi a^2\left[1 - \frac{1}{3}\varepsilon_1{}^2 + \frac{4}{15}\varepsilon_1{}^4 - \frac{24}{105}\varepsilon_1{}^6 + \frac{64}{315}\varepsilon_1{}^8 - \frac{128}{693}\varepsilon_1{}^{10} + \right.$$
$$\left. + \frac{512}{3003}\varepsilon_1{}^{12} - \ldots\ldots\right]$$

$$(65)\qquad O = 4\pi a^2\left[1 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{5}m^2 - \frac{38}{105}m^3 + \frac{94}{315}m^4 - \frac{46}{165}m^5 + \frac{2234}{9009}m^6 - \right.$$
$$\left. - \frac{10\,606}{45\,045}m^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(66)\qquad O = 4\pi a^2\left[1 - \frac{4}{3}n + \frac{24}{15}n^2 - \frac{164}{105}n^3 + \frac{496}{315}n^4 - \frac{5436}{3465}n^5 + \frac{70\,808}{45\,045}n^6 - \right.$$
$$\left. - \frac{70\,724}{45\,045}n^7 + \ldots\ldots\right]$$

---

[1]) Entsteht aus (56) durch Auflösung der runden Klammern. Das gesetzmäßige Fortschreiten der Glieder ist auch hier ersichtlich. Für die Rechnung ist aber (56) bequemer.

$$(67)\qquad O = 4\pi b^2 \left[1 + \frac{4}{3}\mathfrak{a} + \frac{26}{15}\mathfrak{a}^2 + \frac{228}{105}\mathfrak{a}^3 + \frac{829}{315}\mathfrak{a}^4 + \frac{2152}{693}\mathfrak{a}^5 + \frac{10\,772}{3\,003}\mathfrak{a}^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{26\,216}{6\,435}\mathfrak{a}^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(68)\qquad O = 4\pi b^2 \left[1 + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{3}{5}\varepsilon^4 + \frac{4}{7}\varepsilon^6 + \frac{5}{9}\varepsilon^8 + \frac{6}{11}\varepsilon^{10} + \frac{7}{13}\varepsilon^{12} + \ldots\ldots\right]$$

$$(69)\qquad O = 4\pi b^2 \left[1 + \frac{2}{3}\varepsilon_1{}^2 - \frac{1}{15}\varepsilon_1{}^4 + \frac{4}{105}\varepsilon_1{}^6 - \frac{8}{315}\varepsilon_1{}^8 + \frac{64}{3465}\varepsilon_1{}^{10} - \right.$$
$$\left. - \frac{128}{9009}\varepsilon_1{}^{12} + \ldots\ldots\right]$$

$$(70)\qquad O = 4\pi b^2 \left[1 + \frac{4}{3}m + \frac{16}{15}m^2 + \frac{116}{105}m^3 + \frac{984}{945}m^4 + \frac{3676}{3465}m^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{27\,840}{27\,027}m^6 + \frac{46\,964}{45\,045}m^7 + \ldots\ldots\right]$$

$$(71)\qquad O = 4\pi b^2 \left[1 + \frac{8}{3}n + \frac{64}{15}n^2 + \frac{216}{35}n^3 + \frac{512}{63}n^4 + \frac{1000}{99}n^5 + \frac{1728}{143}n^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{2744}{195}n^7 + \ldots\ldots\right]$$

Von den Reihen ist hier die (63) mit a^2 und ε^2 weitaus am einfachsten, aber wir haben bereits in (48) und (49) gesehen, daß die Basierung der allgemeinen Formel für die Zonenflächen auf diese beiden Größen für die Rechnung recht unbequeme Koeffizienten z ergibt. Die konvergenteste Reihe ist scheinbar die (59) mit ab und $\varepsilon_1{}^2$; mit Rücksicht auf die numerischen Werte der Hilfsgrößen sind jedoch in Wirklichkeit die Reihen (62) mit a^2 und $\mathfrak{a}$ und (61) mit ab und n bei gleicher Anzahl von Gliedern noch konvergenter. Immerhin liegt die Versuchung nahe, die Z für (51) auch mit $\varepsilon_1{}^2$ zu entwickeln, was am besten aus (53) mit Hilfe der Relation (19) und deren Potenzen geschieht. Man erhält alsdann für die Z:

$$(72)\qquad \begin{cases} Z_1 = 1 \\[4pt] Z_3 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\varepsilon_1{}^2 - \dfrac{1}{8}\varepsilon_1{}^4 + \dfrac{1}{16}\varepsilon_1{}^6 - \dfrac{7}{192}\varepsilon_1{}^8 + \dfrac{3}{128}\varepsilon_1{}^{10} - \dfrac{33}{2\,048}\varepsilon_1{}^{12} + \ldots\ldots\right] \\[4pt] Z_5 \quad \dfrac{1}{16}\left[\dfrac{3}{5}\varepsilon_1{}^4 - \dfrac{1}{2}\varepsilon_1{}^6 + \dfrac{3}{8}\varepsilon_1{}^8 - \dfrac{9}{32}\varepsilon_1{}^{10} + \dfrac{55}{256}\varepsilon_1{}^{12} - \ldots\ldots\right] \\[4pt] Z_7 = \dfrac{1}{16}\left[\dfrac{1}{7}\varepsilon_1{}^6 - \dfrac{3}{16}\varepsilon_1{}^8 + \dfrac{33}{112}\varepsilon_1{}^{10} - \dfrac{11}{64}\varepsilon_1{}^{12} + \ldots\ldots\right] \\[4pt] Z_9 = \dfrac{1}{256}\left[\dfrac{5}{9}\varepsilon_1{}^8 - \varepsilon_1{}^{10} + \dfrac{5}{4}\varepsilon_1{}^{12} - \ldots\ldots\right] \\[4pt] Z_{11} = \dfrac{1}{512}\left[\dfrac{3}{11}\varepsilon_1{}^{10} - \dfrac{5}{8}\varepsilon_1{}^{12} + \ldots\ldots\right] \\[4pt] Z_{13} = \dfrac{7}{53\,248}\varepsilon_1{}^{12} - \ldots\ldots \end{cases}$$

Gewonnen ist damit natürlich praktisch nichts, denn die Z in (52), (53) und (72) sind ja ihrem Werte nach einander gleich; in (53) sind sie aber in geschlossener Form dargestellt und können obendrein hieraus am leichtesten und mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden.

Die Integrierung des Ausdruckes für das Zonendifferential

$$dZ = 2\,\pi\,a^2 \frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi = 2\,\pi\,b^2 \frac{\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi$$

läßt sich auch ohne Reihenentwicklung durchführen und ergibt alsdann für die Zone Z_φ vom Äquator bis zur geographischen Breite φ die geschlossene und mathematisch elegante, aber für die numerische Auswertung unbequeme Formel:

$$(73) \qquad Z_\varphi = \pi\,b^2 \left[\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{\varepsilon}\log\operatorname{nat}\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\right]$$

oder, wenn man mit μ den Modulus des Briggschen Logarithmensystems bezeichnet:

$$(74) \qquad Z_\varphi = \pi\,b^2 \left[\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{\varepsilon\mu}\log\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\right]$$

Setzt man $\varphi = 90^0$ und multipliziert, um die Oberfläche O des ganzen Erdsphäroides zu erhalten, mit 2, so geht die Formel (73), da $b^2 = a^2\,(1-\varepsilon^2)$ und nach einer einfachen Transformierung $\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ ist, über in:[1])

$$(75) \quad O = 2\,\pi\,a^2\left[1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon}\log\operatorname{nat}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] = 2\,\pi\,a^2\left[1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon\mu}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$$

Dies kann man, wenn man ε durch a und b ausdrückt, auch so schreiben:[2])

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} O &= 2\,\pi\,a^2\left[1 + \frac{b^2}{2\,a\sqrt{a^2-b^2}}\log\operatorname{nat}\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right] \\ O &= 2\,\pi\,a^2\left[1 + \frac{b^2}{2\,a\sqrt{a^2-b^2}}\,\frac{1}{\mu}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right] \end{aligned} \right.$$

Setzt man in (75) $\varepsilon = 0$, beziehungsweise in (76) $b = a$, so gehen die Formeln über in $O = 2\,\pi\,a^2\,[1 + \infty\,.\,0] = 2\,\pi\,a^2\left[1 + \frac{0}{0}\right]$, und da sie als-

[1]) Die betreffenden Formeln in Jordans Handbuch der Vermessungskunde, III. Bd., 5. Auflage, Stuttgart 1907, S. 242, ergeben versehentlicherweise den doppelten Flächeninhalt der Zone, beziehungsweise des Sphäroides, und müssen deshalb rechter Hand je durch 2 dividiert werden.

[2]) Bei dieser Formel findet sich wiederum dasselbe Versehen wie bei Jordan in S. Günthers Handbuch der Mathematischen Geographie, Stuttgart 1890, S. 324, und außerdem ist dort entweder die Kennzeichnung des Logarithmus als natürlichen oder der Modulus μ als Divisor vergessen.

dann der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser a entsprechen, so müssen in diesem Falle die unbestimmten Werte $\infty \,.\, 0$ oder $\frac{0}{0}$ die Einheit bedeuten.[1])

Die Formeln (56)—(71) ergeben dagegen für $b = a$ direkt den Flächeninhalt $4\pi a^2$ der Kugel vom Halbmesser a, da alsdann die in den Reihen auftretenden Hilfsgrößen gleich Null sind.

Die Besselschen Konstanten

Die von Bessel im Jahre 1841 aus 10 Breitengradmessungen abgeleiteten Erddimensionen werden, obwohl sie nach den neueren Messungen und Untersuchungen um einige hundert Meter zu klein sind,[2]) doch auch heute noch vielfach und in Österreich-Ungarn und im Deutschen Reiche ganz allgemein als Grundlage für die geodätischen Rechnungen benützt und werden vermutlich als solche auch nicht allzubald durch andere ersetzt werden. Zahlreiche Hilfstafeln für geodätische Operationen sind auf die Besselschen Erddimensionen basiert und ausführliche, über die ganze Erdoberfläche ausgedehnte Berechnungen von Linear- und Flächengrößen sind bisher wohl nur für das Besselsche Erdsphäroid durchgeführt worden.

