ANLEITUNG

ZUR

FLÄCHENZEICHNUNG

EINFACHER

KRYSTALLGESTALTEN

VON

DR. SIGMUND AICHHORN,

PROFESSOR DER MINERALOGIE, GEOGNOSIE UND PALÄONTOLOGIE
AM STEIERM. STÄND. JOANNEUM &c.

MIT DREI TAFELN.

WIEN.

VERLAG UND DRUCK VON CARL GEROLD ET SOHN

1855.

Vorrede.

Die nachsichtige Beurtheilung, welche meine im Jahre 1839 in Druck gelegte, jedoch nie im Buchhandel gekommene Inaugural-Dissertation zur Erlangung der medizinischen Doctorswürde von vielen Seiten gefunden, hauptsächlich aber die gnädige Zusicherung des hohen Ministeriums für Cultus und Unterricht, diese Schrift nach ihrem öffentlichen Erscheinen als Hilfsbuch für Lehrer und Schüler an Mittelschulen anempfehlen zu wollen, haben mich bewogen, den Gegenstand einer sorgfältigen Revision und Umarbeitung zu unterziehen. Ich glaube annehmen zu dürfen, dass jeder, der Gelegenheit hat, die frühere mit der gegenwärtigen Arbeit zu vergleichen, zur Ueberzeugung gelangen wird, es seien der Inhalt wesentlich vermehrt, die Form verbessert, die Grenzen aber beibehalten worden. Letzteres könnte mir von Einigen zum Vorwurf *gemacht werden; diese wollen aber bedenken, dass eine Schrift nicht mehr und nicht weniger enthalten soll, als was man dem Titelblatte zu Folge darin zu suchen berechtigt ist. Ich will nicht läugnen, dass eine systematische Anleitung zur Auffindung der Flächen von Combinationen für Manche recht erwünscht gewesen wäre, und bin gerne bereit eine solche zu schreiben, wenn der Wunsch von Vielen ausgesprochen werden sollte. Auch über Netzconstruction hätte ich leicht Anhangsweise schreiben können, und zwar ohne gerade den Vorwurf einer Ueberschreitung meiner Grenzen auf mich zu laden. Letzteres wollte ich aber absichtlich nicht thun, denn es liegt nicht in meinem Plan, dass diejenigen, welche dieses Werkchen benützen werden, dadurch angeeifert werden sollen, sich eine grosse Menge von Modellen ohne eigenes Nachdenken zu machen. Auch kann jeder Lehrer in weniger als einer Stunde seinen Schülern leicht begreiflich machen, wie aus richtig gefundenen Flächen das Netz einer gewissen Gestalt zusammenzusetzen ist. Meine Tendenz war eine andere und ich bin verpflichtet mich hierüber auszusprechen.*

Jeder, der Einsicht in das Wesen der Krystallographie hat, und von der Wichtigkeit derselben für das Studium der Mineralogie überzeugt ist, jeder, der die Schwierigkeiten kennt, womit der Lehrer dieses Faches bei dem Unterrichte zu kämpfen hat, muss zugeben, *dass eine rein empirische Behandlung der Krystallgestalten zu einer gründlichen Einsicht des Zusammenhanges unter denselben nicht führt. Zu einer solchen muss es aber kommen, wenn der Zweck der Krystallographie für die Mineralogie erreicht werden soll. Formeln verhelfen in der Regel nicht dazu, aber klar und befriedigend wirkt bei dem grössten Theil der Lernenden die geometrische Construction, und als eine Vorbereitung zur synthetischen Methode der Combinations-Entwicklung wünsche ich, dass das Ganze beurtheilt werde. Ich gebe gerne zu, dass an wenigen Lehranstalten die Zeit vorhanden sein wird, sich viel in öffentlichen Unterrichtsstunden mit dieser Sache zu befassen, allein dieser Umstand hebt die Möglichkeit nicht auf, davon einen geeigneten Gebrauch zu machen. Man wird sich ferner bald überzeugen, dass die Lehrsätze über Congruenz und Aehnlichkeit der Dreiecke, über Parallelogramme und gewisse Polygone u. s. w. hier eine recht sichtliche praktische Anwendung finden, und indem der Schüler zu Hause eine oder die andere krystallographische Construction durchführt, bereitet er sich nicht nur für ein höheres Studium der Mineralogie vor, sondern er wird auch veranlasst, gewisse bereits früher erlernte mathematische Lehrsätze praktisch anzuwenden. Selbst als Uebung im Zirkelzeichnen und als Vorbereitung für einen Theil der descriptiven Geometrie wird eine derartige Arbeit nicht ganz ohne Nutzen sein.*

Diese Andeutungen glaubte ich beifügen zu müssen, um die Tendenz der vorliegenden Schrift hinreichend zu beleuchten. Da von Seite der Verlags-Buchhandlung der Preis möglichst billig gestellt wurde, so dürften die Anschaffungskosten der Verbreitung derselben nicht hemmend im Wege sein.

Graz, im April 1855.

Der Verfasser.

Inhalt.

Drittes Hauptstück.

Zeichnung der Flächen der Gestalten des pyramidalen Systemes.

Viertes Hauptstück.

Zeichnung der Flächen von Gestalten aus jenen Systemen, deren Grundgestalt eine ungleichkantige vierseitige Pyramide ist.

Anhang.

Einleitung.

I.

Unter allen naturhistorischen Eigenschaften der Mineralien müssen die regelmässigen oder symmetrischen Formen, in denen sie erscheinen, unsere vollste Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen; weil sie für das Feststellen und Erkennen der naturhistorischen Species von grösster Wichtigkeit sind. Denn die Erfahrung lehrt, dass diese Formen mit gewissen anderen Eigenschaften im innigsten Zusammenhange stehen, und nach unabänderlichen Gesetzen gebildet sind; ihre Untersuchung und Bestimmung erlaubt daher die Anwendung der Mathematik, und sie gewähren somit eine weit grössere Sicherheit für die Systematik und Charakteristik der anorganischen Naturproducte als die meisten der übrigen naturhistorischen Eigenschaften, bei welchen eine so scharfe Bestimmung nicht möglich ist, und Manches von der Individualität des Untersuchenden abhängig bleibt.

II.

Bei dem Studium von Wissenschaften, denen Mathematik zu Grunde liegt, wird überhaupt das Denken durch gewisse Zeichen oder durch anschauliche Vorstellungen jener Gegenstände, womit sie sich beschäftigen, wesentlich erleichtert. Daher sind auch zum Studium der Krystallographie dergleichen Behelfe nicht nur wünschenswerth, sondern selbst nothwendig. Wirkliche Krytalle, wie die Natur sie darbietet, würden für diesen Zweck kaum genügen; abgesehen davon, dass ihre Anschaffung für den Lernenden mit bedeutenden Auslagen verbunden wäre, stellen sich noch mancherlei andere Schwierigkeiten im Wege. Denn es kommen an den wirklichen Krystallen verschiedene Abweichungen von dem Zustande der Vollkommenheit vor, indem einzelne Flächen sich vergrössern oder verkleinern, andere gekrümmt und uneben erscheinen, und selbst die Neigungen der Flächen gegen einander kleinen Differenzen unterworfen sind. Eingewachsene Krystalle, welche noch die vollkommensten wären, sind sehr selten, finden sich nur bei wenigen Mineral-Species, und erleiden durch die sie umgebenden Massen manche Störung in ihrer regelmässigen Bildung; die aufgewachsenen aber sind unvollständig, müssen daher bei der Betrachtung ergänzt werden, und setzen somit schon krystallographische Kenntnisse voraus. Ferner ist zu bedenken, dass die wirklichen Krystalle nur die äusseren Umrisse einer Gestalt vorstellen; zur deutlichen Einsicht in das Wesen dieser sind aber Puncte und Linien nothwendig, die man an den Krystallen vergebens suchen würde. Endlich sind viele sehr klein, so dass selbst das geübtere Auge leicht manche Fläche übersieht, und die meisten sind Combinationen, in welchen oft regelmässige Gestalten enthalten sind, die man als einfache bis jetzt in der Natur nie getroffen hat. Eine künstliche Darstellung der Krystallgestalten ist daher ein wahres Bedürfniss für Lernende. Die Uebung darin aber ist sehr zu empfehlen, indem man dadurch am Leichtesten zu einer gründlichen Einsicht über die gegenseitigen Verhältnisse der einzelnen Gestalten gelangt.

III.

Krystallgestalten lassen sich auf verschiedene Weise künstlich darstellen. Man zeichnet sie entweder nach den Gesetzen der Perspective, oder man stellt sie materiell, d. i. als Krystall-Modelle dar; mit letzterer Art beschäftiget sich die K r y s t a l l o p l a s t i k. Beide Methoden der Darstellung setzen wenigstens einige Kenntnisse unmittelbar der Krystallographie, und mittelbar der Mathematik voraus. Denn die Krystalloplastik bedarf der Verzeichnung gewisser Schnitte oder Flächen *); da es aber nicht gleichgültig ist, unter welchen Winkeln die einzelnen Schnitte geführt werden, oder welche Figur die Flächen bekommen, so setzt sie Kenntnisse der Beschaffenheit der Krystallgestalten, ihrer wechselseitigen Verhältnisse und Abmessungen, so wie Fertigkeit im Berechnen der Kanten und Winkel, folglich auch in der Anwendung mathematischer Lehrsätze, also Krystallographie und Mathematik, voraus.

IV.

Die Krystalloplastik hat ihre Aufgabe nach Verschiedenheit des Materiales verschieden zu lösen. Man denke sich ein Hexaeder aus irgend einer Masse, die den von seiner Begrenzung eingeschlossenen Raum mit irgend einer Materie stätig erfüllt, und ein zweites aus irgend einer Masse, die jedoch nur den Raum begrenzt, keineswegs aber ihn ausfüllt, und deren Dicke als unendlich klein vorausgesetzt wird, kurz ein hohles. An beiden verzeichne man sich Schnitte, die durch je drei um ein rhomboedrisches Eck gelegene Diagonalen hindurchgehen (man wird deren acht verzeichnen können). Schneidet man nun wirklich

*) Das eigentliche Schneiden oder das Zusammenfügen einzelner Flächen zu einem ganzen Körper ist nicht Gegenstand einer wissenschaftlichen Betrachtung, sondern Sache des Bildhauers, Buchbinders oder eines andern Künstlers.

der Vorzeichnung gemäss, so wird man aus dem ersten Hexaeder ein Oktaeder, aus dem letzten hohlen aber keinen materiell begrenzten Raum erhalten. Daraus erhellt zur Genüge, dass die Methode eine verschiedene sein müsse, je nachdem das Material den Raum stätig erfüllt, oder ihn nur begrenzt. Für den ersten Fall nämlich besteht die Aufgabe darin, die Lage der Flächen der zu construirenden Gestalten zu bestimmen, deren Figur durch ihren wechselseitigen Durchschnitt schon von selbst sich ergeben wird; für den zweiten Fall aber ist zuförderst die Figur der Flächen aufzufinden, deren gegenseitige Neigung (Lage) durch ihre spätere Verbindung zu einem Ganzen von selbst erfolgt.

Da Krystallographie von Anfängern an Modellen leichter studirt wird wie an Zeichnungen, die Verfertigung von Modellen aus Massen, die den Raum stätig erfüllen, wegen mancherlei Hindernissen bei Bearbeitung des Materiales, schwieriger und zeitraubender ist, so versuchte ich die letzte Aufgabe zu lösen. Ich habe absichtlich nur die regelmässigen Gestalten mit ihren Hälften und Vierteln im Folgenden abgehandelt, und von den Combinationen keine Erwähnung gethan, einerseits weil hierdurch dieses Schriftchen einen grösseren Umfang gewonnen hätte, als in meinem Plane lag, andererseits weil ich die volle Ueberzeugung habe, dass Jeder, der Zeit und Mühe nicht scheut, die Methode an einfachen Krystallgestalten gründlich einsehen und handhaben zu lernen, später durch eigenes Nachdenken den Weg entdeckt, den er bei der Construction von Flächen einer gegebenen Combination zu betreten hat. Für eine zweckmässige Auswahl der zu zeichnenden Combinationen, sowie für einen graduellen Fortschritt vom Einfacheren zum Complicirteren zu sorgen, wird jeder Lehrer bemüht sein.

Erstes Hauptstück.

Zeichnung der Flächen der Gestalten des tessularischen Systemes.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 1.

Die Flächenconstruction der Gestalten des tessularischen Systemes setzt bei einigen derselben nur Ein Datum, und zwar am Bequemsten die Länge der pyramidalen Axe = 1 voraus; bei anderen ist hiezu auch noch die Kenntniss des Längenverhältnisses der pyramidalen zur prismatischen und rhomboedrischen Axe erforderlich.

Am Hexaeder verhält sich die pyramidale Axe zur prismatischen und rhomboedrischen wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dieses Verhältniss wird bei allen abgeleiteten Gestalten modificirt, und bedingt eben die verschiedenen Arten der abgeleiteten Gestalten und deren Varietäten. Für die bekannteren Gestalten dieses Systemes finden sich die Verhältnisszahlen in der rückwärts beigebundenen tabellarischen Uebersicht, welche aus der 1. Auflage von Mohs: Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralreiches, abgedruckt wurde.