Obwohl nun die von Bessel selbst mitgeteilten Werte schon bei weitem das Maß ihrer sachlichen Genauigkeit überschreiten, ist es doch bei den numerischen Rechnungen geboten, damit noch schärfer weiterzurechnen, auf

---

[1]) Am einfachsten läßt sich dies bei (75) zeigen, wenn man den natürlichen Logarithmus in Reihen entwickelt und die Reihe des Nenners von der des Zählers subtrahiert. Man erhält so:

$$O = 2\,\pi\,a^2 \left[1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon}\,2\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{5} + \frac{\varepsilon^7}{7} + \ldots\ldots\right)\right]$$

Kürzt man nun durch ε ab und setzt dann $\varepsilon = o$, so erhält man

$$O = 2\,\pi\,a^2 \left[1 + \frac{1}{2}\,2\right] = 4\,\pi\,a^2$$

Setzt man in (73) $\varepsilon = o$, so geht diese Formel in den Ausdruck für die Oberfläche einer Kugelzone vom Kugelhalbmesser b und der Höhe $h = b \sin\varphi$ über. Diese Formel läßt sich nämlich zunächst auch so schreiben:

$$Z_\varphi = \pi\,b^2 \left[\frac{\sin\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2\,\varepsilon}\log\text{nat}\,\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right]$$

Verfährt man nun ebenso wie früher, so erhält man nach Abkürzung durch ε und darauf erfolgender Setzung von $\varepsilon = o$

$$Z_\varphi = \pi\,b^2\,[\sin\varphi + \sin\varphi] = 2\,\pi\,b^2 \sin\varphi = 2\,\pi\,b\,h$$

Für $\varphi = 90^0$ oder $h = b$ und mit 2 multipliziert geht schließlich auch diese Formel in die für die Kugeloberfläche über.

[2]) F. R. Helmert: Die Größe der Erde. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1906, I. Halbband, S. 525—537.

daß die Rechnungen an und für sich stimmen und die Summierung von Abrundungsfehlern vermieden werde. Insbesondere mit den sogenannten Hilfsgrößen wird oft 15stellig gerechnet, obwohl z. B. der wirkliche Wert von $\mathfrak{a}$ schon in der 6. Dezimale unsicher ist.

Leider ist dabei nicht mit der nötigen Genauigkeit und Konsequenz vorgegangen worden und so kommt es, daß die Konstanten, die heute als „Besselsche Konstanten" in Gebrauch sind, weder mit den wirklichen Besselschen Konstanten, noch auch untereinander — auch nicht gegenseitig bei ein und demselben Autor — übereinstimmen.

Nach Bessels Originalmitteilung im 19. Bande der Astronomischen Nachrichten 1842, S. 116 ist:

$$(77)\left\{\begin{array}{ll} n = 0{\cdot}0016\,7418\,48 & \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{299{\cdot}1528}{298{\cdot}1528}\left(\text{oder } \mathfrak{a} = \dfrac{1}{299{\cdot}1528}\right) & \\ a = 3\,272\,077{\cdot}14 \text{ Toisen} & \log a = 6{\cdot}5148\,2353\,37 \text{ für Toisen} \\ b = 3\,261\,139{\cdot}33 \text{ Toisen} & \log b = 6{\cdot}5133\,6935\,39 \text{ für Toisen} \\ \log \varepsilon = 0{\cdot}9122\,052 - 2 & \log \sqrt{1-\varepsilon^2} = 0{\cdot}9985\,4582\,02 - 1 \end{array}\right.$$

Jordan[1]) hat nun behauptet, daß diese Zahlen unter sich selbst nicht auf zehn Stellen übereinstimmen, und daß man, je nachdem man von der einen oder anderen ausgeht, Abweichungen erhält.

Dies ist jedoch nicht richtig. Die oben angeführten Besselschen Werte von n, $\log a$, $\log b$ und $\log \sqrt{1-\varepsilon^2}$ stimmen untereinander durchaus in allen 10 Stellen überein, wie insbesondere bei $\log \sqrt{1-\varepsilon^2} = \log b - \log a$ leicht zu sehen ist. Was aber die Werte $\mathfrak{a}$, a, b und $\log \varepsilon$ betrifft, so sind diese — offenbar um bei diesen der Vorstellung näher gerückten Größen nicht allzusehr den Schein einer übermäßigen Genauigkeit zu erwecken — zwar abgekürzt, aber richtig abgekürzt gegeben; denn wenn man diese Werte aus den übrigen, 10stellig mitgeteilten Größen gleichfalls in aller Schärfe auf 10 Stellen bestimmt, so erhält man:

$$(78)\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{a} = \dfrac{1}{299{\cdot}1528\,129} & a = 3\,272\,077{\cdot}140 \text{ Toisen} \\ \log \varepsilon = 0{\cdot}9122\,0521\,18 - 2 & b = 3\,261\,139{\cdot}328 \text{ Toisen} \end{array}\right.$$

welche Werte auf 7, beziehungsweise 9 Stellen abgerundet, genau die von Bessel mitgeteilten Daten ergeben.

Gauß[2]) hat im Jahre 1843 zur schärferen Bestimmung des $\log \varepsilon$ $\log \sqrt{1-\varepsilon^2} = \log \cos \varphi$ gesetzt und hierauf mit Hilfe von Vegas Thesaurus Logarithmorum

---

[1]) W. Jordan: Die Besselschen Erddimensionen. Zeitschrift für Vermessungswesen, XIV, Stuttgart 1885, S. 23. Ebenso auch in dem schon öfter zitierten Handbuche, III, S. 208.

[2]) J. C. F. Gauß: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen 1844, S. 9—10.

(79) $\varphi = 4^0\ 41'\ 9{\cdot}98262''$ $\log \varepsilon = \log \sin \varphi = 0{\cdot}9122052079 - 2$

gefunden, welche Bestimmung, wie eine genauere Rechnung auf anderem Wege zeigt, um 39 Einheiten der 10. Mantisse zu klein ist. Es hat dies zum Teil seinen Grund in der von Gauß erst später[1]) erkannten häufigen Ungenauigkeit der letzten Stelle der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen im Thesaurus, zum Teil aber auch darin, daß bei dem Tafelübergange von der einen Funktion eines Winkels zu einer anderen — besonders bei so kleinen Winkeln — wohl stets eine gewisse Unschärfe platzgreift.

Denselben Weg wie Gauß hat später auch Encke[2]) eingeschlagen und

(80) $\log \varepsilon = 0{\cdot}9122052075 - 2$

also um weitere 4 Einheiten der 10. Mantisse zu klein gefunden. Außerdem hat Encke aus den Besselschen $\log a$ und $\log b$, von denen er ausging, $\mathfrak{a}$ und n auf mehr Stellen bestimmt, als Bessel selbst angegeben hat, was, wie bereits bemerkt, zum Zwecke der Durchführung längerer Berechnungen sogar geboten ist, wenn man das Schlußresultat auf dieselbe Stellenanzahl numerisch genau erhalten will wie die Ausgangswerte — in diesem Falle also auf 10 Stellen, entsprechend den 10stelligen Logarithmen von a und von b. Dabei hat jedoch Encke nicht mit der nötigen Schärfe gerechnet und

(81) $\mathfrak{a} = \dfrac{1}{299{\cdot}152818}$ $n = 0{\cdot}00167418 4767$

gefunden, was bei $\mathfrak{a}$ — vergleiche (78) — um 5 Einheiten der 7. Dezimalstelle des Nenners zu viel und bei n, wie wir sehen werden, um 34 Einheiten der 12. Dezimalstelle zu wenig ist.

Schließlich hat Encke, was vom Standpunkte des Rechners prinzipiell auch nur gebilligt werden kann, die Werte von a und b aus den fundamentalen Besselschen Logarithmen auf eine größere Anzahl von Stellen berechnet, als den mit der 10. Stelle abgebrochenen Logarithmen entspricht, indem er mit deren 10stelligen Dezimalbrüchen so weiter rechnete, wie wenn sie die wahren Werte jener Logarithmen wären, das heißt als weitere Mantissen nur Nullen hinzugefügt dachte. Auf diese Weise hat er

(82) $\mathfrak{a} = 3\,272\,077{\cdot}1399$ Toisen $b = 3\,261\,139{\cdot}3284$ Toisen

gefunden, was bei a stimmt, bei b dagegen um 2 Einheiten der 4. Dezimalstelle zu viel ist, da der betreffende Besselsche Logarithmus 11stellig ausgewertet

(83) $b = 3\,261\,139{\cdot}3282$ Toisen

ergibt. Offenbar hat Encke auch hier den Thesaurus benützt und darüber hinweggesehen, daß es bei der Arbeit mit einer 10stelligen Tafel wohl

[1]) Astronomische Nachrichten, 1851, Nr. 756.

[2]) J. F. Encke: Tafeln für die Gestalt der Erde. Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1852, S. 322—323.

während der Rechnung selbst opportun ist, sich auf eine oder zwei Stellen mehr einzulassen, um wenigstens die 10. Stelle im Resultate möglichst genau zu erhalten, daß jedoch jede solche überzählige Stelle an sich im Resultate völlig illusorisch ist.

Leider haben die Angaben Enckes die Besselschen Originalzahlen größtenteils verdrängt; sie wurden von General Baeyer[1]) adoptiert und bei den meisten deutschen Landesvermessungen verwendet.

Die Diskrepanz zwischen dem Enckeschen log ε und den übrigen Fundamentalwerten, die auf das innigste mit der von Encke gewählten Art der Berechnung zusammenhängt, wurde aber mit der Zeit bemerkt und hat im Jahre 1878 die Königlich Preußische Landesaufnahme veranlaßt, eine Neuberechnung dieses Logarithmus auf einem anderen Wege vorzunehmen; dabei wurde[2])

$$\log \varepsilon^2 = 0{\cdot}8244\,1042\,37 - 3 \tag{84}$$

gefunden, ein mit Rücksicht auf die bei weitergetriebener Entwicklung sich ergebende nächstfolgende Stelle völlig korrekter Wert.

Die Preußische Landesaufnahme hat auch den Besselschen log a auf das metrische Maßsystem reduziert und

$$\log a = 6{\cdot}804\,6434\,637 \text{ für Meter} \tag{85}$$

erhalten, was aber um eine Einheit der 10. Mantisse zu viel ist.

Nach dem französischen Gesetz vom 22. Juni 1799 ist nämlich 1 m = 443·296 Linien der Toise von Peru, also

$$1\,m = \frac{864}{443{\cdot}296} \text{ Toisen} \tag{86}$$

Wenn man nun hiernach den Verwandlungslogarithmus für Toisen in Meter aus dem 10stelligen Thesaurus bestimmt, so erhält man hiefür 0·2898 1993 00, was mit dem Besselschen Logarithmus a den log a der Landesaufnahme ergibt.[3]) Jener Verwandlungslogarithmus ist aber, wie wir alsbald sehen werden, um eine Einheit der 10. Mantisse zu groß, und dadurch findet wahrscheinlich auch die Unrichtigkeit der letzten Stelle im log a der Landesaufnahme ihre Erklärung.

Im Jahre 1880 sind von Helmert[4]) abermals Veränderungen der Besselschen Elemente und Konstanten vorgenommen worden. Helmert hat zunächst Enckes n übernommen und hat dann die Besselschen Logarithmen von

[1]) J. J. Baeyer: Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Berlin 1862, S. 2.

[2]) Rechnungsvorschriften für die Trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme, I. Ordnung. Berlin 1878, S. 4. — O. Börsch: Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten. 2. Auflage, Cassel 1885, S. 50.

[3]) Infolge der Benützung dieses Verwandlungslogarithmus hat übrigens schon früher H. Wagner (die Dimensionen des Erdsphäroides nach Bessels Elementen. Geogr. Jahrb. III, Gotha 1870, S. VIII) für log a und log b in Metern die in (85) und (87) verzeichneten unrichtigen Werte erhalten.

[4]) F. R. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. I. Teil, Leipzig 1880, S. 38—39.

a und b und deren Werte auf das metrische Maßsystem reduziert. Hiebei wurde der Verwandlungslogarithmus 0·2898 1992 994 benützt und abgeleitet:

$$(87) \quad \begin{cases} a = 6\,377\,397{\cdot}1550\,0\ m & \log a = 6{\cdot}8046\,4346\,37 \\ b = 6\,356\,078{\cdot}9632\,5\ m & \log b = 6{\cdot}8031\,8928\,39 \end{cases}$$

Wenn man nun aber die Werte für die Halbachsen in Metern aus den Besselschen Logarithmen — diese mit ihren 10 Stellen in der früher erwähnten Weise als genau betrachtet — auf 5 Dezimalstellen, im ganzen also auf 12 Stellen genau erhalten will, so muß man unbedingt mit einem noch genaueren Verwandlungslogarithmus rechnen, da man ja alsdann auch die Logarithmen von a und b für Metermaß auf mindestens 12 rechnungsmäßig sichere Stellen benötigt.

Aus (86) folgt nun für den Verwandlungslogarithmus von Toisen in Meter auf 16 Stellen genau:

$$(88) \qquad \log (t, m) = 0{\cdot}2898\,1992\,9938\,3342$$

und hieraus und aus (77) weiter:

$$(89) \quad \begin{cases} a = 6\,377\,397{\cdot}1541\,7052\ m & \log a = 6{\cdot}8046\,4346\,3638\,3342 \\ b = 6\,356\,078{\cdot}9619\,9528\ m & \log b = 6{\cdot}8031\,8928\,3838\,3342 \end{cases}$$

Aber abgesehen hievon hat Helmert in Nichtübereinstimmung mit dem von ihm benützten und in seiner Abkürzung immerhin genauen Verwandlungslogarithmus die metrischen Logarithmen von a und b, wie man sieht, um je eine Einheit der 10. Mantisse erhöht, und außerdem stimmen bei ihm die Werte von a und b nicht mit den betreffenden Logarithmen überein; denn wenn man Helmerts 10stellige Logarithmen von a und von b schon auf 12 Stellen auswertet, so ergeben sie:

$$(90) \qquad a = 6\,377\,397{\cdot}1550\,8\ m \qquad b = 6\,356\,078{\cdot}9629\,0\ m$$

Dagegen würden den 12stelligen Helmertschen Werten von a und b die 12stelligen Logarithmen

$$(91) \qquad \log a = 6{\cdot}8046\,4346\,3695 \qquad \log b = 6{\cdot}8031\,8928\,3924$$

entsprechen, die in 10stelliger Abrundung allerdings den von Helmert angegebenen (87) gleichen, da sich die 12stelligen Logarithmen, die in Wirklichkeit die in (87) und die in (90) verzeichneten Werte für a und b ergeben, begreiflicherweise ebenso wie diese Werte selbst erst in der 12., beziehungsweise 11. Stelle voneinander unterscheiden.

Es ist also bei Helmert zwischen a und b einer- und ihren Logarithmen andererseits ein offener Spielraum vorhanden, was — ganz abgesehen davon, daß die Werte von a und b um rund 0·001 m erhöht wurden — für ein scharfes Weiterrechnen nicht förderlich ist.[1])

---

[1]) Nach einer von Jordan (Zeitschrift für Vermessungswesen 1885, S. 27) publizierten Mitteilung (ob von Helmert selbst herrührend, ist nicht gesagt) wäre übrigens Helmert nicht

Solcherart kann es nicht wundernehmen, daß manche der von Helmert abgeleiteten Konstanten weder mit den Besselschen Fundamentallogarithmen von a und b, noch auch nur untereinander im Einklang stehen; z. B. verzeichnet Helmert

$$(92)\qquad \mathfrak{a} = 0{\cdot}0033\,4277\,3114$$

wogegen nach (4) aus seinen Potenzen von n (l. c., S. 39) für

$$(93)\qquad \mathfrak{a} = 0{\cdot}0033\,4277\,3180$$

folgt.[1]) Ferner hat Helmert

$$(94)\qquad \log(1-\varepsilon^2) = 0{\cdot}9970\,9164\,046 - 1$$

was wiederum seinen Logarithmen von a und b widerspricht; denn da $\log(1-\varepsilon^2) = 2(\log b - \log a)$, so müßte Helmert unbedingt

$$(95)\qquad \log(1-\varepsilon^2) = 0{\cdot}9970\,9164\,04 - 1$$

gesetzt haben, was, da er die Logarithmen von a und b gegenüber Bessels Angaben, wie wir gesehen haben, um je eine Einheit der 10. Mantisse erhöht hat, zugleich auch genau dem Besselschen $\log\sqrt{1-\varepsilon^2}$ in (77) entsprochen hätte.

Im Hinblick auf das so einfache Verhältnis, das zwischen den Logarithmen von $(1-\varepsilon^2)$, von a und von b besteht, ist es auch überraschend, daß Jordan, der l. c., S. 209 die für Preußen festgesetzten

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned} \log a &= 6{\cdot}8046\,4346\,37 \text{ für Meter} \\ \log \varepsilon^2 &= 0{\cdot}8244\,1042\,37 - 3 \\ \log(1-\varepsilon^2) &= 0{\cdot}9970\,9164\,04 - 1 \end{aligned}\right.$$

für die „allein richtigen Besselschen Erddimensionen" erklärt,[2]) auf der nächsten Seite plötzlich

$$(97)\qquad \left\{\begin{aligned} \log(1-\varepsilon^2) &= 0{\cdot}9970\,9164\,0399\,6 - 1 \\ 1-\varepsilon^2 &= 0{\cdot}9933\,2562\,7768\,685 \end{aligned}\right.$$

---

von den Besselschen $\log a$ und $\log b$, sondern von einem in den letzten Stellen willkürlich abgerundeten a und Enckes n ausgegangen und hätte hieraus die übrigen Zahlen mittels der von ihm (l. c., S. 37—38) aufgestellten Reihen berechnet. Dagegen spricht jedoch, daß Helmert zunächst Bessels n, $\mathfrak{a}$, a und b und der beiden letzteren Logarithmen zitiert, sich dann aus Opportunitätsgründen für das schon vielfach akzeptierte Enckesche n entscheidet und hierauf ausdrücklich, „zu Metermaß übergehend", in Klammern den vor (87) wiedergegebenen 11stelligen Verwandlungslogarithmus anführt. Auch sähe es einem Helmert nicht ähnlich, einen Grundwert willkürlich abzurunden und noch dazu um 83 Einheiten der letzten Stelle aufwärts anstatt lieber um nur 17 abwärts.

[1]) Diese Differenz überschreitet um ein Vielfaches den Betrag, zu dem sich hier die Abrundungsfehler summieren.

[2]) Bezüglich des $\log a$ trifft diese Behauptung, wie wir bereits gesehen haben, nicht zu.

setzt, wobei obendrein Numerus und Logarithmus einander nicht entsprechen. Denn zu Jordans log $(1-\varepsilon^2)$ in (97) würde 15stellig

(98) $$1-\varepsilon^2 = 0{\cdot}9933\,2562\,7768\,471$$

gehören, während in Wirklichkeit nach dem mit der 10. Mantisse abgeschlossenen, richtigen log $(1-\varepsilon^2)$ in (96)

(99) $$1-\varepsilon^2 = 0{\cdot}9933\,2562\,7769\,3859\ldots.$$

ist.

Jordan hat nämlich, wie in neuerer Zeit leider häufig geschieht, die Grundlage der Rechnung verschoben. Während man früher allgemein von Bessels log a und log b ausging und damit mehrstellig — aber nicht immer schärfer — weiterrechnete, geht Jordan von log a und log ε^2 der Preußischen Landesaufnahme (96) aus und meint (S. 209), um den log $(1-\varepsilon^2)$, wie für manche Zwecke erwünscht, noch auf weitere Stellen auszurechnen, könne nur log ε^2 gebraucht werden. So berechnet er denn log $(1-\varepsilon^2)$ aus log ε^2, dessen 10stelligen Dezimalbruch nicht als Näherungs-, sondern als genauen Wert betrachtend, mittels der logarithmischen Reihe, ohne sich vor Augen zu halten, daß ja log ε^2 seinerseits von der Landesaufnahme aus den Logarithmen von a und von b bestimmt wurde,[1]) so daß also der Rechner systemgemäß diese beiden Logarithmen auch als die eigentliche Grundlage für log $(1-\varepsilon^2)$ betrachten muß. Der log ε^2 der Landesaufnahme, der ja mit der 10. Mantisse nicht abgeschlossen, sondern nur abgebrochen ist, kann unmöglich mehr als allerhöchstens 10 sichere Mantissen für log $(1-\varepsilon^2)$ ergeben. Will man durchaus den letzteren aus dem ersteren auf eine größere Anzahl von Mantissen berechnen, so müßte man vorher den ersteren selbst auf mindestens dieselbe Mantissenanzahl ermitteln. Nun steht aber log $(1-\varepsilon^2)$ in jeder gewünschten Genauigkeit sozusagen von selbst zur Weiterrechnung bereit: man braucht nur an 2 (log b — log a) so viele Nullen anzuhängen, als man will, denn die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke muß unter allen Umständen gewahrt werden, wenn man nicht zu Widersprüchen gelangen will.

Die um je eine Einheit der letzten Mantisse zu großen Logarithmen von a und b für Metermaß, die die Preußische Landesaufnahme und Helmert eingeführt haben, wurden seither fast allenthalben benützt, obwohl bereits vorher F. G. Gauß[2]) die den Besselschen Originallogarithmen entsprechenden Logarithmen von a und b für Metermaß 10stellig richtig aufgestellt hatte.