Zeichnung der Fläche des Hexaeders.

§. 2.

Ist die Länge der pyramidalen Axe des Hexaeders durch die Linie AB (Fig. 1) $= 1$ gegeben, so beschreibe man mit der Linie AB das Quadrat $ABCD$, welches die gesuchte Fläche sein wird.

Denn die Flächen von **H** sind Quadrate, und die Seiten dieser Quadrate haben gleiche Länge mit der pyramidalen Axe desselben.

Vorbereitende Constructionen zur Auffindung der Flächen der aus dem Hexaeder abgeleiteten Gestalten.

§. 3.

Der Flächenconstruction aller abgeleiteten Gestalten des tessularischen Systemes liegen zwei Schnitte am Hexaeder zu Grunde, von denen der eine parallel mit einer Fläche durch den Mittelpunct, der andere aber durch zwei parallele Kanten und die sie verbindenden Diagonalen geführt wird. Beide Schnitte halbiren also das Hexaeder.

Der erste dieser Schnitte ist der Fläche des Hexaeders gleich, somit kann ihn $ABCD$ (Fig. 1) vorstellen, wenn man darin nur noch die Linien $QQ = Q'Q' = 1$ (zwei pyramidale Axen) und $AC = BD = \sqrt{2}$ (zwei prismatische Axen) zieht, welche sich in M, d. i. im Mittelpuncte von **H** schneiden. Um den zweiten dieser Schnitte zu erhalten, construire man ein Rechteck, dessen kürzere Seite gleich einer Kante, und dessen längere gleich einer Diagonale von **H** genommen wird; man ziehe darin die beiden Diagonalen, und lege durch ihren Durchschnittspunct eine zur längeren und eine zweite zur kürzeren Seite des Rechteckes parallele Linie. Ist EH (Fig. 2) $= AB$ (Fig. 1), und EF (Fig. 2) $= AC$ (Fig. 1), so ist $EFGH$ der verlangte Schnitt; daher sind $EG = FH$ die beiden rhomboedrischen Axen, QQ die pyramidale, und PP die prismatische Axe desselben, ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunct M aber ist wieder der Mittelpunct von **H**.

Dass die für beide Schnitte angegebene Constructions-Methode richtig ist, folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des Hexaeders.

Zeichnung der Flächen des Oktaeders und seiner Hälften.

§. 4.

Man verbinde die Puncte Q und Q' (Fig. 1) durch die gerade Linie QQ', mache ab (Fig. 3) $= QQ'$, und beschreibe mit $a\,b$ das gleichseitige Dreieck $a\,b\,c$, so ist dieses die gesuchte Fläche.

Denn da die Kanten von **O** je zwei benachbarte Endpuncte der pyramidalen Axen des Hexaeders verbinden, so ist $QQ' = a\,b$ eine Kante von **O**, und da die Flächen desselben gleichseitige Dreiecke sind, so ist vermöge der Construction $a\,b\,c$ die gesuchte Fläche.

§. 5.

Um die Fläche von $\frac{\mathbf{O}}{2}$ zu finden, ziehe man von den Winkelpuncten des Dreieckes $a\,b\,c$ (Fig. 3) parallele Linien zu den gegenüberliegenden Seiten, und verlängere diese bis sie sich wechselseitig schneiden; das neu entstehende Dreieck $d\,e\,f$ wird die gesuchte Fläche sein.

Bei der Zerlegung von **O** werden zwei abwechselnde Flächen an einem pyramidalen Eck vergrössert; die Durchschnittslinie derselben gibt daher eine Kante von $\frac{\mathbf{O}}{2}$, welche den diesem Eck gegenüberliegenden Kanten von **O** parallel sein, und in der erweiterten Ebene der vollflächigen Gestalt liegen muss. Denn wenn zwei Ebenen (die zwei zu vergrössernden Flächen des **O**) von einer dritten (der Ebene des diesem pyramidalen Eck entsprechenden Hauptschnittes) geschnitten werden, und die Durchschnittslinien sind parallel (bei **O** ist der pyramidale Hauptschnitt ein Quadrat, folglich die gegenüberliegenden Seiten parallel), so müssen auch diese zwei Ebenen, wenn sie vergrössert werden, in einer Linie sich schneiden (der Kante von $\frac{O}{2}$), die diesen Durchschnittslinien parallel ist. Da aber jede Eläche von **O** zugleich an drei pyramidalen Ecken liegt, und jedes pyramidale Eck auch ein Winkelpunct einer Fläche von **O** ist, so ergibt sich die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens von selbst.

Zeichnung der Fläche des einkantigen Tetragonal-Dodekaeders.

§. 6.

Man mache ab (Fig. 4) $= QQ'$ (Fig. 1) $= \sqrt{2}$, und beschreibe um die Puncte a und b Kreise mit dem Halbmesser QK (Fig. 2) $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so werden sich diese in den Puncten c und d schneiden; verbindet man nun die Puncte a und b mit c und d durch gerade Linien, so ist $abcd$ die verlangte Fläche.

Denn die Flächen von **D** sind Rhomben, welche senkrecht auf den prismatischen Axen stehen, und deren längere Diagonale je zwei benachbarte pyramidale Ecke verbindet. Es ist somit $QQ' = ab = \sqrt{2}$ eine dieser längeren Diagonalen, und da vermöge Construction $AQMQ'$ ein Quadrat ist, so halbiren sich AM und QQ' gegenseitig. Halbirt man nun MP (Fig. 2), so dass $JM = \frac{1}{2} MP$ wird, errichtet von dem Puncte J eine Senkrechte, welche die ME in K schneidet, und verbindet die Puncte Q und K durch die Gerade $QK = ac = ad = bc = bd = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (weil die Dreiecke EPM und KJM ähnlich sind, so ist, da $JM = \frac{1}{2} PM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, auch $KM = \frac{1}{2} EM = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; KM aber $= QK$ weil $EQMP$ ein Rechteck ist), so gibt diese Linie die Länge der Kante, die von einem pyramidalen zu einem rhomboedrischen Eck geht; sämmtliche Kanten sind aber gleich, weil die Flächen Rhomben sind, folglich die Richtigkeit des Verfahrens erwiesen.

Zeichnung der Flächen eines hexaedrischen Trigonal-Ikositetraeders und seiner Hälften.

§. 7.

Man wähle zwischen den Puncten E und K (Fig. 2) der Linie EM irgend einen Punct L, ziehe von L zu EH

eine parallele Linie, welche die HM in N schneidet, und verbinde Q und L durch die Gerade QL. Man mache dann ab (Fig. 5) $= LN$, und beschreibe um die Puncte a und b mit dem Halbmesser QL Kreise, so werden sich diese in c schneiden. Verbindet man nun den Punct c mit a und b durch gerade Linien, so ist abc die Fläche von **An**.

Dass der Punct L, d. i. der Endpunct der rhomboedrischen Axe von **An** in irgend einem Puncte der Linie EG, d. i. in der rhomboedrischen Axe von **H** liegen müsse, wird wohl Niemand bezweifeln; dass er aber zwischen E und K liegen müsse, erhellt aus folgender Betrachtung. Rückte L bis E, so würde die Kante, welche von einem rhomboedrischen Eck zu einem pyramidalen geht 180^0, mithin verwandelte sich **An** in **H**; rückte aber L bis K, so würde die Kante, welche zwei rhomboedrische Ecke verbindet, 180^0 werden, und aus **An** würde **D**. Auf diese Art lässt sich zeigen, dass die rhomboedrische Axe kleiner als $\sqrt{3}$ und grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, oder die prismatische Axe kleiner als $\sqrt{2}$ und grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sein müsse. Folglich muss L zwischen E und K liegen. Da nun die Flächen von **An** *) gleichschenkliche Dreiecke sind, deren Basis jene Kante ist, welche zwei rhomboedrische Ecke

---

*) Ich habe absichtlich eine unbestimmte Varietät des hexaedrischen Trigonal-Ikositetraeders und das ihr entsprechende hexaedrische Pentagonal-Dodekaeder gezeichnet, um zu zeigen, dass selbst für ein unbestimmtes **n** die Länge der rhomboedrischen und prismatischen Axen keineswegs ganz willkürlich sei, sondern innerhalb gewisser Grenzen liege, die durch die Grenzen der Gestalt selbst bestimmt werden. Dem zu Folge muss bei den oktaedrischen Trigonal-Ikositetraedern, deren prismatische Axe constant $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, der Werth der rhomboedrischen Axe zwischen $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ liegen, während bei den zweikantigen Tetragonal-Ikositetraedern und bei den Tetrakontaoktaedern die Werthe der rhomboedrischen Axen zwischen $\sqrt{3}$ und $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, jene der prismatischen zwischen $\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ fallen, und bei diesen noch überdiess zu einander in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Man kann daher im Allgemeinen sagen, dass die Endpuncte der veränderlichen Axen jener Gestalten des tessularischen Systemes, bei denen Varietäten vorkommen können, zwischen den Endpuncten der gleichnamigen Axen ihrer Grenzen liegen müssen.

Bei den folgenden Gestalten des tessularischen Systemes werde ich die Aufgabe für bestimmte Varietäten lösen.

verbindet, und deren Schenkel jene Kanten bilden, welche von einem pyramidalen zu einem rhomboedrischen Eck gehen, so ergibt sich die Richtigkeit des Verfahrens von selbst.

§. 8.

Um die Fläche von $\frac{\mathrm{An}}{2}$ zu finden, ziehe man von dem Puncte c (Fig. 5) zu ab parallel die Linie de, fälle von c das Perpendikel cf, beschreibe um Q (Fig. 1) als Mittelpunct mit ef als Halbmesser einen Kreis, der die AM in R schneidet, ziehe QR, und verlängere sie, bis sie die AD in S schneidet, verlängere auch cf, und mache $cg = QS$, und $ce = cd = Q'S$; verbindet man nun e mit b, b mit g, g mit a und a mit d durch gerade Linien, so ist $agbed$ die gesuchte Fläche.

Weil die charakteristische Kante von $\frac{\mathrm{An}}{2}$ der Basis der Fläche von **An** parallel ist, so muss de parallel zu ab gezogen werden, und zwar von dem Puncte c aus, weil dieser Punct in beiden um ein pyramidales Eck gelegenen und zu vergrössernden Flächen von **An** liegt. Dass aber die charakteristische Kante der ab parallel sein müsse, ergibt sich aus derselben Betrachtung, welche ich anwendete, um zu zeigen, dass die Kante von $\frac{\mathrm{O}}{2}$ der gegenüberliegenden von **O** parallel sei. Denkt man sich ferner eine der charakteristischen Kanten senkrecht auf die Ebene des Papieres in **Q** (Fig. 1), so muss eine andere in der Linie AD liegen, und das in der erweiterten Ebene von **An** verlängerte Perpendikel $cf = QR$ in S schneiden. Der Punct S ist also der Winkelpunct des charakteristischen Winkels der Fläche von $\frac{\mathrm{An}}{2}$. Dieser Durchschnittspunct S der Linie QR und AD bestimmt aber auch die Länge der charakteristischen Kante; denn da jede charakteristische Kante zwei dreiflächige ungleichwinkliche Ecke verbindet, in S aber ein solches ist, so muss $Q'S = ce = cd$ die Hälfte der charakteristischen Kante sein. Bedenkt man ferner, dass die rhomboedrischen Axen in beiden Gestalten gleich lang sind, dass also die Puncte a und b in beiden Gestalten Winkelpuncte bleiben, so wird man die Richtigkeit des Verfahrens leicht einsehen.

Zeichnung der Flächen eines oktaedrischen Trigonal-Ikositetraeders und seiner Hälften.

§. 9.

In **B** 1 beträgt die rhomboedrische Axe $^2/_5$, die prismatische $^1/_2$ von der des **H**. Macht man daher MT (Fig. 2) $= {}^2/_5\, MH$, zieht TQ, beschreibt um ab (Fig. 6) $= QQ'$ (Fig. 1) mit dem Halbmesser TQ Kreise, die sich in c schneiden, und verbindet c mit a und b durch gerade Linien, so ist abc die gesuchte Fläche.

Denn da die Flächen der oktaedrischen Trigonal-Ikositetraeder gleichschenkliche Dreiecke sind, deren Basis die Endpuncte von zwei pyramidalen Axen verbindet, so ist $QQ' = ab$ diese Basis, und da die Schenkel dieser Dreiecke von einem pyramidalen zu einem rhomboedrischen Eck gehen, so ist $TQ = ac = cb$ ein Schenkel derselben, daher abc die verlangte Fläche.

§. 10.

Um die Fläche von $\frac{\mathbf{B}1}{2}$ zu finden, ziehe man TJ (Fig. 2) verlängere dieselbe über J, bis sie die ME in T' schneidet, ziehe cd (Fig. 6) senkrecht auf ab, verlängere sie über d, und mache $de = JT'$. Verbindet man nun e mit a und b durch gerade Linien, so ist $acbe$ die gesuchte Fläche von $\frac{\mathbf{B}1}{2}$.