Die folgende Zusammenstellung soll bezüglich einiger „Besselscher" Elemente und Konstanten die Uneinigkeit veranschaulichen, die darüber bei verschiedenen Autoren herrscht. (Die durchaus identischen Stellen sind dabei, um die Abweichungen auffälliger zu machen, nicht wiederholt, sondern durch Punkte ersetzt.)

[1]) O. Börsch, l. c., S. 50.

[2]) F. G. Gauß: Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst. II. Teil, Berlin 1877, S. 36.

	a	log a
Wagner 1870 . . .	6 377 397·156 Meter	6·8046 4346 37
F. G. Gauß 1877 . .	. . . . .42 12	6
Helmert 1880 . .	. . . . .50 0	7
Börsch 1885 .	. . .6	7
Jordan (1907)[1] .	. . . . .50 0	7
	b	log b
Wagner 1870 . .	6 356 078·963 Meter	6·8031 8928 39
F. G. Gauß 1877 .	. . . . .24 49	8
Helmert 1880 .	. . . . .32 5	9
Börsch 1885 .	3	9
Jordan (1907)	. . . . .32 5	9
	$\mathfrak{a}$	log $\mathfrak{a}$
Helmert 1880	0·0033 4277 3114	0·5241 0690 05 -3
Rehm 1883[2] . .	. . . . .81 5748	. . . . 9243 3748
Börsch 1885 .	. . . . .82 1	 933
Jordan (1907)	. . . . .81 579	 93
	n	log n
F. G. Gauß 1877 .	0·0016 7418 4768 4171 58	0·2238 0338 65 - 3
Helmert 1880	767	. . . . .8 61
Rehm 1883 . .	. . . . .800 8140	
Börsch 1885 .	8	. . . . .9 49
Jordan (1907)	. . . . .800 816	. . . . .9 49
	ε^2	log ε^2
Preuß. Land.-Aufn. 1878		0·8244 1042 37 -3
Helmert 1880 . .	0·0066 7437 2096	. . . . .1 49
Börsch 1885 . . .		. . . . .2 372
Jordan (1907)	. . . . .231 315	. . . . .2 37
	$\sqrt{1-\varepsilon^2}$	$\sqrt{1-\varepsilon^2}$
F. G. Gauß 1877 .	0·9966 5722 6883 0024 35	0·9985 4582 02 -1
Helmert 1880		23
Rehm 1883	. . . . .818 4252	. . . . .200 0015
Börsch 1885 .		2
Jordan (1907) .	9	. . . . .199 8

Sonderbar ist hier in einzelnen Fällen auch das Mißverhältnis zwischen der Stellenanzahl der Logarithmen und der ihnen beigeordneten Zahlen.

Der ganze Übelstand ist wohl nicht zumindest darauf zurückzuführen, daß man bisher einer einheitlich und konsequent durchgeführten mehrstelligen Berechnung der wichtigsten Konstanten des Besselschen Erdsphäroides ermangelte. Bald hier, bald dort trat das Bedürfnis nach dem einen oder

[1]) Diese Auflage des III. Bandes ist von C. Reinhertz bearbeitet worden, die betreffenden Werte rühren aber noch von Jordan selbst her. Das Ursprungsjahr kann ich nicht angeben, da mir die früheren Auflagen nicht zur Verfügung stehen.

[2]) E. Rehm: Tafeln der Krümmungshalbmesser des Besselschen Erdsphäroides. Mitteil. d. K. u. K. Militärgeographischen Instituts III, Wien 1883, S. 140. — Die übrigen Autoren sind schon früher zitiert worden.

anderen schärferen Werte auf, der dann mitunter aus minder scharf bestimmten Werten abgeleitet wurde, ein Vorgang, wie wenn man eine Triangulierung I. Ordnung an eine solche II. Ordnung anknüpfen wollte.

Die Differenzen sind freilich nicht gerade groß und bleiben weit außerhalb des Rahmens der sachlichen Genauigkeit, machen sich aber z. B. bei Meridianbogenlängen immerhin schon in der 3. Dezimalstelle der Meter geltend.

Wenn nun aber schon über die sachliche Genauigkeit hinaus gerechnet wird, so soll die Rechnung wenigstens in sich richtig sein und stimmen. Dies aber ist nur möglich, wenn die Konstanten, die dabei benützt werden, rechnerisch von so gleichmäßiger und so weit getriebener Schärfe sind, daß sie noch auf eine größere Anzahl von Stellen, als gerade benötigt werden, in harmonischem Einklang stehen; ob man nun von dieser oder jener ausgeht, es darf sich, geodätisch gesprochen, kein Anschlußfehler ergeben.

Aus diesem Grunde habe ich die wichtigsten Konstanten des Besselschen Erdsphäroides neu berechnet und lege die Resultate nachstehend den Fachkreisen vor.

Die Berechnungen wurden teils mittels abgekürzter Multiplikation, Division und Wurzelziehung, teils logarithmisch durchgeführt — in vielen Fällen zur Probe auf beide Weisen. Zur Berechnung der Logarithmen und ihrer Zahlen wurden die 21 stelligen Hilfstafeln von Steinhauser[1]) benützt, wobei auf die Erhöhung oder Erniedrigung der 21. Mantisse natürlich schärfstens Rücksicht genommen wurde; solcherart konnte also mit 23 Mantissen gerechnet werden, um die 21. möglichst genau zu erhalten. Im Resultate wurden dann für die Veröffentlichung 20 Stellen beibehalten. Bei der Weiterrechnung wurden jedoch alle Stellen beibehalten, die sich bei verschiedenartiger Berechnung als übereinstimmend ergeben hatten; denn jedes Resultat wurde mindestens auf zweierlei Weise gewonnen.[2]) Die Richtigkeit der neu berechneten Zahlenwerte und ihrer Logarithmen kann deshalb mit Sicherheit verbürgt werden.

Da die Steinhauserschen Tafeln leider durchaus nicht fehlerfrei sind, wurden alle Logarithmen, die ihnen entnommen wurden, vorerst — teils durch Produktenzerlegung, teils durch Differenzenbildung — auf ihre Sicherheit geprüft. Dabei habe ich einige bisher noch nicht bekanntgewordene Fehler gefunden, die samt ihrer Korrektur in den Astronomischen Nachrichten, Bd. 186, S. 303—304 veröffentlicht worden sind. In vielen Fällen wurde aber die Prüfung auch durch die Rechnung selbst vollzogen, wenn nämlich auf verschiedenen Wegen dasselbe Resultat erhalten wurde.

Wo mit 7 oder 8 Stellen reichlich auszukommen war, wurde neben Schrön auch die neue, prächtige Tafel von Bauschinger und Peters[3])

[1]) A. Steinhauser: Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20 stelliger Logarithmen zu gegebenen Zahlen und der Zahlen zu 20 stelligen Logarithmen. Wien 1880.

[2]) Die Hilfsgröße m z. B. wurde sechsmal berechnet: je aus $\mathfrak{a}$, ε^2, $\varepsilon_1{}^2$ und n durch Reihenentwicklung und aus $\mathfrak{a}$ und n auch noch durch abgekürzte Division; alle diese Berechnungen stimmten auf 23 Dezimalstellen vollkommen überein.

[3]) J. Bauschinger und J. Peters: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 8 Dezimalstellen. I. Band: Tafel der 8 stelligen Logarithmen aller Zahlen von 1—200 000.

benützt, in der nur leider nicht ersichtlich gemacht ist, ob die letzten Stellen erhöht sind oder nicht. Der Thesaurus dagegen wurde nur selten zu Rate gezogen; ich habe auch bei nur 9- oder 10stelliger Rechnung die Arbeit mit Steinhauser vorgezogen, da man hier ohne Zeitverlust leicht einige Stellen mehr erhält.

Die vielstelligen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel endlich, die benötigt wurden, um in den Formeln für die Eingradbogen und Eingradfelder alles Konstante auswerten zu können, sind durch weitgetriebene Entwicklung goniometrischer Reihen sowie mit Hilfe der Additionstheoreme unter häufiger gegenseitiger Kontrolle berechnet worden.

Die Grundlage aller Berechnungen bildeten die beiden 10stelligen Besselschen Originallogarithmen (77) von a und b für Toisen, die, um die übrigen Werte daraus in gegenseitig übereinstimmender, rein rechnungsmäßiger Schärfe auf eine größere Anzahl von Stellen ableiten zu können, mit ihren 10 Stellen als genau, also mit lauter Nullen als weitere Mantissen betrachtet wurden.

Daraus ergibt sich nun sofort $\log \sqrt{1-\varepsilon^2} = \log b - \log a$ sowie $\log(1-\varepsilon^2)$ und ähnlich $\log \sqrt{1+\varepsilon_1{}^2} = \log a - \log b$ sowie $\log(1+\varepsilon_1{}^2)$, welche vier Logarithmen dann folgerichtig als 11. und folgende Mantissen auch lauter Nullen besitzen müssen. Steinhauser verhilft dann zu den diesen Logarithmen entsprechenden Zahlen und liefert sie auf 21 Stellen. Zur Probe wurde dann $(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon_1{}^2) = 1$ mittels abgekürzter Multiplikation gerechnet und im ganzen Umfang der 21stelligen Rechnung bestätigt gefunden. ε^2 und $\varepsilon_1{}^2$ sowie deren 20stelligen Logarithmen wurden dann auf die einfachste Weise erhalten,[1]) worauf die nicht minder einfache logarithmische Auswertung des geschlossenen Ausdruckes (10) der letzteren Richtigkeit erhärtete. Die Potenzen von ε^2 und $\varepsilon_1{}^2$ wurden durch abgekürzte Multiplikation berechnet, ε und ε_1 selbst durch Wurzelziehung und auch logarithmisch. Durch Auswertung der Reihen (6) und (10) wurden sodann alle Werte kontrolliert und die Richtigkeit der Rechnung war in allen 21 Stellen gewährleistet.

Weit mühevoller hat sich die Berechnung von $\mathfrak{a}$ gestaltet. Diese Hilfsgröße eignet sich nämlich vorzüglich zur Berechnung anderer, insbesondere auch des wichtigen n, und um diese ihrerseits auf 20 Stellen rechnungsmäßig sicher zu erhalten, war es angezeigt, $\mathfrak{a}$ selbst auf mehr als 20 Stellen zu bestimmen. Steinhauser reichte also da nicht aus. Hier wurde deshalb der Pfad betreten, den die Preußische Landesaufnahme bei der Berechnung des $\log \varepsilon^2$ gewandelt ist, und der eben zu $\mathfrak{a}$ als erster Station geleitet.

Aus (21) folgt:

$$(100) \qquad 1-\mathfrak{a} = \frac{b}{a} \qquad \log(1-\mathfrak{a}) = \log b - \log a$$

Leipzig 1910. — Der II. Band (Logarithmen der Trigonometrischen Funktionen) ist während des Druckes dieser Arbeit erschienen.

[1]) Die umständliche Berechnung des $\log \varepsilon^2$ auf sogar nur 10 Stellen (84) durch die Preußische Landesaufnahme (Börsch, l. c., S. 50) auf dem Umwege über $\mathfrak{a}$ hätte durch den obigen Vorgang vermieden werden können.

Wenn nun die grundlegenden 10stelligen Besselschen Originallogarithmen (77) von a und b für die Weiterrechnung, wie vorhin bemerkt, als geschlossene Werte betrachtet werden, so folgt dasselbe auch für

$$\log(1-\mathfrak{a}) = 0{\cdot}9985\,4582\,02 - 1 = -0{\cdot}0014\,5417\,98 \tag{101}$$

Aus der Definition des Logarithmus und mit Zuhilfenahme der Exponentialreihe folgt nun, wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet:

$$1-\mathfrak{a} = e^{\log \text{nat}(1-\mathfrak{a})} = e^{\frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu}}$$

$$1-\mathfrak{a} = 1 + \frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu}\right]^3 + \ldots\ldots$$

$$\mathfrak{a} = -\left\{\frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{\log(1-\mathfrak{a})}{\mu}\right]^3 + \ldots\ldots\right\} \tag{102}$$

μ ist der Modulus des Briggschen Logarithmensystems:

$$\mu = 0{\cdot}4342\,9448\,1903\,2518\,2765\,1128\,9189\ldots.$$

Es wurden durch abgekürzte Multiplikation und Division acht Glieder auf je 28 Dezimalstellen berechnet und von der algebraischen Summe 25 Stellen beibehalten als Wert von

$$\mathfrak{a} = 0{\cdot}0033\,4277\,3181\,5787\,7108\,2433\,5 \tag{103}$$

womit dann weitergerechnet wurde. Es wurden die Potenzen von $\mathfrak{a}$ berechnet, worauf die übereinstimmende Auswertung sowohl des geschlossenen Ausdruckes als auch der Reihe (17) zugleich ein sicheres n sowie die Richtigkeit der Potenzen von $\mathfrak{a}$ ergab. Umgekehrt wurde nach Berechnung der Potenzen von n deren Richtigkeit durch die Auswertung der Reihe (4) bestätigt. Die Logarithmen von $\mathfrak{a}$ und von n wurden aus Steinhauser erhalten und durch die logarithmische Auswertung des geschlossenen Ausdruckes (17) als richtig erwiesen. (5) ergab sodann mühelos einen 24stelligen Wert für ε^2, der die frühere, 21stellige Berechnung durchaus bestätigte.

m wurde, wie bereits bemerkt, durch die Reihen (13), (16), (14) und (15) aus $\mathfrak{a}$, n, ε^2 und $\varepsilon_1{}^2$ berechnet, in den ersten beiden Fällen auch durch abgekürzte Division aus den geschlossenen Ausdrücken. Die alsdann durch abgekürzte Multiplikation erhaltenen Potenzen von m wurden durch die mühelose Auswertung der Reihen (7) und (11), die mit den früheren Berechnungen vollkommen übereinstimmende Resultate für ε^2 und $\varepsilon_1{}^2$ ergaben, als richtig befunden. Mit Hilfe von Steinhauser wurde sodann $\log m$ sowohl direkt berechnet als auch nach (14) aus $\log \varepsilon^2$ abgeleitet; das eine wie das andere Mal wurde haarscharf derselbe 21stellige Logarithmus erhalten.

Die geschlossenen Ausdrücke in (4), (7), (8), (11) und (12) machten es durch die daraus folgenden Relationen

$$(104) \qquad 1+m = \frac{2m}{\varepsilon^2} \qquad 1-m = \frac{2m}{\varepsilon_1^2} \qquad \frac{1+m}{1-m} = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2}$$

$$(105) \qquad 1+n = \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{n} \qquad 1-n = \frac{2}{\varepsilon_1}\sqrt{n} \qquad \frac{1+n}{1-n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$

sehr bequem, nunmehr auch die in der Geodäsie häufig benötigten Logarithmen von $1+m$, $1-m$, $1+n$ und $1-n$ zu bestimmen und gegenseitig zu kontrollieren.

Schließlich wurden von den in (1) bis (20) enthaltenen Reihen auch die bisher noch nicht vorgenommenen ausgewertet, so daß nunmehr auch alle diese Reihen gegenseitig kontrolliert waren.

Dieses Rechnen in die Kreuz und Quer stellt die Fehlerlosigkeit der Resultate außer Zweifel.

Zuletzt erst wurden die Besselschen Originallogarithmen von a und b vom altfranzösischen Maß auf Metermaß reduziert und hiernach die Werte von a und b in Metern auf 21 Wertstellen ermittelt; zur Probe wurde dann $\mathfrak{a}$ auch noch aus $(a-b):b$ mittels abgekürzter Division berechnet, wobei, da der Dividend nur 18 sichere Wertstellen hatte, die beiden nächsten Stellen als Rechnungsstellen beibehalten und auf diese Weise $\mathfrak{a}$ auf 20 Dezimalstellen übereinstimmend mit den früheren Berechnungen erhalten wurde.

Den nachstehenden Elementen und Konstanten des Besselschen Erdsphäroides kommen mithin zwei Eigenschaften zu, die sie vor den verschiedenen, bisher als „Besselsche Konstanten“ betrachteten Werten voraus haben: erstens entsprechen sie in einer mehr als ausreichenden Genauigkeit Bessels Originallogarithmen von a und von b — von denen auch alle anderen Berechner ausgegangen sind — wenn man die betreffenden 10 stelligen Dezimalbrüche — so wie man es bisher gleichfalls allgemein, wenn auch stillschweigend getan hat — als die exakten und geschlossenen Werte jener Logarithmen betrachtet; zweitens stehen sie durchaus miteinander im Einklang. Die erste dieser Eigenschaften schließt freilich, in mathematischer Strenge aufgefaßt, die zweite schon in sich, wogegen die zweite auch für sich allein vorkommen kann; wie in diesem Abschnitte früher gezeigt worden ist, haben aber die bisher verwendeten Konstanten keine von diesen Eigenschaften besessen.

Die Auswertung mag manchem etwas allzuweit getrieben erscheinen, doch hat man ja bisher schon mit einigen Konstanten 15-, ja 16- und 18 stellig operiert. Ich habe deshalb alle in gleichmäßiger Schärfe auf 20 Stellen bestimmt; davon kann ein jeder so viele Stellen nehmen, als er eben gebraucht.

Die Elemente und Konstanten des Besselschen Erdspäroides

$$(106) \quad \begin{cases} \log a = 6{\cdot}5148\,2353\,37 & \text{für Toisen} \\ \log b = 6{\cdot}5133\,6935\,39 & \text{„} \quad \text{„} \end{cases}$$

$$(107) \qquad \log(t, m) = 0{\cdot}2898\,1992\,9938\,3342\,1530$$

$$(108)\quad \begin{cases} \log a = 6{\cdot}8046\,4346\,3638\,3342\,1530 & \text{für Meter} \\ \log b = 6{\cdot}8031\,8928\,3838\,3342\,1530 & \text{„} \quad \text{„} \end{cases}$$

$$(109)\quad \begin{cases} a = 6\,377\,397{\cdot}1541\,7051\,8498\,0\ m \\ b = 6\,356\,078{\cdot}9619\,9528\,0513\,4\ m \end{cases}$$

$$(110)\quad \begin{cases} \log \dfrac{1}{\alpha} = 2{\cdot}4758\,9309\,0751\,3260\,9414 \\ \dfrac{1}{\alpha} = 299{\cdot}1528\,1285\,3340\,5876\,6094 \end{cases}$$

$$(111)\quad \log \alpha = 0{\cdot}5241\,0690\,9248\,6739\,0586 - 3$$

$$(112)\quad \begin{cases} \alpha = 0{\cdot}0033\,4277\,3181\,5787\,7108 \\ \alpha^2 = 0{\cdot}0000\,1117\,4132\,5434\,8226 \\ \alpha^3 = 0{\cdot}0000\,0003\,7352\,5905\,9376 \\ \alpha^4 = 0{\cdot}0000\,0000\,0124\,8612\,3810 \\ \alpha^5 = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,4173\,8280 \\ \alpha^6 = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0013\,9522 \\ \alpha^7 = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0000\,0466 \\ \alpha^8 = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0000\,0002 \end{cases}$$

$$(113)\quad \begin{cases} \log \sqrt{1-\varepsilon^2} = 0{\cdot}9985\,4582\,0200\,0000\,0000 - 1 \\ \log (1-\varepsilon^2) = 0{\cdot}9970\,9164\,0400\,0000\,0000 - 1 \\ \log \varepsilon = 0{\cdot}9122\,0521\,1827\,1845\,6558 - 2 \\ \log \varepsilon^2 = 0{\cdot}8244\,1042\,3654\,3691\,3116 - 3 \end{cases}$$

$$(114)\quad \begin{cases} \varepsilon = 0{\cdot}0816\,9683\,1215\,2562\,0044 \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}0066\,7437\,2230\,6140\,5991 \\ \varepsilon^4 = 0{\cdot}0000\,4454\,7244\,6727\,9210 \\ \varepsilon^6 = 0{\cdot}0000\,0029\,7324\,8927\,9445 \\ \varepsilon^8 = 0{\cdot}0000\,0000\,1984\,4570\,0794 \\ \varepsilon^{10} = 0{\cdot}0000\,0000\,0013\,2450\,0475 \\ \varepsilon^{12} = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0884\,0209 \\ \varepsilon^{14} = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0005\,9003 \\ \varepsilon^{16} = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0000\,0394 \\ \varepsilon^{18} = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0000\,0003 \end{cases}$$

$$(115)\quad \begin{cases} \log \sqrt{1+\varepsilon_1^2} = 0{\cdot}0014\,5417\,9800\,0000\,0000 \\ \log (1+\varepsilon_1^2) = 0{\cdot}0029\,0835\,9600\,0000\,0000 \\ \log \varepsilon_1 = 0{\cdot}9136\,5939\,1627\,1845\,6558 - 2 \\ \log \varepsilon_1^2 = 0{\cdot}8273\,1878\,3254\,3691\,3116 - 3 \end{cases}$$