Die Flächen der in Rede stehenden Hälfte sind Trapezoide, die durch eine ihrer Diagonalen in zwei gleichschenkliche Dreiecke getheilt werden. Der am rhomboedrischen Eck von **B** 1 liegende Winkel und die beiden ihn bildenden Kanten gehen ganz unverändert in die Hälfte über, während ab zu jener Diagonale sich umwandelt, welche die Fläche von $\frac{\mathbf{B}1}{2}$ in zwei gleichschenkliche Dreiecke theilt. Man hat also bereits durch die Fläche von **B** 1 zwei Seiten und drei Winkelpuncte der Fläche ihrer Hälfte gegeben. Da T ein rhomboedrisches Eck, und J der Endpunct einer prismatischen Axe von **B** 1 ist, so gibt TJ die Höhe seiner Flächen, und ist daher gleich cd. Bei der Zerlegung verlängert sich aber TJ bis sie mit der zweiten im selben Hauptschnitt des Hexaeders liegenden rhomboedrischen Axe in T' zusammentrifft, welcher Punct daher die Lage des neu entstehenden rhomboedrischen Eckes bezeichnet. Verlängert man daher $cd = TJ$ bis $de = JT'$, folglich $ce = TT'$, so hat man durch e auch den vierten Winkelpunct der zu construirenden Fläche gefunden, und braucht folglich nur die Linien ea und eb zu ziehen, um die Aufgabe zu lösen, w. z. b. w.

Zeichnung der Flächen eines zweikantigen Tetragonal-Ikositetraeders und seiner Hälften.

§. 11.

In **C** 1 beträgt die prismatische Axe $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, die rhomboedrische $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. — Man mache $K'M$ (Fig. 2) $= \frac{1}{2}\,EM$, $MO = \frac{2}{3}\,MP$, und ziehe QK' und $K'O$; ferner mache man MO' (Fig. 1) $= \frac{2}{3}\,MD$, und ziehe QO'. Wird nun ab (Fig. 7) $= QK'$ genommen, und werden um a mit dem Halbmesser QO', und um b mit dem Halbmesser $K'O$ Kreise beschrieben, so schneiden sich diese in c und d. Verbindet man nun c und d mit a und b durch gerade Linien, so ist $acbd$ die gesuchte Fläche.

Denn da K' der Endpunct der rhomboedrischen Axe ist, so ist $QK' = ab$ jene Diagonale, welche von einem pyramidalen zu einem rhomboedrischen Eck geht; da ferner O der Endpunct einer prismatischen Axe ist, so ist $K'O$ jene Kante, welche ein rhomboedrisches mit einem prismatischen Eck verbindet; und weil endlich OO' auch ein Endpunct einer prismatischen Axe ist, so ist QO' jene Kante, welche ein pyramidales mit einem prismatischen Eck verbindet. Da nun vermöge der Construction $bc = bd = K'O$ und $ac = ad = QO'$, so ist die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens erwiesen.

§. 12.

Die Fläche von $\frac{\mathbf{C}\,1}{2}$ wird gefunden, indem man cb (Fig. 7) über c, und bd über d verlängert, und dann durch a eine auf ab senkrechte Linie zieht, welche mit den beiden verlängerten Seiten cb und db in e und f zusammentrifft; bef wird die verlangte Fläche sein.

Weil diese Hälfte nach dem ersten Zerlegungsverfahren entsteht, so bleibt der am rhomboedrischen Eck liegende Winkel unverändert, und die ihn bildenden Kanten werden ihre Grösse und Richtung beibehalten, verlängern sich aber. Die Flächen der Hälfte sind aber gleichschenkliche Dreiecke, und zwar verwandeln sich die verlängerten Linien cb und db in die Schenkel derselben, während die Diagonale ab zu ihrer Höhe sich umgestaltet. Da nun in jedem gleichschenklichen Dreieck die Grundlinie mit der Höhe einen rechten Winkel bildet, und a ein Punct dieser Grundlinie ist, ef senkrecht auf ab steht, und bis zu ihrem Durchschnitt mit den verlängerten cb und db gezogen wurde, so muss ebf die verlangte Fläche sein, w. z. b. w.

Zeichnung der Flächen eines Tetrakontaoktaeders, seiner Hälften und Viertel.

§. 13.

In T'1 beträgt die prismatische Axe $^3/_5 \sqrt{2}$, die rhomboedrische $^1/_2 \sqrt{3}$. — Man mache MV (Fig. 2) $= {}^3/_5\, MP = {}^3/_5 \sqrt{2}$, $MU = {}^1/_2\, MF = {}^1/_2 \sqrt{3}$ und ziehe QU und UV; ferner mache man MV' (Fig. 1) $= {}^3/_5\, MB = {}^3/_5 \sqrt{2}$ und ziehe QV'. Wird nun ab (Fig. 8) $= QU$ gezogen, werden um a mit QV' und um b mit UV als Halbmessern Kreise beschrieben, die sich in c schneiden, und wird endlich c mit a und b durch gerade Linien verbunden, so ist abc die gesuchte Fläche.

Da die Flächen dieser Gestalt Dreiecke sind, und die Winkelpuncte derselben durch die benachbarten Endpuncte von drei verschiedenen Axen angegeben werden, so braucht man nur diese Endpuncte durch gerade Linien zu verbinden, um die Länge der Seiten zu finden, und mit diesen Seiten ein Dreieck zu construiren, um die Aufgabe zu lösen. Nun ist aber $QU = ab$ die von einem pyramidalen zu einem rhomboedrischen, $QV' = ac$ die von einem pyramidalen zu einem prismatischen, und $UV = bc$ die von einem rhomboedrischen zu einem prismatischen Eck gehende Kante; folglich ist abc vermöge der Construction die verlangte Fläche.

§. 14.

Soll die Fläche von $\frac{T'1}{2}$ gezeichnet werden, so verlängere man UV (Fig. 2) über V, bis sie die MG in U' schneidet. Dann verlängere man bc (Fig. 8) über c, bis $bd = UU'$, und verbinde d und a durch die gerade Linie ad. Es wird abd die verlangte Fläche sein.

Bei der Vergrösserung aller Flächen eines Hauptpunctes von T′1 bleibt der am rhomboedrischen Eck liegende Flächenwinkel und die von einem pyramidalen zu einem rhomboedrischen Eck gehende Kante ganz unverändert, jene Kante aber, die ein rhomboedrisches mit einem prismatischen Eck verbindet, behält ihre Grösse und Richtung. Man hat daher durch die Fläche von T′1 bereits für jene von $\frac{T'1}{2}$ gegeben: die Seite ab, den Winkel bei b, und die Richtung der zweiten von b ausgehenden Seite. Diese Seite ist aber keine andere als UV (Fig. 2), die sich bei der Erweiterung der Flächen nothwendiger Weise verlängert, und zwar so weit, bis sie mit der zweiten im selben Hauptschnitt des Hexaeders liegenden rhomboedrischen Axe in U' zusammentrifft. UU' muss folglich die Länge der von einem stumpferen zu einem schärferen rhomboedrischen Eck ziehenden Kante dieser Hälfte angeben. Macht man daher $bd = UU'$, und verbindet d mit a, so muss abd die Fläche von $\frac{T'1}{2}$ sein. Die angegebene Methode ist daher richtig.

§. 15.

Um die Fläche von $\frac{T''1}{2}$ zu zeichnen, verlängere man UV (Fig. 2) über U, und QM über Q hinaus, bis sich diese Linien in X treffen. Man verlängere auch QM (Fig. 1), und mache $MX' = MX$ (Fig. 2), verbinde X' mit Q' durch die gerade Linie $X'Q'$, und verlängere QV', bis sie die $Q'X'$ in Z schneidet. Verlängert man nun ac (Fig. 8) über c hinaus, macht $ae = QZ$, verbindet e mit b durch die gerade Linie eb, beschreibt um a mit dem Halbmesser $Q'Z$ und um b mit dem Halbmesser be Kreise, und verbindet ihren Durchschnittspunct f sowohl mit a als mit b durch gerade Linien, so ist $aebf$ die gesuchte Fläche.

Zur grösseren Deutlichkeit der Beweisführung wurde ein Tetrakontaoktaeder (Fig. 9) gezeichnet. Wenn z. B. an dem rhomboedrischen Eck r die mit α, α' und α'' bezeichneten Flächen die zu vergrössernden wären, so müssen an dem rhomboedrischen Eck r' die mit β, β' und β'' bezeichneten Flächen vergrössert werden, weil das zweite Zerlegungsverfahren in Anwendung kommt. Denken wir uns unterdessen nur die Fläche α vergrössert, so muss diese die verlängerte pyramidale Axe QQ in irgend einem Puncte treffen, und zwar wird die verlängerte Kante rp, welche mit der pyramidalen Axe QQ in einer Ebene liegt, diese in x schneiden. Dasselbe gilt auch von der Fläche β, und da α und β gegen QQ gleiche Lage haben, so muss der Punct X für beide derselben sein. Da aber beide Flächen zugleich vergrössert werden, so werden sie sich selbst gegenseitig schneiden, und ihr Durchschnitt kann kein anderer als $Q'X$ sein, weil beide Ebenen die Puncte Q' und X gemein haben. Aber auch die Flächen α' und β' werden vergrössert, daher muss die zwischen ihnen liegende Kante sich ebenfalls verlängern, und wird die $Q'X$, mit welcher sie in einer Ebene liegt, in irgend einem Puncte p' schneiden, an dem ein dreikantiges vierflächiges Eck zu liegen kommt. Sucht man die analogen Linien in Fig. 1 und Fig. 2 nach, so wird man leicht einsehen, dass Z derjenige Punct ist, welcher dem Puncte p' (Fig. 9) entspricht, dass mithin QZ die von einem prismatischen zu einem dreikantigen vierflächigen Eck gehende längere, ZQ' die eben solche Ecke verbindende kürzere Kante sein muss. Da nun die Puncte a und b (Fig. 8) in der Hälfte dieselben sind, wie an der vollflächigen Gestalt, da ferner die Kante ac ihrer Lage und Grösse nach nicht geändert, sondern nur in der Hälfte verlängert wird, so ist, weil vermöge der Construction $ae = QZ$, $eb = bf$, und $af = Q'Z$ genommen wurde, die Richtigkeit des Verfahrens erwiesen.

§. 16.

Soll die Fläche von $\frac{T'''1}{2}$ gezeichnet werden, so ziehe man von dem Puncte c (Fig. 8) eine parallele Linie zu ab, welche die be in g schneidet, mache $bh = bg$, verbinde a und h durch die gerade Linie ah, beschreibe um a mit dem Halbmesser ah einen Kreis, der die verlängerte cg in i trifft, und vereinige endlich a mit i durch die gerade Linie ai, so ist $ahbgi$ die gesuchte Fläche.

Das dritte Zerlegungsverfahren verlangt, dass abwechselnde Flächen am Hauptpuncte und die zu ihnen parallelen am Nebenpuncte vergrössert werden. Ist also r' ein solcher Hauptpunct, und werden an ihm die Flächen β, β' und β'' vergrössert, so müssen am Nebenpuncte r die Flächen α, α' und α'' verschwinden, während die zwischen ihnen liegenden und mit γ, γ' und γ'' bezeichneten zu vergrössern sind. Hiedurch gelangen stets zwei an einem und demselben prismatischen Eck abwechselnd gelegene Flächen zum Durchschnitt, z. B. β' und γ, und die Durchschnittslinie derselben wird durch dieses prismatische Eck, als einen ihnen gemeinschaftlichen Punct gehen, und wird parallel mit den diesem Eck gegenüberliegenden die pyramidalen mit dem rhomboedrischen Ecken vereinigenden Kanten sein, d. i. mit Qr' und $Q'r$, weil diese zu einander parallel sind. Da nun c (Fig. 8) der am prismatischen Eck gelegene Winkelpunct, und ab die ihm gegenüberliegende Seite ist, so muss die durch c mit ab parallel gezogene cg die Richtung der Durchschnittslinie von zwei an demselben prismatischen Eck gelegenen und zu vergrössernden Flächen angeben. Da ferner in dieser Hälfte dieselben Flächen β, β' und β'' vergrössert werden, die auch in $\frac{T''1}{2}$ enthalten sind, so ist es klar, dass die von r' auslaufenden Kanten auch in beiden Gestalten dieselbe Lage und Grösse haben müssen; sie sind folglich, weil $r' = b$, durch be und bf ihrer Richtung nach gegeben. Die cg schneidet aber die be in g, daher bg die Länge der von einem rhomboedrischen Eck ausgehenden Kante, und da alle von einem rhomboedrischen Eck ausgehenden Kanten einander gleich sein müssen, so wurde $bh = bg$ gemacht. Dadurch wird aber auch h, das ist das ungleichwinkliche dreiflächige Eck bestimmt, daher ah die von einem pyramidalen zu einem ungleichwinklichen dreiflächigen Eck gehende Kante, denn der Punct a wird durch die Zerlegung nicht geändert. Aber auch die von einem pyramidalen Eck ausgehenden Kanten müssen gleich sein, daher wurde $ai = ah$ gemacht, und mithin das Verfahren richtig.