$$
(116)\quad \left\{ \begin{array}{rl}
\varepsilon_1 & = 0{\cdot}0819\;7084\;1144\;7061\;7795 \\
\varepsilon_1{}^2 & = 0{\cdot}0067\;1921\;8797\;9706\;5523 \\
\varepsilon_1{}^4 & = 0{\cdot}0000\;4514\;7901\;2550\;0222 \\
\varepsilon_1{}^6 & = 0{\cdot}0000\;0030\;3358\;6268\;0153 \\
\varepsilon_1{}^8 & = 0{\cdot}0000\;0000\;2038\;3329\;8773 \\
\varepsilon_1{}^{10} & = 0{\cdot}0000\;0000\;0013\;6960\;0533 \\
\varepsilon_1{}^{12} & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0920\;2646 \\
\varepsilon_1{}^{14} & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0006\;1835 \\
\varepsilon_1{}^{16} & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0000\;0415 \\
\varepsilon_1{}^{18} & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0000\;0003
\end{array} \right.
$$

$$
(117)\quad \left\{ \begin{array}{rl}
\log m & = 0{\cdot}5248\;3217\;3226\;9437\;2815 - 3 \\
\log(1+m) & = 0{\cdot}0014\;5174\;5236\;5557\;9220 \\
\log(1-m) & = 0{\cdot}9985\;4338\;5636\;5557\;9220 - 1
\end{array} \right.
$$

$$
(118)\quad \left\{ \begin{array}{rl}
m & = 0{\cdot}0033\;4836\;0216\;5306\;8259 \\
m^2 & = 0{\cdot}0000\;1121\;1516\;1396\;4540 \\
m^3 & = 0{\cdot}0000\;0003\;7540\;1946\;0898 \\
m^4 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0125\;6980\;9415 \\
m^5 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;4208\;8250 \\
m^6 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0014\;0927 \\
m^7 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0000\;0472 \\
m^8 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0000\;0002
\end{array} \right.
$$

$$
(119)\quad \left\{ \begin{array}{rl}
\log n & = 0{\cdot}2238\;0339\;4842\;9786\;8056 - 3 \\
\log(1+n) & = 0{\cdot}0007\;2648\;1258\;2859\;6991 \\
\log(1-n) & = 0{\cdot}9992\;7230\;1458\;2859\;6991 - 1
\end{array} \right.
$$

$$
(120)\quad \left\{ \begin{array}{rl}
n & = 0{\cdot}0016\;7418\;4800\;8159\;7276 \\
n^2 & = 0{\cdot}0000\;0280\;2894\;7472\;8322 \\
n^3 & = 0{\cdot}0000\;0000\;4692\;5637\;8419 \\
n^4 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0007\;8562\;1896 \\
n^5 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0131\;5276 \\
n^6 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0000\;2202 \\
n^7 & = 0{\cdot}0000\;0000\;0000\;0000\;0004
\end{array} \right.
$$

Mit den vorstehenden Werten ergeben nunmehr die Formeln (35) bis (39), die sämtlich ausgewertet wurden,[1] für die Länge des Meridianquadranten M_{90} übereinstimmend:

[1] Dabei sind jedoch noch je zwei weitere Glieder entwickelt und berechnet worden, so daß das Resultat in allen Stellen rechnungsmäßig sicher ist.

$$(121)\quad \begin{cases} M_{90} = 10\,000\,855{\cdot}7631\,3473\,0496\ m \\ \log M_{90} = 7{\cdot}0000\,3716\,3730\,5781\,1862 \end{cases}$$

$$(122)\quad \begin{cases} \text{mittlere Länge eines Meridiangrades} = 111\,120{\cdot}6195\,9038\,5894\,41\ m \\ \log\,(\text{mittl. Länge eines Mer.-Gr.}) = 5{\cdot}0457\,9465\,4291\,2532\,4403 \end{cases}$$

Für die Erdoberfläche O erhält man aus jeder der Formeln (56) bis (71) und (75) bis (76):

$$(123)\quad \begin{cases} O = 509\,950\,713\,988\,926{\cdot}679\ m^2 \\ \log O = 14{\cdot}7075\,2820\,4182\,2991\,59 \end{cases}$$

Die Koeffizienten A in (29) der Formel (30) für die Länge des Meridianbogens M_φ vom Äquator bis zur geographischen Breite φ werden nunmehr:

$$(124)\quad \begin{cases} A_0 = 0{\cdot}9983\,2931\,2961\,8398\,10 & [0{\cdot}9992\,7382\,3062\,0912\,44 - 1] \\ A_2 = 0{\cdot}0025\,0707\,9007\,7986\,40 & [0{\cdot}3991\,6802\,0480\,079 - 3] \\ A_4 = 0{\cdot}0000\,0262\,3320\,0617\,01 & [0{\cdot}4188\,5128\,0507 - 6] \\ A_6 = 0{\cdot}0000\,0000\,3415\,9391\,82 & [0{\cdot}5335\,1012\,98 - 9] \\ A_8 = 0{\cdot}0000\,0000\,0004\,8253\,33 & [0{\cdot}6835\,273 - 12] \\ A_{10} = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0071\,09 & [0{\cdot}8518\,1 - 15] \\ A_{12} = 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0000\,11 & [0{\cdot}0310 - 17] \end{cases}$$

wobei in eckigen Klammern die betreffenden Logarithmen beigesetzt sind.

Wertet man nun in der Formel für die Länge des Meridianbogens M_φ alles Konstante aus und setzt statt der konstanten Faktoren in eckigen Klammern deren Logarithmen ein, so nimmt die Formel folgende Gestalt an:

$$(125)\quad \begin{aligned} M_\varphi = {} & [5{\cdot}0457\,9465\,4291\,2532\,4]\,\varphi^0 \\ & - [4{\cdot}2038\,1148\,4118\,413]\sin 2\varphi \\ & + [1{\cdot}2234\,9474\,4145]\sin 4\varphi \\ & - [0{\cdot}3381\,5359\,3 - 2]\sin 6\varphi \\ & + [0{\cdot}4881\,71 - 5]\sin 8\varphi \\ & - [0{\cdot}6565 - 8]\sin 10\varphi \\ & + [0{\cdot}836 - 11]\sin 12\varphi \\ & - \dots \end{aligned}$$

Diese Formel liefert die Meridianbogenlängen in Metern auf 10 Dezimalstellen, wovon man jedoch mit Rücksicht auf die Summierung der Abrundungsfehler 2—3 Stellen abstreichen wird. Die 7. Dezimalstelle kann dann unter allen Umständen als rechnerisch sicher betrachtet werden.

Sachlich ist eine solche Genauigkeit, wie schon wiederholt betont, freilich stark übertrieben. Da jedoch das Besselsche Erdsphäroid wohl noch längere Zeit als ideale Vergleichs- und Projektionsfläche für Rechnungen und Kartenwerke gelten wird, so scheint seine präzise Definierung unbedingt geboten. Und wenn man bei der Berechnung von Meridianbogenlängen

Zwischenwerte interpolieren und die Resultate, wie für Tafelzwecke gewöhnlich verlangt, in Metern auf 3 Dezimalstellen genau erhalten will, so müssen die direkt berechneten Längen rechnungsmäßig zumindest auf 6 Dezimalstellen sicher sein.

Die Formel (34) für die Länge eines Meridianbogens $\varDelta M_\varphi$ von der mittleren geographischen Breite φ und der Längenausdehnung $\varDelta\varphi$ wird nunmehr mit den Logarithmen der konstanten Faktoren:

$$
\begin{aligned}
(126) \qquad \varDelta M_\varphi = & [5{\cdot}0457\,9465\,4291\,2532\,4]\,\varDelta\varphi^0 \\
& - [4{\cdot}5048\,4147\,9782\,394] \cos 2\varphi \sin \varDelta\varphi \\
& + [1{\cdot}5245\,2473\,9809] \cos 4\varphi \sin 2\varDelta\varphi \\
& - [0{\cdot}6391\,8358\,9 - 2] \cos 6\varphi \sin 3\varDelta\varphi \\
& + [0{\cdot}7892\,01 - 5] \cos 8\varphi \sin 4\varDelta\varphi \\
& - [0{\cdot}9575 - 8] \cos 10\varphi \sin 5\varDelta\varphi \\
& + [0{\cdot}137 - 10] \cos 12\varphi \sin 6\varDelta\varphi \\
& - \ldots .
\end{aligned}
$$

Für die Länge eines Meridiangrades von der mittleren geographischen Breite φ geht die Formel (126) über in:

$$
\begin{aligned}
(127) \qquad \varDelta M_{\varphi, 1^\circ} = & [5{\cdot}0457\,9465\,4291\,2532\,4] \\
& - [2{\cdot}7466\,9679\,8205\,250] \cos 2\varphi \\
& + [0{\cdot}0673\,4390\,3705] \cos 4\varphi \\
& - [0{\cdot}3579\,8375\,3 - 3] \cos 6\varphi \\
& + [0{\cdot}6327\,85 - 6] \cos 8\varphi \\
& - [0{\cdot}8978 - 9] \cos 10\varphi \\
& + [0{\cdot}156 - 11] \cos 12\varphi \\
& - \ldots .
\end{aligned}
$$

Die Zahl, die den identischen Logarithmen des ersten Gliedes in (125), (126) und (127) entspricht, ist die in (122) verzeichnete mittlere Länge eines Meridiangrades.

Will man in (125) oder (126) den Winkel φ oder $\varDelta\varphi$ in das erste Glied nicht in Graden, sondern in Minuten oder Sekunden einführen, so ist in diesem Gliede als logarithmischer Koeffizient zu setzen:

$$
(128) \left\{ \begin{array}{l} [3{\cdot}2676\,4340\,3907\,6096\,1] \text{ für Minuten} \\ [1{\cdot}4894\,9215\,3523\,9659\,8] \text{ für Sekunden} \end{array} \right.
$$

oder als entsprechender Zahlenkoeffizient:

$$
(129) \left\{ \begin{array}{r} 1\,852{\cdot}0103\,2650\,6431\,5735 \text{ für Minuten} \\ 30{\cdot}8668\,3877\,5107\,1928\,92 \text{ für Sekunden} \end{array} \right.
$$

nämlich die mittlere Länge in Metern einer Meridianminute, beziehungsweise einer Meridiansekunde.