Wollte man die Fläche von $\mathbf{l}\frac{T'''1}{2}$ zeichnen, wenn die gefundene die von $\mathbf{r}\frac{T'''1}{2}$ sein sollte, so dürfte man nur den Punct c auf die andere Seite der ab legen, das übrige Verfahren wäre ganz dasselbe.

§. 17.

Um die Fläche von $\frac{T1}{4}$ zu construiren, verlängere man in $ahbgi$ (Fig. 8) bh über h, und bg über g hinaus, ziehe ih, lege durch a eine mit ih parallele Linie, welche die verlängerte bh in k schneidet, und mache $bl = bk$, und $am = ak$. Werden nun endlich l und m durch gerade Linien mit d verbunden, so ist $bkmdl$ die gesuchte Fläche.

Weil $\frac{T''' 1}{2}$ nach dem ersten Verfahren zerlegt wird, so werden die am rhomboedrischen Eck b gelegenen Kanten ihrer Lage und Grösse nach nicht geändert, sondern nur verlängert; desshalb wurden bh und bg über h und g hinaus verlängert. Durch dieses Verfahren kommen aber am pyramidalen Eck a abwechselnde Flächen zum Durchschnitt, welche eine Kante erzeugen müssen, die durch a als einen ihnen gemeinschaftlichen Punct geht, und zwar ist dieselbe nach dem in §. 5 Gesagten parallel mit ih, einer Hilfslinie, welche die Stelle der am Oktaeder dem oberen pyramidalen Eck gegenüberliegenden Kante zu vertreten hat. Aus diesem Grunde wurde ih und durch a damit eine parallele Linie gezogen. Bei der Vergrösserung der Flächen trifft jedoch die obere der vom rhomboedrischen Eck b ausgehenden Kanten mit der am pyramidalen Eck a sich neu bildenden in einem ungleichwinklichen dreiflächigen Eck zusammen, daher braucht man nur die genannten Linien zu verlängern, und ihr Durchschnittspunct wird den an diesem Eck gelegenen Winkelpunct der zu construirenden Fläche geben, welcher in der Zeichnung mit k beschrieben wurde. Nun liegt aber an jedem Endpunct der durch a gehenden Kante ein solches Eck, und zwar sind beide gleich weit von a entfernt, daher wurde $am = ak$ genommen. Das erste Zerlegungsverfahren gibt wie bekannt den dadurch entstehenden Gestalten die Hauptform des Tetraeders, und mithin sind die Theile der rhomboedrischen Axe vom Mittelpunct aus gemessen ungleich. Das Verhältniss dieser Theile ist aber an $\frac{T 1}{4}$ dasselbe wie bei $\frac{T' 1}{2}$, weil dieselben drei Flächen, welche hier das schärfere rhomboedrische Eck bilden, unter jenen sechs Flächen vorkommen, die das schärfere rhomboedrische Eck in $\frac{T' 1}{2}$ zusammensetzen, folglich muss d der an einem schärferen rhomboedrischen Eck gelegene Winkelpunct der Fläche von $\frac{T 1}{4}$ sein. Da somit auch dieser fünfte Winkelpunct d gefunden ist, so braucht man ihn nur mit den zwei benachbarten l und m zu verbinden, um die Aufgabe zu vollenden. Die Richtigkeit des Verfahrens ist folglich erwiesen.

War die Hälfte $r \frac{T''' 1}{2}$, so wird das Viertel $r \frac{T 1}{4}$ sein, und umgekehrt; daher leicht einzusehen, dass bald die Fläche von

$r\,\frac{T'''1}{2}$, bald die von $l\,\frac{T'''1}{2}$ zu Grunde gelegt werden müsse, je nachdem die Aufgabe es verlangt*).

---

*) Da man aus je zwei analogen Hälften des Tetrakontaoktaeders dieselben vier Viertel erhält, so ist es gleichgültig für die Zeichnung der Flächen der Viertel, welche Hälftenart hiezu benützt wird; man könnte auch die Fläche des Viertels unmittelbar aus jener des Tetrakontaoktaeders erhalten. Ich habe die Fläche der nach dem dritten Zerlegungsverfahren entstandenen Hälfte benützt, weil bei ihr am leichtesten die Lage jener Kante aufgefunden werden kann, die zwei dreiflächige ungleichwinkliche Ecke verbindet, worauf es hauptsächlich ankommt.

Zweites Hauptstück.

Zeichnung der Flächen der Gestalten des rhomboedrischen Systemes.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 18.

Unter der Voraussetzung, dass die Länge der Seite der horizontalen Projection bekannt ist, und als Einheit angenommen wird, braucht man zur Zeichnung der Fläche von **R**, d. i. des Grundrhomboeders einer gewissen Krystallreihe nur Ein Datum, während für irgend ein **R** $\pm$ **n** oder **P** $\pm$ **n**, auch noch das **n**, für irgend ein $(\mathbf{P} \pm \mathbf{n})^{\mathbf{m}}$ das **n** und **m**, so wie für Hälften und Doppelgestalten die diesen zu Grunde liegende einfache vollflächige Gestalt bekannt, somit mehrere Daten gegeben sein müssen *).

*) Es kann sich hier nicht darum handeln, überhaupt die Fläche irgend eines Rhomboeders oder einer gleichkantigen sechsseitigen Pyramide oder eines Orthotypes u. s. w. zu zeichnen, denn für diesen Fall wäre jeder Rhombus die Fläche eines Rhomboeders, jedes gleichschenkliche Dreieck, dessen Winkel am Scheitel kleiner als 60°, die Fläche einer gleich-

Vorbereitende Constructionen.

§. 19.

Sowie im tessularischen System gewisse Schnitte am Hexaeder zur Zeichnung der Flächen der daraus abgeleiteten Gestalten erforderlich waren, so bedarf man auch im rhomboedrischen System zweier Schnitte, welche die Grundlage zur Zeichnung aller in einer rhomboedrischen Krystallreihe möglichen einfachen Gestalten bilden, nämlich die horizontale Projection und denjenigen Hauptschnitt des Grundrhomboeders, in welchem die rhomboedrische Axe liegt.

Erstere wird erhalten, indem man mit HO (Fig. 10) das reguläre Sechseck $HORZNT$ beschreibt. Der Hauptschnitt des Grundrhomboeders aber wird auf folgende Art gefunden. Man ziehe eine verticale Linie AX (Fig. 11) so lang als die Axe von **R**, theile sie in drei gleiche Theile, so dass $AP = PQ = QX = \frac{1}{3}\, AX$, errichte von P und Q senkrecht auf AX die Linien PC und $QB = HO$ (Fig. 10) $= 1$, und verbinde endlich B und C mit A und X durch gerade Linien. $ABXC$ wird der verlangte Hauptschnitt sein.

Bezüglich der horizontalen Projection darf nur erinnert werden, dass dieselbe dasjenige reguläre Sechseck ist, dessen Seiten als Einheit angenommen werden. Hinsichtlich der Construction des Haupt-

---

kantigen sechsseitigen Pyramide, jedes spitzwinkliche ungleichseitige Dreieck die Fläche eines Orthotypes u. s. w.; sondern es soll für durch ihre Abmessungen bestimmte Gestalten die Aufgabe gelöst werden.

Die Daten, welche durch unmittelbare Messungen an Krystallen am sichersten erhalten werden können, beschränken sich auf die Grössen der Kanten, jedoch sind diese Daten nicht unmittelbar zur Zeichnung der Flächen anwendbar, für welche die Längen gewisser Linien bequemer sind, und daher entweder gegeben sein, oder durch Rechnung aus den Resultaten der Messungen erst gefunden werden müssen. Diese Bemerkung hat natürlich nicht nur für das rhomboedrische, sondern auch für alle folgenden Systeme zu gelten.

schnittes aber wird bemerkt, dass derselbe ein Rhomboid ist, dessen eine Diagonale die bei aufrechter Stellung der Gestalt verticale rhomboedrische Axe bildet. Zieht man also eine verticale Linie AX von der Länge der Axe des Grundrhomboeders, so sind durch die Endpuncte derselben A und X zwei Winkelpuncte des zu suchenden Hauptschnittes nun schon gegeben. Es ist ferner bekannt, dass dieses Rhomboid von zwei parallelen Axenkanten und den sie verbindenden geneigten Diagonalen gebildet wird. Da an jedem Rhomboeder die Axe durch zwei auf sie senkrechte Ebenen, wovon die eine durch die drei obern, die andere durch die drei untern Ecken hindurchgeht, in drei gleiche Theile getheilt wird, und da der Durchschnitt dieser Ebenen mit dem Rhomboeder die Figur eines gleichseitigen Dreieckes erhält, weil er durch drei horizontale folglich gleich lange Diagonalen desselben geführt wird, so sind die Winkelpuncte dieser Dreiecke zugleich auch Winkelpuncte der horizontalen Projection, denn sie sind obere und untere Ecken von **R**, und es ist jede aus diesen Winkelpuncten zur Axe gezogene Linie gleich der Seite der horizontalen Projection.

Macht man daher $AP = PQ = QX = \frac{1}{3} AX$, so müssen durch P und Q die zwei obbemerkten auf AX senkrechten Ebenen gehen; errichtet man ferner in diesen beiden Puncten die senkrechten Linien $PC = QB = HO$, so ist B ein unteres und C ein oberes Seiteneck des Rhomboeders, und es werden folglich durch sie die beiden anderen Winkelpuncte des zu suchenden Rhomboid gegeben sein. Verbindet man also B und C mit A und X durch gerade Linien, so werden $AC = XB$ die Axenkanten, $AB = XC$ die geneigten Diagonalen, und $ABXC$ der Hauptschnitt von **R** sein, w. z. b. w.

Zeichnung der Flächen von Rhomboedern und ihrer Grenzen.

§. 20.

Um die Fläche von **R** zu finden, mache man ab (Fig. 12) $= AB$ (Fig. 11), und beschreibe mit dem Halbmesser AC um a und b Kreise, die sich in c und d schneiden. Verbindet man nun die letztgenannten Puncte mit a und b durch gerade Linien, so wird $abcd$ die verlangte Fläche sein.

Soll aber die Fläche von **R±n** gefunden werden, so nehme man das Doppelte, Vierfache ... oder die Hälfte, das Viertel ... der Axe von **R**, je nachdem das **n** es verlangt, construire damit und mit der als Einheit angenommenen Seite der horizontalen Projection nach §. 19 den Hauptschnitt des gegebenen **R** $\pm$ **n**, und bilde dann aus ihm die zu zeichnende Fläche genau so, wie aus dem Hauptschnitt von **R** dessen Fläche erzeugt wurde.

Da die in Rede stehenden Flächen Rhomben sind, und da zur Zeichnung eines bestimmten Rhombus die Kenntniss der Länge einer Diagonale und einer Seite hinreicht, so ist, weil $ab = AB$, und $ac = ad = bc = bd = AC$ die Richtigkeit des Verfahrens für **R**, und somit auch für **R** $\pm$ **n** erwiesen, nur hat man sich in Bezug auf letztere zu erinnern, dass bei gleicher horizontaler Projection die relative Länge der Kanten und Diagonalen von der Grösse der Hauptaxe abhängt.

§. 21.

Die Fläche von **R** $- \infty$ ist ein reguläres Sechseck gleich der horizontalen Projection $HORZNT$ (Fig. 10); jene von **R** $+ \infty$ aber ein Rechteck von beliebiger Höhe, dessen Grundlinie gleich der Seite des Querschnittes von **R**, der zugleich die Grundflächen von einem begrenzten Theil dieses Prismas *) bildet, und der gefunden wird, wenn man in

*) Prismen im krystallographischen Sinne des Wortes lassen sich nie vollständig darstellen, es ist nur möglich Stücke von ihnen zu modelliren oder zu zeichnen. Sie werden daher hier und in den folgenden Paragraphen, wo von ihnen die Rede ist, im mathematischen Sinne des Wortes genommen, d. h. mit einer sogenannten Grundfläche versehen gedacht. Unter dieser Voraussetzung erscheinen alle verticalen und schiefen Prismen vom krystallographischen Standpuncte beurtheilt als Combinationen einer Gestalt von unendlich grosser Hauptaxe (den Seitenflächen) mit einer Grundgestalt von unendlich kleiner Hauptaxe (den Grundflächen des mathematischen Prismas). Die Figur der Grundfläche hängt natürlich von der Anzahl, der Beschaffenheit und von der Neigung der Seitenflächen gegen einander ab, sowie im Hohlmodelle die Grösse der Kantenwinkel des Prismas durch die ebenen Winkel der Grundfläche fixirt wird; daher wurde bei verticalen oder schiefen Prismen auch die Zeichnung der Fläche der Grundgestalt von unendlich kleiner Axe beigefügt, womit dasselbe combinirt ist.