In der Formel (51) für den Flächeninhalt der Zone vom Äquator bis zur geographischen Breite φ haben die Koeffizienten Z in (53) folgende Werte, wobei in eckigen Klammern wieder die betreffenden Logarithmen beigesetzt sind:

$$(130)\quad \left\{ \begin{array}{lll} Z_1 & = 1 & \\ Z_3 & = 0{\cdot}0011\ 1705\ 7498\ 7930\ 7624 & [0{\cdot}0480\ 7552\ 8322\ 2840\ 10 - 3] \\ Z_5 & = 0{\cdot}0000\ 0168\ 3613\ 8738\ 8361 & [0{\cdot}2262\ 4249\ 5910\ 783 - 6] \\ Z_7 & = 0{\cdot}0000\ 0000\ 2684\ 8319\ 7052 & [0{\cdot}4289\ 1711\ 0684 - 9] \\ Z_9 & = 0{\cdot}0000\ 0000\ 0004\ 3704\ 1176 & [0{\cdot}6405\ 2235\ 65 - 12] \\ Z_{11} & = 0{\cdot}0000\ 0000\ 0000\ 0071\ 8424 & [0{\cdot}8563\ 8102 - 15] \\ Z_{13} & = 0{\cdot}0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 1187 & [0{\cdot}0745\ 98 - 17] \end{array} \right.$$

Das nächste Glied, mit $\sin 15\varphi$, würde einen Koeffizienten Z_{15} mit zwei Einheiten der 20. Dezimalstelle enthalten, im Resultate aber erst in der 6. Dezimalstelle der Quadratmeter erscheinen.

Wertet man nun auch hier in der Formel (51) für den Flächeninhalt der Zone vom Äquator bis zur geographischen Breite φ alles Konstante aus und setzt statt der konstanten Faktoren in eckigen Klammern deren Logarithmen ein, so wird:

$$(131)\quad \begin{aligned} Z_\varphi = & [14{\cdot}4060\ 1261\ 5834\ 7834\ 8017] \sin \varphi \\ & - [11{\cdot}4540\ 8814\ 4157\ 0674\ 9] \sin 3\varphi \\ & + [8{\cdot}6322\ 5511\ 1745\ 57] \sin 5\varphi \\ & - [5{\cdot}8349\ 2972\ 652] \sin 7\varphi \\ & + [3{\cdot}0465\ 3497\ 2] \sin 9\varphi \\ & - [0{\cdot}2623\ 936] \sin 11\varphi \\ & + [0{\cdot}4806 - 3] \sin 13\varphi \\ & - \ldots . \end{aligned}$$

Diese Formel ergibt die Zonenflächen in Quadratmetern auf 5 Dezimalstellen, wovon wiederum mit Rücksicht auf die Summierung der Abrundungsfehler 2—3 Stellen abzustreichen sein werden.

Setzt man in Formel (131) $\varphi = 90^0$ und multipliziert alles mit 2, so erhält man für die Erdoberfläche in allen Stellen übereinstimmend den in (123) aus den dort bezeichneten Formeln gewonnenen Wert.

Will man den Flächeninhalt $\varDelta Z_\varphi$ einer Zone von der mittleren geographischen Breite φ und der Amplitude $\varDelta\varphi$ in geographischer Breite berechnen, so hat man zunächst in (55) $\lambda^0 = 360$ zu setzen und erhält dann, wenn man alles Konstante ausrechnet und statt der Zahlenwerte deren Logarithmen einsetzt:

(Gedr. 6. VI. 1911)

$$\begin{aligned}(132)\qquad \Delta Z_{\varphi} = & [14{\cdot}7070\,4261\,1498\,7646\,7539] \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2} \Delta\varphi \\ & - [11{\cdot}7551\,1813\,9821\,0486\,8] \cos 3\varphi \sin \tfrac{3}{2} \Delta\varphi \\ & + [8{\cdot}9332\,8510\,7409\,55] \cos 5\varphi \sin \tfrac{5}{2} \Delta\varphi \\ & - [6{\cdot}1359\,5972\,2183] \cos 7\varphi \sin \tfrac{7}{2} \Delta\varphi \\ & + [3{\cdot}3475\,6496\,8] \cos 9\varphi \sin \tfrac{9}{2} \Delta\varphi \\ & - [0{\cdot}5634\,236] \cos 11\varphi \sin \tfrac{11}{2} \Delta\varphi \\ & + [0{\cdot}7816 - 3] \cos 13\varphi \sin \tfrac{13}{2} \Delta\varphi \\ & - \ldots\end{aligned}$$

Handelt es sich jedoch nicht um den Flächeninhalt der ganzen, rings um die Erde reichenden Zone, sondern wie bei (55) nur um den eines Abschnittes der betreffenden Zone zwischen zwei Meridianen, die um λ^0 voneinander abstehen, so hat man dafür:

$$\begin{aligned}(133)\qquad \Delta Z_{\varphi,\lambda} = & \lambda^0 [12{\cdot}1507\,4011\,0731\,4774\,1037] \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda^0 [9{\cdot}1988\,1563\,9053\,7614\,2] \cos 3\varphi \sin \tfrac{3}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda^0 [6{\cdot}3769\,8260\,6642\,26] \cos 5\varphi \sin \tfrac{5}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda^0 [3{\cdot}5796\,5722\,142] \cos 7\varphi \sin \tfrac{7}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda^0 [0{\cdot}7912\,6246\,7] \cos 9\varphi \sin \tfrac{9}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda^0 [0{\cdot}0071\,211 - 2] \cos 11\varphi \sin \tfrac{11}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda^0 [0{\cdot}2253 - 5] \cos 13\varphi \sin \tfrac{13}{2} \Delta\varphi \\ & - \ldots\end{aligned}$$

Ist die Länge λ des Zonenabschnittes nicht in Graden, sondern in Minuten gegeben, so ist:

$$\begin{aligned}(134)\qquad \Delta Z_{\varphi,\lambda} = & \lambda' [10{\cdot}3725\,8886\,0347\,8337\,7786] \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda' [7{\cdot}4206\,6438\,8670\,1177\,9] \cos 3\varphi \sin \tfrac{3}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda' [4{\cdot}5988\,3135\,6258\,62] \cos 5\varphi \sin \tfrac{5}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda' [1{\cdot}8015\,0597\,103] \cos 7\varphi \sin \tfrac{7}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda' [0{\cdot}0131\,1121\,68 - 1] \cos 9\varphi \sin \tfrac{9}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda' [0{\cdot}2289\,699 - 4] \cos 11\varphi \sin \tfrac{11}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda' [0{\cdot}4472 - 7] \cos 13\varphi \sin \tfrac{13}{2} \Delta\varphi \\ & - \ldots\end{aligned}$$

Und für λ in Sekunden wird:

$$\begin{aligned}(135)\qquad \Delta Z_{\varphi}, \lambda = & \lambda'' [8{\cdot}5944\,3760\,9964\,1901\,4535] \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda'' [5{\cdot}6425\,1313\,8286\,4741\,5] \cos 3\varphi \sin \tfrac{3}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda'' [2{\cdot}8206\,8010\,5874\,97] \cos 5\varphi \sin \tfrac{5}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda'' [0{\cdot}0233\,5472\,0648] \cos 7\varphi \sin \tfrac{7}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda'' [0{\cdot}2349\,5996\,6 - 3] \cos 9\varphi \sin \tfrac{9}{2} \Delta\varphi \\ & - \lambda'' [0{\cdot}4508\,186 - 6] \cos 11\varphi \sin \tfrac{11}{2} \Delta\varphi \\ & + \lambda'' [0{\cdot}6690 - 9] \cos 13\varphi \sin \tfrac{13}{2} \Delta\varphi \\ & - \ldots\end{aligned}$$

Es brauchte wohl kaum mehr wiederholt zu werden, daß die Zahlen in den eckigen Klammern die Logarithmen der konstanten Faktoren sind.

Für ein Eingradfeld („Gradabteilung") ist $\lambda^0 = 1$, $\Delta\varphi = 1^0$, und die Formel (133) geht sonach über in:

$$
\begin{aligned}
(136)\qquad \Delta Z_{\varphi,\,1^0} = & [10{\cdot}0915\,8197\,0408\,3101\,9884\,4] \cos\varphi \\
& - [7{\cdot}6167\,3465\,4442\,6236\,5] \cos 3\varphi \\
& + [5{\cdot}0166\,6216\,8258\,110] \cos 5\varphi \\
& - [2{\cdot}3653\,3250\,0187] \cos 7\varphi \\
& + [0{\cdot}6859\,0576\,6 - 1] \cos 9\varphi \\
& - [0{\cdot}9886\,94 - 4] \cos 11\varphi \\
& + [0{\cdot}2792 - 6] \cos 13\varphi \\
& - \ldots
\end{aligned}
$$

Nachstehend sind einige Meridianbogenlängen verzeichnet, wie sie sich aus der Formel (125) ergeben. Zum Vergleiche sind die Resultate anderer Berechner mit Hinweglassung der ganzen Stellen daneben gesetzt.

Meridianbogen vom Äquator bis zur geographischen Breite φ in Metern

φ		Hartl	Börsch	Jordan	Encke
15^0	1 658 829·4413 98	·442			
18^0	1 990 789·1571 29	·155			
21^0	2 322 851·1446 92	·145			
30^0	3 319 786·5091 11	·510		·510	·511
36^0	3 985 146·0527 90	·054	·054	·054	
45^0	4 984 439·2648 23	·266	·267	·2661 55	·270
54^0	5 985 297·5382 34	·539	·541	·540	
60^0	6 653 376·1197 46	·121	·122	·122	·121
75^0	8 326 037·6396 38	·641			
90^0	10 000 855·7631 35	·765		·7658	

Die Unterschiede machen sich gerade in der dritten Dezimalstelle noch bemerkbar und betragen in dieser, mit der Bogenlänge wachsend, bis über 2 Einheiten beim Meridianquadranten, um welche Beträge die nach den alten Formeln berechneten Bögen zu lang sind.

Der Meridianbogen vom Äquator bis 18^0 geographischer Breite nach Hartl scheint dem zu widersprechen, ist aber von Hartl falsch berechnet worden; die von ihm benützte Formel ergibt richtig ausgewertet die Dezimalstellen 1576 oder 3stellig abgerundet 158, wonach jener Widerspruch entfällt.

Zum Schlusse seien noch — nebst den betreffenden Logarithmen — einige mitunter zu Näherungsberechnungen gebrauchte Mittelwerte verzeichnet, und zwar das arithmetische Mittel R_m der drei Halbachsen des Erdsphäroides, der Halbmesser R_o der mit dem Erdsphäroid oberflächengleichen und der Halbmesser R_v der damit inhaltsgleichen Kugel; ferner das arithmetische und das geometrische sowie das Gaußsche arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Halbachsen a und b:

$$(137) \quad R_m = \frac{a+a+b}{3} = 6\,370\,291{\cdot}0901\,1211\ m \qquad [6{\cdot}8041\,5927\,7851\,9955]$$

$$(138) \quad R_o = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = 6\,370\,289{\cdot}5092\,9936\ m \qquad [6{\cdot}8041\,5917\,0080\,1015]$$

$$(139) \quad R_v = \sqrt[3]{a^2 b} = 6\,370\,283{\cdot}1573\,8801\ m \qquad [6{\cdot}8041\,5873\,7038\,3342]$$

$$(140) \quad \frac{a+b}{2} = 6\,366\,738{\cdot}0580\,8290\ m \qquad [6{\cdot}8039\,1698\,2380\,0482]$$

$$(141) \quad \sqrt{a\,b} = 6\,366\,729{\cdot}1354\,2832\ m \qquad [6{\cdot}8039\,1637\,3738\,3342]$$

$$(142) \quad M(a, b) = 6\,366\,733{\cdot}5967\,5483\ m \qquad [6{\cdot}8039\,1667\,8059\,2445]$$

von welchen Mittelwerten sich die ersten und die letzten drei je nur wenig voneinander unterscheiden.

Das Volumen V des Besselschen Erdsphäroides endlich beträgt:

$$(143) \quad \begin{cases} V = \frac{4}{3}\pi a^2 b = 1\,082\,841\,322\,035{\cdot}9581\ km^3 \\ \log V = 12{\cdot}0345\,6482\,0417\,4364\,5340 \end{cases}$$

Als Anhang teile ich noch die 20stelligen Resultate der Berechnung einiger trigonometrischen Winkelfunktionen und ihrer Logarithmen mit, die vielleicht manchem erwünscht sein werden, und bemerke hiezu, daß die Berechnung bei den kleinen Winkeln, wie bereits erwähnt, durch Entwicklung goniometrischer Reihen, bei den großen aber direkt aus geschlossenen Werten und in beiden Fällen auch häufig mit Zuhilfenahme der Additionstheoreme und unter Kontrolle dadurch erfolgte.

$\sin \frac{1}{2}^0 = 0{\cdot}0087\,2653\,5498\,3739\,3496$ $[7{\cdot}9408\,4185\,9676\,8327\,8848]$
$\cos \frac{1}{2}^0 = 0{\cdot}9999\,6192\,3064\,1712\,8874$ $[9{\cdot}9999\,8346\,3082\,0422\,2649]$

$\sin 1^0 = 0{\cdot}0174\,5240\,6437\,2835\,1282$ $[8{\cdot}2418\,5531\,8422\,8562\,1018]$
$\cos 1^0 = 0{\cdot}9998\,4769\,5156\,3912\,3916$ $[9{\cdot}9999\,3384\,9809\,2284\,6506]$

$\sin 1\frac{1}{2}^0 = 0{\cdot}0261\,7694\,8307\,8731\,5261$ $[8{\cdot}4179\,1901\,5388\,8622\,3464]$
$\cos 1\frac{1}{2}^0 = 0{\cdot}9996\,5732\,4975\,5572\,8004$ $[9{\cdot}9998\,5115\,2623\,2024\,2585]$

$\sin 2^0 = 0{\cdot}0348\,9949\,6702\,5009\,7165$ $[8{\cdot}5428\,1916\,3896\,0658\,7046]$

$\sin 2\frac{1}{2}^0 = 0{\cdot}0436\,1938\,7365\,3359\,9978$ $[8{\cdot}6396\,7956\,1615\,8491\,9594]$

$\sin 3^0 = 0{\cdot}0523\,3595\,6242\,9438\,3272$ $[8{\cdot}7188\,0016\,3676\,0458\,5570]$

$\sin 3\frac{1}{2}^0$	$= 0{\cdot}0610\,4853\,9534\,8568\,7204$	$[8{\cdot}7856\,7527\,8771\,6554\,0216]$
$\sin 4\frac{1}{2}^0$	$= 0{\cdot}0784\,5909\,5727\,8449\,4503$	$[8{\cdot}8946\,4329\,8406\,4383\,4592]$
$\cos 6^0$	$= 0{\cdot}9945\,2189\,5368\,2733\,3692$	$[9{\cdot}9976\,1434\,8981\,7658\,0867]$
$\sin 9^0$	$= 0{\cdot}1564\,3446\,5040\,2308\,6901$	$[9{\cdot}1943\,3244\,1356\,9888\,6526]$
$\sin 18^0$	$= 0{\cdot}3090\,1699\,4374\,9474\,2410$	$[9{\cdot}4899\,8236\,4086\,0400\,7102]$
$\cos 18^0$	$= 0{\cdot}9510\,5651\,6295\,1535\,7212$	$[9{\cdot}9782\,0632\,5545\,0128\,7287]$
$\sin 36^0$	$= 0{\cdot}5877\,8525\,2292\,4731\,2917$	$[9{\cdot}7692\,1868\,5295\,0341\,3910]$
$\cos 36^0$	$= 0{\cdot}8090\,1699\,4374\,9474\,2410$	$[9{\cdot}9079\,5764\,4585\,9975\,3856]$
$\sin 42^0$	$= 0{\cdot}6691\,3060\,6358\,8582\,1383$	$[9{\cdot}8255\,1089\,5174\,2499\,1723]$
$\cos 42^0$	$= 0{\cdot}7431\,4482\,5477\,3942\,3502$	$[9{\cdot}8710\,7345\,8143\,5346\,9622]$

Sämtliche Werte sind auf 20 Stellen sicher, da die Rechnung stets noch einige Stellen mehr umfaßte.

Czernowitz, 20. Oktober 1910.

Nachtrag

Die Formel (30) mit dem Koëffizienten A auf Seite 6 zur Berechnung der Meridianbogenlängen vom Äquator bis zur geographischen Breite φ läßt sich auf eine noch weit einfachere und für die Auswertung bequemere Gestalt bringen, wenn man darin die große Halbachse a durch das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ der beiden Halbachsen ersetzt.

Es ist nämlich

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

Aus (22) folgt

$$\frac{b}{a} = \frac{1-n}{1+n} = 1 - 2n + 2n^2 - 2n^3 + 2n^4 - \ldots\ldots$$

$$1 + \frac{b}{a} = 2\,(1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \ldots\ldots) = 2y$$

indem wir die Reihe in der Klammer der Kürze halber $= y$ setzen.

Es ist also

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}\,2y = ay$$

$$a = \frac{a+b}{2}\,\frac{1}{y}$$

Hiernach können wir also in Formel (30) a durch $\frac{a+b}{2}$ ersetzen, wenn wir die dazu gehörenden Koëffizienten A in (29) je durch

$$y = 1 - n + n^2 - n^3 + n^4 - \ldots\ldots$$

dividieren.

Führen wir dies durch, so erhalten wir für die Länge des Meridianbogens vom Äquator bis zur geographischen Breite φ die Formel

$$(144)\quad M_\varphi = \frac{a+b}{2}\,[B_0\,\varphi - B_2 \sin 2\,\varphi + B_4 \sin 4\,\varphi - B_6 \sin 6\,\varphi + B_8 \sin 8\,\varphi - \\ - B_{10} \sin 10\,\varphi + B_{12} \sin 12\,\varphi - \ldots\ldots]$$

und dazu die Koëffizienten

$$(145)\left\{\begin{aligned}
B_0 &= 1 + \frac{1}{4}\,n^2 + \frac{1}{64}\left(n^4 + \frac{1}{4}\,n^6\right) + \ldots\ldots \\
B_2 &= \frac{3}{2}\left[n - \frac{1}{8}\left(n^3 + \frac{1}{8}\,n^5\right) - \ldots\ldots\right] \\
B_4 &= \frac{15}{16}\left[n^2 - \frac{1}{4}\left(n^4 + \frac{4}{32}\,n^6\right) - \ldots\ldots\right] \\
B_6 &= \frac{35}{48}\left[n^3 - \frac{5}{16}\,n^5 - \ldots\ldots\right] \\
B_8 &= \frac{315}{512}\left[n^4 - \frac{7}{20}\,n^6 - \ldots\ldots\right] \\
B_{10} &= \frac{693}{1\,280}\,[n^5 - \ldots\ldots] \\
B_{12} &= \frac{1\,001}{2\,048}\,[n^6 - \ldots\ldots]
\end{aligned}\right.$$

Die Reihen dieser Koëffizienten sind — von der weiter getriebenen Entwicklung abgesehen — dieselben wie in der auf Seite 5 erwähnten Formel Helmerts mit a, welche Formel aber vor jeder Koëffizientenreihe den konstanten Faktor $\frac{1}{1+n}$ enthält. Dies ist auch ganz natürlich, denn es ist nach (22)

$$b = a\,\frac{1-n}{1+n}$$

also

$$a + b = a + a\,\frac{1-n}{1+n} = a\left(1 + \frac{1-n}{1+n}\right) = a\,\frac{2}{1+n}$$

$$\frac{a+b}{2} = a\,\frac{1}{1+n}$$

Die Berechnung von $\frac{a+b}{2}$ ist aber weit einfacher als die von $a\,\frac{1}{1+n}$.

Für den Meridianquadranten wird

$$(146)\qquad M_{90} = \pi\,\frac{a+b}{4}\left[1 + \frac{1}{4}\,n^2 + \frac{1}{64}\left(n^4 + \frac{1}{4}\,n^6\right) + \ldots\ldots\right]$$

Es brauchte wohl kaum bemerkt zu werden, daß auch der Wert der Formel (34) unverändert bleibt, wenn man darin a durch $\frac{a+b}{2}$ und die Koëffizienten A durch die Koëffizienten B in (145) ersetzt.

Wertet man in den nunmehr erhaltenen Formeln alles Konstante aus, so erhält man genau die in (125) bis (127) verzeichneten Formeln.

Für die Berechnung von Meridianbogenlängen oder des Meridianquadranten ist die Formel (144) oder (146) mit (145) jedenfalls die bequemste; selbst wenn man von den höheren Gliedern als B_8 und den höheren Potenzen von n als der vierten absieht, erhält man die einzelnen Glieder in Metern rechnungsmäßig auf sieben und die Meridianbogenlängen auf fünf bis sechs Dezimalstellen genau.

Will man für verschiedene Erdsphäroide rasch den Meridianquadranten berechnen, so kann man dies einfach nach der Näherungsformel

$$M_{90} = \pi \frac{a+b}{4} \tag{147}$$

tun, die für siebenstellige logarithmische Rechnung gerade noch genügt und bei achtstelliger Rechnung den Quadranten nur um 7 Meter zu klein ergibt — ein Fehler, der noch durchaus innerhalb der Grenzen der sachlichen Genauigkeit gelegen ist, da wir in Wirklichkeit den Meridianquadranten keineswegs auf 7 Meter genau kennen. Zieht man aber noch das Glied mit n^2 in Rechnung, so erhält man den Quadranten in Metern bereits auf fünf Dezimalstellen rechnungsmäßig genau.

Berichtigung.

S. 12, Formel (53), hinter Z_{13} soll es statt $+$ richtig heißen: $=$.