HORZNT (Fig. 10) die Seiten in *G*, *G* . . . halbirt, und die Halbirungspuncte durch gerade Linien verbindet.

Den Beweis liefert die Ableitung und zum Theil schon die aufmerksame Betrachtung eines Rhomboeders, die entnehmen lässt, dass der Querschnitt das in die horizontale Projection eines Rhomboeders eingeschriebene Sechseck ist, um dessen Seiten sich die Flächen des Rhomboeders bei dem Wachsen der Hauptaxe drehen.

Zeichnung der Flächen von gleichkantigen sechsseitigen Pyramiden, ihrer Grenzen und Hälften.

§. 22.

Um die Flächen einer bestimmten gleichkantigen sechsseitigen Pyramide zu finden, construire man ein gleichschenkliches Dreieck, dessen Grundlinie gleich ist der Seite der horizontalen Projection, und dessen Schenkel gleich sind der Axenkante desjenigen Rhomboeders, aus dem sie entstanden ist, und es wird dieses Dreieck die verlangte Fläche sein. — Gesetzt es sollte die Fläche von **P** gezeichnet werden; man mache obiger Regel gemäss *a b* (Fig. 13) $= HO$ (Fig. 10), beschreibe mit dem Halbmesser AC (Fig. 11) um *a* und *b* Kreise, die sich in *c* schneiden, und verbinde *c* mit *a* und *b* durch gerade Linien, so gibt das entstehende Dreieck *a b c* die Fläche von **P**.

Denn die Flächen der gleichkantigen sechsseitigen Pyramiden sind gleichschenkliche Dreiecke, deren Grundlinien die Kanten an der Basis bilden, die, weil sie horizontal liegen, zugleich die horizontale Projection derselben sind. Nun wird aber bei allen Gestalten des rhomboedrischen Systemes die Seite der horizontalen Projection als Einheit angenommen, und ist daher auch in der Zeichnung für alle gleich gross zu nehmen. Die Ableitung lehrt ferner, dass unter dieser Voraussetzung jede gleichkantige sechsseitige Pyramide mit ihrem respectiven Grundrhomboeder Lage und Länge der Axenkante gemein hat; die angegebene Methode der Zeichnung ist daher richtig, und desshalb musste für die Fläche von **P** $ab = HO$ und $ac = bc = AC$ genommen werden.

§. 23.

Die Fläche von $\mathbf{P}+\infty$ ist ein Rechteck von beliebiger Höhe, dessen Grundlinie gleich ist der Seite der horizontalen Projection *HO* (Fig. 10), und die horizontale Projection selbst bildet die Grundfläche eines begrenzten Stückes von diesem Prisma.

Folgt unmittelbar aus der Ableitung.

§. 24.

Um die Fläche von $\frac{r}{r}\frac{P}{2}$ oder $\frac{l}{l}\frac{P}{2}$ zu finden, verlängere man in *HORZNT* (Fig. 10) die abwechselnden Seiten *OR*, *HT*, *NZ*, bis sie sich in den Puncten α, β und γ schneiden; man verlängere dann *ab* (Fig. 13) zu beiden Seiten gleichweit, bis $de = \alpha\beta$, und verbinde *c* mit *d* und *e*, so ist *cde* die gesuchte Fläche.

Die Fläche von $\frac{P+\infty}{2}$ ist ein Rechteck von beliebiger Höhe, dessen Grundlinie gleich $\alpha\beta$, und für ein Mittelstück dieses Prismas gibt $\alpha\beta\gamma$ die Grundfläche.

Da diese Hälfte entsteht, indem die abwechselnden Flächen an der obern Spitze von **P** und die gegen sie geneigten an der untern vergrössert werden, so bleibt $ab = OR$ als eine Kante, die zwei zu vergrössernden Flächen angehört, hinsichtlich ihrer Lage und Grösse unverändert, wird jedoch, indem die Flächen sich erweitern, selbst verlängert. Diess gilt auch von den beiden anderen Kanten an der Basis, nämlich von *HT* und *NZ*. Dass diese Kanten hinreichend verlängert sich durchschneiden werden, dass ihre Durchschnittspuncte α, β und γ zugleich die Winkelpuncte eines gleichseitigen Dreieckes (der Basis dieser Hälfte) sind, dass $\beta O = R\alpha = \alpha Z \ldots$ mithin auch *ab* zu beiden Seiten gleichweit verlängert werden musste, folgt daraus, weil sie die abwechselnden Seiten eines regelmässigen Sechseckes sind. Da nun die Axenkanten dieser Hälfte die Winkelpuncte der Basis mit dem Endpunct der Hauptaxe verbinden, der unverändert bleibt (daher auch *c* unverändert), so müssen *cd* und *ce* die Axenkanten, und folglich *cde* die gesuchte Fläche sein. Hiedurch ist auch die Richtigkeit der Angabe für $\frac{P+\infty}{2}$ bewiesen.

§. 25.

Um die Fläche von $\frac{r}{l}\frac{P}{2}$ oder $\frac{l}{r}\frac{P}{2}$ zu erhalten, ziehe man von *a* (Fig. 13) parallel zu *ce* eine Linie, welche die *cd* in *f* schneidet, und von *b* parallel zu *cd* eine zweite Linie, die mit *ce* in *g*, und mit der verlängerten *fa* in *h* zusammentrifft. *cfhg* ist die gesuchte Fläche.

Auch um diese Hälfte zu erhalten, werden drei abwechselnde Flächen an der obern Spitze von **P** vergrössert, folglich müssen die durch den gegenseitigen Durchschnitt der zu vergrössernden Flächen entstehenden Axenkanten dieselbe Lage und Grösse haben, wie bei $\frac{r}{r}\frac{P}{2}$ oder $\frac{l}{l}\frac{P}{2}$, und ihre Richtung wird daher durch die Linien *cd* und *ce* angedeutet. An der unteren Spitze hingegen werden die zu den oberen parallelen Flächen vergrössert; durch dieses Verfahren gelangt jede Fläche der einen Spitze mit zwei Flächen der anderen in einer Kante zum Durchschnitt, welche durch je einen Winkelpunct der Basis von **P**, als einen ihnen gemeinschaftlichen Punct hindurchgeht. Die Flächen dieser Hälften sind aber Rhomben; da nun von diesen zwei Seiten, nämlich die beiden Axenkanten der Lage und Richtung nach nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkel durch *cd* und *ce* gegeben, und von den beiden anderen Seiten je ein Punct, nämlich *a* und *b* bekannt sind, so braucht man nur durch *a* eine parallele Linie zu *ce*, und durch *b* eine solche zu *cd* zu ziehen, um den Rhombus zu vollenden. Die Richtigkeit des Verfahrens ist daher gerechtfertiget.

Zeichnung der Flächen von ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden, ihrer Grenzen und Hälften.

§. 26.

Die Fläche einer bestimmten ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide wird auf folgende Art gefunden: Man zeichne den Hauptschnitt desjenigen Rhomboeders, aus dem die ungleichkantige sechsseitige Pyramide abgeleitet wurde, verlängere die darin liegende rhomboedrische Axe beiderseits so weit, als die Ableitungszahl **m** es verlangt, verbinde den oberen und unteren Endpunct der verlängerten Axe mit einem Seiteneck im Hauptschnitte des Rhomboeders durch gerade Linien, und beschreibe mit diesen beiden Verbindungslinien und mit der Seitenkante des Rhomboeders, aus dem die Pyramide entstanden, ein Dreieck, so ist die Aufgabe gelöst. — Für den speciellen Fall, dass die Fläche der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide $(\mathbf{P})^2$ zu zeichnen wäre, muss daher, weil $\mathbf{n}=0$, der Hauptschnitt von **R** gezeichnet werden. Gesetzt es sei $ABXC$ (Fig. 11) dieser Hauptschnitt. Da AX die rhomboedrische Axe desselben und im gegebenen Falle $\mathbf{m}=2$ ist, so verlängere man ferner AX beiderseits dergestalt, dass $A'X'=2\,AX$ wird, was man erreicht, wenn man $AA'=MA$, und $XX'=MX$ macht, verbinde A' und X' mit B durch gerade Linien, und beschreibe mit ab (Fig. 14) $=AC$, $ac=BA'$, und $cb=BX'$ das Dreieck abc, so wird dieses die Fläche von $(\mathbf{P})^2$ sein.

Der Hauptschnitt desjenigen Rhomboeders, aus dem die ungleichkantige sechsseitige Pyramide abgeleitet wurde, ist erforderlich, weil jede ungleichkantige sechsseitige Pyramide mit ihrem Rhomboeder die Länge und Lage der Seitenkanten und die Seitenecken gemein hat. Nun sind aber am Rhomboeder Axen- und Seitenkanten gleichlang, folglich wird durch die kürzere Seite des Hauptschnittes vom Rhomboeder auch die Länge der Seitenkante der daraus abgeleiteten ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide gegeben, somit ist bereits eine von den Seiten der zu construirenden Fläche bekannt. (Desshalb wurde im speciellen Falle $ab = AC$ genommen.) Da ferner im Hauptschnitt des Rhomboeders auch die rhomboedrische Axe desselben liegt, welche zu Folge der Ableitungsmethode der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden sich beiderseits gleichmässig verlängert, so braucht man nur diese rhomboedrische Axe wirklich der Ableitungszahl $\mathbf{m}$ gemäss zu verlängern, um den oberen und unteren Endpunct der Pyramidenaxe zu erhalten. (Daher wurde im speciellen Falle, wo $\mathbf{m} = 2$, $A'X' = 2AX$ gemacht.) Da endlich an jeder ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide zweierlei Axenkanten vorkommen, von denen die stumpferen die unteren Seitenecken mit der oberen Spitze, oder die oberen Seitenecken mit der unteren Spitze verbinden, während die schärferen die oberen Seitenecken mit der oberen Spitze, oder die unteren mit der unteren Spitze vereinigen, so braucht man nur das eine der im Hauptschnitte des Rhomboeders gegebenen Seitenecken, — die wie schon früher bemerkt auch die Seitenecken der daraus abgeleiteten ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide sind, — mit dem oberen und unteren Endpunct der verlängerten rhomboedrischen Axe zu verbinden, um die Länge dieser zwei verschiedenen Axenkanten zu erhalten. Man weiss also auf diese Art alle drei Seiten des zu zeichnenden Dreieckes, und kann daher mit ihnen die Fläche einer gegebenen ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide construiren, w. z. b. w. (Aus diesen Gründen wurde im speciellen Falle *BA'* und *BX'* gezogen, und mit *AC*, *BA'* und *BX'* das Dreieck *abc* (Fig. 14) d. i. die Fläche von $(\mathbf{P})^2$ gebildet.)

§. 27.

Die Fläche von $(\mathbf{P}+\infty)'''$ ist ein Rechteck von beliebiger Höhe, dessen Grundlinie gleich einer Seite des Querschnittes derjenigen Reihe der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden, zu der es gehört, und dieser Querschnitt bildet auch die Grundflächen eines begrenzten Stückes von $(\mathbf{P}+\infty)'''$. Um diesen Querschnitt z. B. für $(\mathbf{P})^2$ zu finden, verfahre man auf folgende Art: Man zeichne zuerst die horizontale Projection dieser Pyramide *HORZNT* (Fig. 15) gleich jener des Rhomboeders, aus dem sie entstanden ist, halbire die Seiten derselben in *G*, *G* . . und ziehe die Diagonalen *HZ*, *ON* und *RT*. Dann verlängere man *MD* (Fig. 11) über *M*, bis sie die *A'B* in *F* schneidet, übertrage die Länge der Linie *FM* auf die Diagonalen der horizontalen Projection, so dass *FM* (Fig. 15) = *FM* (Fig. 11), und verbinde nun die benachbarten Puncte *F* und *G* durch gerade Linien, so ist das entstehende ungleichwinklige aber gleichseitige Zwölfeck der Querschnitt von $(\mathbf{P})^2$, und *FG* eine Seite desselben.

Warum die Grundlinie des zu zeichnenden Rechteckes der Querschnittsseite derjenigen Reihe von ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden gleich sein müsse, zu der das Prisma gehört, folgt einfach daraus, weil alle nach einerlei **m** abgeleitete ungleichkantige sechsseitige Pyramiden gleichen Querschnitt haben, und weil eben nur solche Pyramiden Glieder einer und derselben Reihe bilden. Was nun die Auffindung des Querschnittes von $(\mathbf{P})^2$ betrifft, so wird die Richtigkeit der Methode aus folgender Betrachtung einleuchtend. Der Querschnitt jeder ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide ist wie bekannt ein gleichseitiges aber abwechselnd ungleichwinkliches Zwölfeck, in welchem sich je zwei benachbarte ungleichlange Diagonalen unter Winkeln von 30^0 schneiden. Dass aber durch die Kenntniss der Länge dieser Diagonalen die Figur des Querschnittes selbst bestimmt ist, unterliegt keinem Zweifel. Die Länge der einen Art dieser Diagonalen ist jedoch für alle ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden von gleicher horizontaler Projection eine constante Grösse, weil unter dieser Voraussetzung die vom Halbirungspunct der Seitenkanten zum Mittelpunct der Gestalt gezogenen Linien *GM*, *GM* ... in allen diesen Pyramiden gleich lang sind. Die Puncte *G*, *G* ... des Querschnittes sind also constant und durch die Halbirungspuncte der projicirten Seitenkanten gegeben. Die zwischen zwei Linien *GM* liegenden Diagonalen sind aber, wie die Ableitung lehrt, variable Grössen, hängen von $\mathfrak{m}$ ab, werden desto länger, je grösser $\mathfrak{m}$ wird, und umgekehrt; sie gehen durch die stumpfen Axenkanten der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden und liegen in der Ebene des Hauptschnittes derselben. Zieht man daher von *M* (Fig. 11) senkrecht auf die rhomboedrische Axe eine Linie, und verlängert man dieselbe, bis sie die *A'B* in *F* schneidet, so muss *MF* diese Diagonale für $(\mathbf{P})^2$ sein. Da nun FM (Fig. 15) $= FM$ (Fig. 11) gemacht wurde, und die *MG* sich damit wirklich unter Winkeln von 30^0 schneidet, so sind die Puncte *F*, *F*, ... die zweiten Winkelpuncte des Querschnittes von $(\mathbf{P})^2$, und man braucht daher nur die Puncte *F* und *G* zu verbinden, um die Seite des fraglichen Querschnittes oder durch Vereinigung aller zwölf Puncte den Querschnitt selbst zu erhalten.

§. 28.

Um die Fläche von $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{l}}\frac{(\mathbf{P})^2}{2}$ oder $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}\frac{(\mathbf{P})^2}{2}$ zu finden, verlängere man im Querschnitte *FGFG* .... (Fig. 15) jede vierte Seite, bis sich dieselben gegenseitig in den Puncten α, β und γ schneiden, übertrage *BF* (Fig. 11) auf *ac* (Fig. 14) von *a* aus, so dass $BF = af$, halbire *a b* in *g*, ziehe *fg*, verlängere dieselbe nach beiden Seiten, mache $fe = F\beta$ und $gd = G\alpha$, ziehe *c e* und *c d*, und lege endlich durch *a* eine zu *c d*, und durch *b* eine zu *c e* parallele Linie, von denen die erstere die *c e* in *h*, die letztere aber die *c d* in *i* und die *a h* in *k* schneidet. Der auf diese Art entstehende Rhombus *c h k i* wird die gesuchte Fläche sein.

Dem Zerlegungsverfahren zu Folge sind drei abwechselnde Flächen an einer Spitze zu vergrössern; da nun im Querschnitte je zwei in einem Punct F sich schneidende Linien zu Flächen der oberen Spitze gehören, die nächsten zwei zu solchen der unteren Spitze u. s. w., so begreift es sich von selbst, dass durch Verlängerung jeder vierten Seite des Querschnittes wirklich die zu abwechselnden Flächen einer und derselben Spitze gehörigen Seiten erweitert werden. Die Durchschnittspuncte derselben α, β und γ bestimmen aber in Verbindung mit dem Endpunct der rhomboedrischen Axe a die Richtung der Axenkanten dieser Hälfte, da alle drei zu vergrössernden Flächen diesen Punct a, und je zwei derselben einen der Puncte α, β oder γ gemein haben. Weil nun die Identität der Linie de (Fig. 14) mit $\alpha\beta$ (Fig. 15) aus der Art ihres Entstehens hervorgeht, so muss durch cd und ce die Richtung der Axenkante dieser fraglichen Hälfte angedeutet werden. Das Zerlegungsverfahren verlangt aber ferner, es sollen an der untern Spitze die zu den oberen parallelen Flächen vergrössert werden, daher sind a und b Puncte, die zugleich einer oberen und einer unteren zu vergrössernden Fläche angehören, und folglich muss durch sie eine Seitenkante der Hälfte hindurchgehen. Da nun die Flächen dieser Hälften Rhomben sind, folglich die Seitenkanten gleich und parallel mit den Axenkanten haben, so ist die Richtigkeit des Verfahrens bewiesen.

§. 29.

Um die Fläche von $\mathbf{r}\frac{(P)^2}{2}$ oder $\mathbf{l}\frac{(P)^2}{2}$ zu finden, verlängere man ab (Fig. 14) über b hinaus, bis sie die cd in l schneidet, dann über a, bis $am = bl$ wird. Macht man nun $cn = cl$, und verbindet m und n durch die gerade Linie mn, so ist $clmn$ die verlangte Fläche.

Weil auch diese Hälften entstehen, indem drei abwechselnde Flächen an einer Spitze vergrössert werden, so wird durch cd und ce eben so gut die Richtung ihrer Axenkanten angedeutet, wie in den nach dem früheren Zerlegungsverfahren entstandenen. Das Zerlegungsverfahren fordert aber ferner, dass an der andern Spitze die gegen sie geneigten Flächen vergrössert werden sollen, folglich bleibt ab als eine Kante, die zweien zu vergrössernden Flächen angehört, hinsichtlich ihrer Lage und Grösse unverändert, muss sich aber verlängern. Verlängert man sie daher wirklich über b hinaus, bis sie die cd in l schneidet, so gibt cl nicht nur die Länge der Axenkante dieser Hälfte, sondern *bl* zeigt zugleich an, wie weit *ab* über *a* hinaus verlängert werden müsse; denn der Punct *a* ist für eine an der unteren Spitze von $(\mathbf{P})^2$ gelegene Fläche das, was *b* für die Fläche *abc* ist (wenn nämlich die Fläche *abc* zur oberen Spitze gehört) und umgekehrt. Das übrige Verfahren findet seine Rechtfertigung in der Beschaffenheit der Flächen dieser Hälften, welche Trapezoide sind, in denen jene Seiten, welche die Axenkanten bilden, gleich sind.

War *clmn* die Fläche von $\mathbf{r}\frac{(\mathbf{P})^2}{2}$, so findet man die von $\mathbf{l}\frac{(\mathbf{P})^2}{2}$, wenn man den Punct *b* auf die entgegengesetzte Seite der *ca* verlegt, im Uebrigen aber ganz so wie bei $\mathbf{r}\frac{(\mathbf{P})^2}{2}$ verfährt.

Zeichnung der Flächen von Rhomboedern, gleich- und ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden der Nebenreihen.

§. 30.

Um die Fläche von $\frac{a}{b}\mathbf{R}\pm\mathbf{n}$ auffinden zu können, muss entweder $\frac{a}{b}$ und $\mathbf{n}$, oder diejenige ungleichkantige sechsseitige Pyramide bekannt sein, woraus dieses Glied der Nebenreihe abgeleitet wurde. Für den ersten Fall zeichne man zuerst die Axe von $\mathbf{R}\pm\mathbf{n}$, verkürze oder verlängere sie, wie $\frac{a}{b}$ es verlangt, und verfahre dann mit der so gefundenen Axe dieses Gliedes einer Nebenreihe wie §§. 19 und 20 lehrten. Im zweiten Falle betrachte man diejenige Axenkante der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide, in welcher dieses Glied der Nebenreihe erscheint, als geneigte Diagonale, die Seite des in die horizontale Projection eingeschriebenen regulären Dreieckes aber als horizontale Diagonale der zu construirenden Fläche, und bilde aus diesen beiden Linien den Regeln der Geometrie gemäss einen Rhombus, der die verlangte Fläche sein wird.

Um die Flächen von $\frac{a}{b}\mathbf{P}\pm\mathbf{n}$ oder $(\frac{a}{b}\mathbf{P}\pm\mathbf{n})^m$ zu finden, ist zuerst die Axe und der Hauptschnitt von $(\frac{a}{b}\mathbf{R}\pm\mathbf{n})$

darzustellen, dann aber nach den in §§. 22 und 26 angegebenen Regeln zu verfahren.

Die Richtigkeit der ersten Methode zur Auffindung der Fläche von $\frac{a}{b}\mathbf{R}\pm\mathbf{n}$ ergibt sich aus der Bedeutung des Coefficienten von selbst, und es ist daher auch in Bezug auf die Flächen von $\frac{a}{b}\mathbf{P}\pm\mathbf{n}$ und $(\frac{a}{b}\mathbf{P}\pm\mathbf{n})^{m}$ keine weitere Bemerkung nothwendig.

Die zweite Methode ist dadurch gerechtfertigt, dass sich, wie die Ableitung lehrt, entweder die stumpfere (bei paralleler Stellung) oder die schärfere Axenkante (bei verwendeter Stellung) der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide in die geneigte Diagonale von $\frac{a}{b}\mathbf{R}\pm\mathbf{n}$ verwandelt, und dass bei allen Rhomboedern die geneigte Diagonale eine constante Grösse, nämlich gleich $\sqrt{3}$ ist (wenn $HO = 1$, ist $HR = \sqrt{3}$), sobald die Gestalten gleiche horizontale Projection haben. Man kennt also auf diese Art die zwei Diagonalen des zu zeichnenden Rhombus, und kann ihn folglich construiren, w. z. b. w.

Zeichnung der Flächen der Dirhomboeder und ihrer Hälften.

§. 31.

Um die Fläche eines Dirhomboeders zu erhalten zeichne man nach §. 20 die Fläche desjenigen Rhomboeders, aus dem das Dirhomboeder entstanden ist, ziehe darin die Seite des Querschnittes, und verbinde die Endpuncte derselben mit dem am rhomboedrischen Eck liegenden Winkelpunct der Rhomboederfläche. — Für den speciellen Fall, dass die Fläche von 2 (**R**) gefunden werden sollte, halbire man daher cb und db (Fig. 12), verbinde die Halbirungspuncte f und g sowohl untereinander als auch mit a durch gerade Linien, und afg wird die verlangte Fläche sein.

Die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens ergibt sich daraus, weil zu Folge der Entstehungsart der Dirhomboeder der Querschnitt der darin enthaltenen Rhomboeder zur Basis der Dirhomboeder wird, ihre Axenkanten aber von den Winkelpuncten der Basis zu den beiden Spitzen verlaufen, und die rhomboedrische Hauptaxe ihre Länge nicht ändert.

§. 32.

Soll die Fläche von $\frac{r}{r}\frac{2(R)}{2}$ oder $\frac{l}{l}\frac{2(R)}{2}$ gezeichnet werden, so verlängere man *ac*, *ad* und *fg* (Fig. 12), bis sie sich in *m* und *n* schneiden, und es ist *amn* die Fläche dieser Hälfte.

Um aber die Fläche von $\frac{R+\infty}{2}$ zu erhalten, verlängere man die abwechselnden Seiten *GG* (Fig. 10), bis sie sich in $\mu\nu\varrho$ schneiden. Ein beliebig hohes Rechteck über der Grundlinie $\mu\nu$ errichtet, ist die verlangte Fläche, und das gleichseitige Dreieck $\mu\nu\varrho$ wird die Grundfläche eines Mittelstückes von diesem Prisma sein.

Indem abwechselnde Flächen der einen Spitze vergrössert werden, gelangen solche zum Durchschnitt, die einem und demselben Rhomboeder angehören, daher in den ursprünglichen Axenkanten desselben sich schneiden müssen, und folglich ist durch *ac* und *ad* die Richtung der Axenkanten dieser Hälfte gegeben. An der anderen Spitze aber sind hiezu geneigte Flächen zu vergrössern, d. i. Flächen, die dem zweiten Rhomboeder angehören. Letztere schneiden sich aber mit jenen des ersteren in den Kanten an der Basis des Dirhomboeders, die also in der Hälfte ihre ursprüngliche Richtung beibehalten. Man kennt daher die Richtung aller drei Seiten des zu zeichnenden Dreieckes, und braucht folglich diese Seiten nur bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt zu verlängern, um die Aufgabe zu lösen. Hinsichtlich der Flächen von $\frac{R+\infty}{2}$ wird nur bemerkt, dass *GG* (Fig. 10) $=$ *fg* (Fig. 12), und daher auch $\mu\nu = mn$ sein müsse.

Zeichnung der Flächen der Dipyramiden und ihrer Hälften.

§. 33.

Man zeichne zuerst die Fläche der zu Grunde gelegten ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide, es sei z. B. $\mathbf{n} = 0$ und $\mathbf{m} = 2$, daher $2((\mathbf{P}+\mathbf{n})^{\mathbf{m}}) = 2((\mathbf{P})^2)$, so wird *abc* (Fig. 16) diese Fläche sein, ziehe in ihr die Seite des Querschnittes *fg*, und verbinde *c* und *g* durch die gerade Linie *cg*, so ist *cfg* die gesuchte Fläche.

Denn die stumpfere Axenkante von $(\mathbf{P})^2$ wird zu Folge der Entstehungsart der Dipyramiden zur schärferen Axenkante von $2\,((\mathbf{P})^2)$, bleibt also ihrer Lage und Grösse nach unverändert, nur wird sie verkürzt. Die Kante an der Basis von $2\,((\mathbf{P})^2)$ aber ist gleich einer Seite des Querschnittes von $(\mathbf{P})^2$, weil die Basis jeder Dipyramide gleich ist dem Querschnitt derjenigen ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide, aus der sie entstanden ist. Man braucht also nur in der Fläche von $(\mathbf{P})^2$, d. i. abc (Fig. 16), die Seite des Querschnittes fg zu ziehen, um die Kante an der Basis der Dipyramide zu erhalten, und es folgt dann von selbst, dass die Verbindungslinie der Puncte c und g die stumpfere Axenkante der in Rede stehenden Dipyramide, somit cfg die verlangte Fläche sein muss, w. z. b. w.

§. 34.

Um die Flächen von $\frac{r}{r}\,\frac{2((P)^2)}{2}$ oder $\frac{l}{l}\,\frac{2((P)^2)}{2}$ zu finden, verlängere man die abwechselnden Seiten des Querschnittes der zu Grunde gelegten ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide FG, FG ... (Fig. 15), bis sie sich gegenseitig in den Puncten ε, ε . . . schneiden, und verlängere auch fg (Fig. 16) zu beiden Seiten über f und g. Macht man nun fm (Fig. 16) $= F\varepsilon$ (Fig. 15) und $gn = G\varepsilon$, so dass $mn = \varepsilon\varepsilon$ wird, und verbindet die Punkte m und n mit c durch gerade Linien, so ist cmn die gesuchte Fläche.

Die Fläche von $\frac{(P+\infty)^2}{2}$ ist ein Rechteck von beliebiger Höhe über der Grundlinie $\varepsilon\varepsilon$, und für ein Mittelstück dieses Prismas gibt $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$... die Grundfläche.

Denn da abwechselnde Flächen der oberen, und die ihnen parallelen an der unteren Spitze vergrössert werden, so ist fg, d. i. eine Kante an der Basis von $2\,((\mathbf{P})^2)$, auch eine eben solche Kante dieser Hälfte, und wird mithin weder der Lage noch der Grösse, sondern nur der Länge nach geändert. Verlängert man daher diejenigen Seiten des Querschnittes, die den zu vergrössernden Flächen entsprechen, bis sie sich gegenseitig schneiden, so gibt die Entfernung von zwei unmittelbar auf einander folgenden Durchschnittspuncten, nämlich der Puncte ε, ε . . . die Länge einer Kante an der Basis dieser Hälften. Da nun vermöge Construction $mn = \varepsilon\varepsilon$, und da ferner die Winkelpuncte der Basis mit dem Endpunct der Axe durch gerade Linien verbunden die Axenkanten geben, so ist das Verfahren gerechtfertiget.

In Bezug auf $\frac{(\mathbf{P} + \infty)^2}{2}$ wird nur bemerkt, dass dieses Prisma aus den gleichkantigen sechsseitigen Pyramiden ähnlichen Hälften der Dipyramiden entsteht, wenn deren Hauptaxe unendlich gross wird, folglich muss $\varepsilon\,\varepsilon$ eine Querschnittsseite desselben sein.

§. 35.

Um die Fläche von $\mathbf{r}\,\frac{2((\mathbf{P})^2)}{2}$ oder $\mathbf{l}\,\frac{(2(\mathbf{P})^2)}{2}$ zu finden, bezeichne man den Durchschnittspunct der Linien $a\,b$ und $c\,n$ (Fig. 16) mit o, schneide von $c\,m$ ein Stück $c\,p = c\,o$ ab, ziehe $p\,f$, und verlängere sie, bis sie die $a\,b$ in r schneidet; $c\,o\,r\,p$ wird die gesuchte Fläche sein.

Denn weil wieder abwechselnde Flächen der oberen Spitze vergrössert werden müssen, so geben $c\,m$ und $c\,n$ die Richtung der Axenkanten für diese Hälfte ebenso, wie für die vorausgehenden. An der entgegengesetzten Spitze sind aber die geneigten Flächen zu vergrössern; es kommen daher Flächen zum Durchschnitt, die zu einem und demselben $(\mathbf{P})^2$ gehören, und diese müssen sich also gegenseitig in den ursprünglichen Seitenkanten von $(\mathbf{P})^2$ schneiden, und es wird daher durch $a\,b$ die Richtung einer dieser Seitenkanten gegeben sein. Die Linie $a\,b$ schneidet aber die $c\,n$, durch welche die Richtung der Axenkante angezeigt wird, in o. Dem zu Folge muss $c\,o$ die Länge der Axenkante dieser Hälfte sein, und weil die Axenkanten gleich lang sind, so musste $c\,p = c\,o$ gemacht werden. Nun kommt aber an der in Rede stehenden Hälfte noch eine zweite Art von Seitenkanten vor, denn jede Fläche der einen Spitze schneidet sich ja mit zwei Flächen der anderen. Weil nun die erste Art der Seitenkanten durch den Punkt g gegangen ist, so muss nothwendig die zweite Art durch den Punct f gehen, und da p der untere Endpunct der dem f zunächst gelegenen Axenkante der oberen Spitze ist, so muss $p\,f$ die Richtung dieser zweiten Seitenkante sein, die daher nur bis zu ihrem Durchschnitte mit $a\,b$, d. i. bis r verlängert zu werden braucht, um den vierten Winkelpunct dieser Fläche, und somit die gesuchte Fläche selbst zu geben, w. z. b. w.

Gehört die gefundene Fläche zu $\mathbf{r}\,\frac{2((\mathbf{P})^2)}{2}$, so erhält man die dem $\mathbf{l}\,\frac{2((\mathbf{P})^2)}{2}$ entsprechende durch Uebertragung des Punctes b auf die entgegengesetzte Seite der Linie $a\,c$.

Drittes Hauptstück.

Zeichnung der Flächen der Gestalten des pyramidalen Systemes.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 36.

Als Einheit dient die Länge der Kante an der Basis der gleichkantigen vierseitigen Pyramiden. Ist diese gegeben, so wird zur Auffindung der Fläche von **P**, d. i. der Grundgestalt einer bestimmten Krystallreihe noch Ein Datum erforderlich, während für irgend ein $\mathbf{P} \pm \mathbf{n}$ auch **n**, und für $(\mathbf{P} \pm \mathbf{n})^{\mathbf{m}}$ nebst **n** auch **m** bekannt sein muss. Die Auffindung von Flächen der Hälften bestimmter vollflächiger Gestalten setzt letztere als bekannt voraus *).

*) Siehe Anmerkung zu §. 18.

Vorbereitende Constructionen.

§. 37.

Man verzeichne mit BB' (Fig. 17) $= 1$ das Quadrat $BB'BB'$, ziehe die beiden Diagonalen $BB = B'B'$, und ferner durch M, d. i. den Mittelpunct dieses Quadrates die Linien $CC = C'C'$ parallel zu $B'B = BB' = \ldots\ldots$ Ferner ziehe man zwei verticale Linien AX (Fig. 18 u. Fig. 19) gleich der Hauptaxe von **P**, halbire dieselben in M, lege durch M horizontale Linien, mache in diesen die Stücke MB (Fig. 18) $= MB = MB'$ (Fig. 17), und die Stücke MC (Fig. 19) $= MC = MC'$ (Fig. 17); endlich verbinde man die Puncte B und C mit A und X durch gerade Linien, und erzeuge auf diese Art die beiden Rhomben $ABXB$ und $ACXC$. Es wird $BB'BB'$ die Basis von **P**, $BB = B'B'$ die längere prismatische, $CC = C'C'$ die kürzere prismatische Nebenaxe, AX die pyramidale Hauptaxe, $ABXB$ der Hauptschnitt, $ACXC$ ein mit dem letzteren einen Winkel von 45^0 bildender Schnitt, $AB = BX$ eine Axenkante, $B'B = BB'$ eine Kante an der Basis, und endlich AC das Perpendikel auf der Fläche von **P** sein. Die drei Schnitte $BB'BB'$, $ABXB$ und $ACXC$ bilden die Grundlage zur Auffindung der Flächen sämmtlicher Gestalten einer bestimmten pyramidalen Krystallreihe.

Da an jeder gleichkantigen vierseitigen Pyramide die Basis ein Quadrat ist, und die Diagonalen dieses Quadrates zugleich die längeren prismatischen Nebenaxen bilden, von denen die Axenkanten zu den beiden Spitzen ziehen, da ferner die kürzeren prismatischen Nebenaxen die Mittelpuncte der gegenüberliegenden Seitenkanten verbinden, und von diesen Mittelpuncten zu den Spitzen der Pyramide die Perpendikel ihrer Flächen verlaufen, und da endlich die Hauptaxe senkrecht auf der Basis steht, die gleichen Nebenaxen sich unter 90^0, die ungleichen unter 45^0 oder 135^0 schneiden, folglich auch die durch sie und die Hauptaxe gelegten Ebenen denselben Neigungswinkel zu einander haben, so ist, weil $BB' = 1$ und AX als Hauptaxe von **P** angenommen wurde, die Construction der drei

Schnitte, und daher auch die angegebene Bedeutung der Linien für dieses **P** richtig.

Zeichnung der Flächen von gleichkantigen vierseitigen Pyramiden, ihrer Grenzen und Hälften.

§. 38.

Die Fläche von **P** wird erhalten, indem man ab (Fig. 20) $= BB'$ (Fig. 17) macht, um die Puncte a und b mit dem Halbmesser AB (Fig. 18) Kreise beschreibt, und den Durchschnittspunkt c derselben mit a und b durch gerade Linien verbindet.

Soll die Fläche von **P** $\pm$ **n** gezeichnet werden, so verlängere oder verkürze man die Axe von **P** nach den jeweiligen Zeichen und Werth von **n**, und construire mit der so gefundenen Hauptaxe dieser abgeleiteten Pyramide nach §. 37 ihren Hauptschnitt; auf diese Art findet man die Länge ihrer Axenkante. Das weitere Verfahren stimmt mit dem für **P** angegebenen überein.

Die Flächen der gleichkantigen vierseitigen Pyramiden sind gleichschenkliche Dreiecke, deren Grundlinie von der Kante an der Basis, die Schenkel aber von den Axenkanten gebildet werden. Weil nun für **P** $ab = BB'$ und $ac = bc = AB$ gemacht wurde, so ist abc wirklich die Fläche von **P**, und folglich die Methode für die Grundgestalt und für alle unmittelbar daraus abgeleiteten gleichkantigen vierseitigen Pyramiden richtig. Dass für letztere zuerst die Länge ihrer Hauptaxe gefunden werden müsse, ist klar, denn man wäre sonst nicht im Stande, ihren Hauptschnitt zu construiren, und folglich ihre Axenkante zu finden. In welchem Verhältniss aber die Hauptaxe von **P** $\pm$ **n** zu jener von **P** steht, ist aus dem Werth und Zeichen von **n** ersichtlich, und da die Ableitung lehrt, dass die Axen von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern in dieser Reihe sich verhalten wie $1 : \sqrt{2}$, d. i. wie die Seite eines Quadrates zur Diagonale desselben, so unterliegt die Verlängerung oder Verkürzung der Axe von **P**, um daraus jene von **P** $\pm$ **n** zu finden, keiner Schwierigkeit, sondern kann durch eine höchst einfache und allgemein bekannte Construction, nämlich jener eines oder mehrerer Quadrate bewerkstelliget werden.

§. 39.

Die Fläche von **P** $-\infty$ ist die Basis der Grundgestalt, nämlich *BB'BB'* (Fig. 17), welche auch die Grundflächen eines Mittelstückes von **P** $+\infty$ bildet, während die Seitenflächen dieses Prismas beliebig hohe Rechtecke sind, deren Grundlinie gleich *BB'*.

Den Beweis liefert unmittelbar die Ableitung.

§. 40.

Um die Fläche von $\pm \frac{P}{2}$ zu finden, ziehe man von den Winkelpuncten der Fläche von **P**, nämlich von *a*, *b* und *c* (Fig. 20) zu den gegenüberliegenden Seiten parallele Linien, und verlängere sie, bis sie sich gegenseitig in den Puncten *d*, *e* und *f* schneiden; *d e f* wird die gesuchte Fläche sein.

Den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens sehe man in §. 5 nach.

Zeichnung der Flächen von ungleichkantigen achtseitigen Pyramiden, ihrer Grenzen und Hälften.

§. 41.

Gesetzt es sei **n** $= o$ und **m** $= 5$, daher die ungleichkantige achtseitige Pyramide, deren Flächen gezeichnet werden sollen $(\mathbf{P})^5$. Man verlängere *AX* (Fig. 18) beiderseits über *M* dergestalt, dass $MA' = 5\,MA$, und $MX' = 5\,MX$, daher $A'X' = 5\,AX$ wird, und verbinde *A'* mit *B* durch die gerade Linie *A'B*. Dann übertrage man *A'X'* Fig. 18 auf Fig. 19, verlängere *AC* und *MC* über *C*, mache $CD = AC$, und ziehe *A'D*, welche die verlängerte *MC* in *S* schneidet. Ferner verlängere man auch *MC* (Fig. 17), bis *MS* (Fig. 17) $=$ *MS* (Fig. 19) wird, und ziehe *SB*, *SB'*.... Macht man nun *ab* (Fig. 21) $=$ *SB*, beschreibt um *a* mit dem Halbmesser *A'B*, und um *b* mit dem Halbmesser *A'S*

Kreise, die sich in c schneiden, und verbindet c mit a und b durch gerade Linien, so ist abc die gesuchte Fläche.

$A'X'$ musste $= 5\,AX$ gemacht werden, weil $\mathfrak{m} = 5$ ist. Die Bedeutung der verschiedenen Linien in den beiden verticalen Schnitten von **P** (Fig. 18 und Fig. 19) ist aus §. 37 bekannt. Da B der Endpunct einer längeren prismatischen Axe von **P** ist, und diese durch die Ableitung nicht geändert wird, so muss $A'B$ die stumpfere Axenkante von $(\mathbf{P})^5$ sein, denn es wurde $\mathfrak{m} > 1 + \sqrt{2}$ angenommen. Der Ableitung zu Folge müssen die Flächen von **P** in Rhomben verwandelt werden, wenn daraus eine ungleichkantige achtseitige Pyramide entstehen soll; dadurch wird AC die Hälfte der geneigten Diagonale eines solchen Rhombus, und es muss mithin $CD = AC$ gemacht werden, um die ganze geneigte Diagonale AD zu finden. Die von D nach A' gezogene Linie $A'D$ schneidet die in der erweiterten Ebene der Basis von **P** liegende MC in S; mithin wird $A'S$ die schärfere Axenkante, und die von S (Fig. 17) nach B oder B' gezogene Linie SB, SB' ... die Kante an der Basis von $(\mathbf{P})^5$ sein. Um aber diese letztere zu finden, war es nothwendig, den Punct S in Fig. 17 zu bestimmen. Aus diesem Grunde wurde MC (Fig. 17) verlängert, und MS eben so gross wie in Fig. 19 gemacht. Die Richtigkeit des übrigen Verfahrens folgt aus der Construction.

§. 42.

Die Fläche von $(\mathbf{P} + \infty)^5$ ist ein beliebig hohes Rechteck, und die Grundlinie desselben ist gleich BS (Fig. 17). Für ein Mittelstück dieses Prismas gibt die Basis von $(\mathbf{P})^5$, d. i. das gleichseitige aber abwechselnd ungleich winkliche Achteck $BSB'S'$ .... (Fig. 17) die Grundfläche.

Folgt unmittelbar aus der Ableitung.

§. 43.

Die Flächen von $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\frac{(\mathbf{P})^5}{2}$ oder $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{l}}\frac{(\mathbf{P})^5}{2}$ werden gefunden, indem man zuerst (Fig. 17) die abwechselnden Seiten der Basis von $(\mathbf{P})^5$ bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt in den Puncten EE'.. verlängert. Macht man nun de (Fig. 21) $= EE'$, indem man ab über a bis d (so dass $da = EB$) und über b bis e (so dass $be = S'E'$) verlängert, und verbindet d und e mit c, so ist cde die gesuchte Fläche.

Die Fläche von $\frac{(P+\infty)^5}{2}$ ist ein Rechteck von beliebiger Höhe, dessen Grundlinie gleich EE' und die Grundflächen eines Mittelstückes von diesem Prisma sind durch $EE'EE'$ gegeben.

Beweis wie in §. 24.

§. 44.

Um die Fläche von $r\frac{(P)^5}{2}$ oder $l\frac{(P)^5}{2}$ zu finden, verlängere man (Fig. 17) die noch übrigen vier Seiten der Basis von $(P)^5$, bis sie sich in den Puncten F, F' .. schneiden, und ziehe MF, welche die $B'S$ in G schneidet. Dann mache man $A'X'$ (Fig. 22) $= A'X'$ (Fig. 18), errichte vom Mittelpunct M aus eine Senkrechte, übertrage MF und MG auf dieselbe, ziehe $A'F$ und $X'G$, und verlängere letztere, bis sie die $A'F$ in H schneidet. Macht man nun (Fig. 21) $cm = cn = A'H$, zieht am und bn, und verlängert sie, bis sie sich in h schneiden, so ist $cmhn$ die gesuchte Fläche.

Man kann sich diese Hälfte dadurch entstanden denken, dass der untere Theil von $\frac{r}{r}\frac{(P)^5}{2}$ mit dem oberen von $\frac{l}{l}\frac{(P)^5}{2}$ zum Durchschnitte kommt. Ist daher $EE'EE'$ die Basis der ersteren, so muss $FF'FF'$ die Basis der letzteren Gestalt sein, deren Diagonale FF die EE', d. i. die verlängerte $B'S$ in dem Puncte G schneidet. Ueberträgt man nun MF und MG auf $A'X'$ (Fig. 22) und zieht $A'F$ und $X'G$, so stellt erstere die Richtung der Axenkante des oberen Theiles von $\frac{l}{l}\frac{(P)^5}{2}$, letztere hingegen ein Stück der Durchschnittslinie des Hauptschnittes eben genannter Gestalt mit einer Fläche des unteren Theiles von $\frac{r}{r}\frac{(P)^5}{2}$ vor. Wird nun diese Fläche erweitert, so wird sie die $A'F$ in irgend einem Puncte schneiden. Dieser Durchschnittspunct muss aber in der verlängerten $X'G$ liegen; denn diese Fläche hat mit der Ebene des Hauptschnittes von $\frac{l}{l}\frac{(P)^5}{2}$ nur die Linie $X'G$ gemein. Verlängert man daher $X'G$, bis sie die $A'F$ in H schneidet, so ist H dieser Durchschnittspunct, und $A'H$ daher die Länge der Axenkante der zu construirenden Fläche. Die Richtung der Axenkanten aber ist in r oder $l\frac{(P)^5}{2}$ dieselbe wie bei $\frac{r}{r}$ oder $\frac{l}{l}\frac{(P)^5}{2}$, sie wird also durch cd uud ce (Fig. 21) angedeutet. Macht man daher cm und $cn = A'H$, so sind diese zwei Linien die Axenkanten. Da ferner die Seitenkanten von den der Spitze entgegengesetzten Endpuncten der Axenkanten auslaufen, und durch die benachbarten Winkelpuncte der Basis von $(\mathbf{P})^5$ hindurchgehen, erstere aber durch m und n, letztere durch a und b gegeben sind, so braucht man nur die geraden Linien am und bn zu ziehen, und dieselben bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnittspunct h zu verlängern, um die Seitenkanten mh und nh zu finden. Mithin $cmhn$ die verlangte Fläche.

Wie die Fläche von $\mathbf{l}\ \frac{(\mathbf{P})^5}{2}$ erhalten wird, wenn die gefundene $\mathbf{r}\ \frac{(\mathbf{P})^5}{2}$ sein sollte, ist aus §. 29 ersichtlich.

§. 45.

Um die Fläche von $+$ oder $-\ \frac{(\mathbf{P})^5}{2}$ zu erhalten, verlängere man cb (Fig. 21) über b und mh über h, bis sie sich in r schneiden, ferner auch SB' und SB (Fig. 17) bis zu ihrem Durchschnitte in U, und endlich ab (Fig. 21) über a; dann mache man $au = BU$, ziehe uc, und verlängere mr bis sie mit uc in t zusammentrifft. Das so entstehende Dreieck crt wird die verlangte Fläche sein.

Man bekommt obige Hälften der ungleichkantigen achtseitigen Pyramiden durch Vergrösserung der abwechselnden in den schärferen Axenkanten sich schneidenden Paare von Flächen der einen Spitze und der gegen sie geneigten der anderen. Es bleibt somit von $(\mathbf{P})^5$ die schärfere Axenkante cb ihrer Grösse und Lage nach unverändert, nur verlängert sie sich. Dasselbe ist auch der Fall mit mh; denn weil a derjenige Winkelpunct der Fläche von $(\mathbf{P})^5$ ist, der an einem stumpferen Eck der Basis liegt, an welchem also eine Fläche der oberen mit einer der unteren Spitze sich schneidet, so kann die hier entstehende Kante keine andere sein, als die, welche auch am gleichen Punct in $\mathbf{r}$ oder $\mathbf{l}\ \frac{(\mathbf{P})^5}{2}$ vorkommt, die man also entweder schon kennt, oder nach §. 44 finden kann. Man braucht daher nur cb und mh zu verlängern, bis sie sich in r schneiden, und es wird cr die Länge der ursprünglich schärferen Kante von $(\mathbf{P})^5$ in dieser Hälfte angeben, crm aber einer der Winkel des zu zeichnenden Dreieckes sein. Jede zu erweiternde Fläche schneidet sich aber auch mit einer Fläche des anderen Paares derselben Spitze; verlängert man nun SB' und SB bis U, so wird eine von U zur Spitze gezogene Linie die Lage der neuen Kante angeben. Da nun au (Fig. 21) $= BU$ (Fig. 17) gemacht wurde, und c der an der Spitze liegende Winkelpunct ist, der bei der Zerlegung unverändert bleibt, so muss cu die Lage der dritten Seite des fraglichen Dreieckes bezeichnen. Man hat folglich alle drei Seiten ihrer Richtung nach gegeben, und braucht also nur mr bis zu ihrem Durchschnitt mit cu zu verlängern, um die Flächen von $+$ oder $- \frac{(P)^3}{2}$ zu erhalten. Die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens ist somit gerechtfertiget.

Zeichnung der Flächen von gleichkantigen vierseitigen und ungleichkantigen achtseitigen Pyramiden aus Nebenreihen.

§. 46.

Wenn die Fläche von $\frac{a}{b}$ P$\pm$n gefunden werden soll, so müssen entweder $\frac{a}{b}$ und n gegeben sein, oder es muss die ungleichkantige achtseitige Pyramide, aus welcher dieses Glied der Nebenreihe abgeleitet wurde, und ob es sich in paralleler oder diagonaler Stellung befindet, bekannt sein. Im ersten Falle sucht man die Hauptaxe derjenigen gleichkantigen vierseitigen Pyramide, vor welcher der Coefficient steht, und verkürzt oder verlängert sie, je nach der Beschaffenheit des Coefficienten. Mit der so aufgefundenen Hauptaxe dieses Gliedes der Nebenreihe verfahre man aber ganz nach der in §. 38 gegebenen Anleitung. Im zweiten Falle hingegen beschreibe man mit derjenigen Axenkante der ungleichkantigen achtseitigen Pyramide, in welcher die Fläche der vierseitigen als berührende Ebene liegt, und mit jener Diagonale der Basis, die zu dieser Axenkante gehört, ein gleichschenkliches Dreieck dergestalt, dass die in Rede stehende Axenkante das Perpendikel, hingegen jene Diagonale die Grundlinie dieses Dreieckes bildet, und verkleinere dasselbe so weit, bis seine Grundlinie gleich BB' (Fig. 17) $=1$ wird, wo dann die so entstandene Fläche genau diesem Gliede der Nebenreihe bei gleicher Basis mit der Grundgestalt entsprechen wird.

Um die Fläche von $(\frac{a}{b}\mathrm{P}\pm\mathrm{n})'''$ zu finden, hat man zuerst die Axe von $\frac{a}{b}\mathrm{P}\pm\mathrm{n}$ nach obiger Angabe zu zeichnen, dann aber dasselbe Verfahren einzuschlagen, welches in §§. 37 und 41 gelehrt wurde.

Dass die für den ersten Fall angegebene Methode zur Auffindung der Fläche von $\frac{a}{b}\mathrm{P}\pm\mathrm{n}$ und daher auch jener von $(\frac{a}{b}\mathrm{P}\pm\mathrm{n})'''$ richtig ist, folgt aus der Bedeutung der Coefficienten.

Für den zweiten Fall lehrt die Ableitung, dass sich die Axenkante der ungleichkantigen achtseitigen Pyramide in das Perpendikel der Fläche der in ihr als berührende Ebene liegenden gleichkantigen vierseitigen Pyramide verwandelt, und dass die Kante an der Basis dieser neu entstehenden Pyramide entweder den längeren oder kürzeren prismatischen Axen der ungleichkantigen achtseitigen Pyramide gleich ist, je nachdem die berührenden Ebenen in der schärferen oder stumpferen Axenkante liegen. Warum aber die Verkleinerung der Flächen vorgenommen werden muss, ergibt sich aus §. 36. Die Richtigkeit des Verfahrens ist somit bewiesen.

Viertes Hauptstück.

Zeichnung der Flächen von Gestalten aus jenen Systemen, deren Grundgestalt eine ungleichkantige vierseitige Pyramide ist.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 47.

Es ist gleichgiltig, welche Linie der Basis einer hieher gehörigen Grundgestalt als Einheit angenommen wird, nur muss die einmal für einen bestimmten Fall gewählte beibehalten werden. Die Anzahl der zur Zeichnung der Flächen von **P** erforderlichen Stücke hängt von der grösseren oder geringeren Unregelmässigkeit ab, die in einem gewissen dieser Systeme herrscht, und wächst mit derselben. Es müssen ausser der als Einheit angenommenen Grösse im orthotypen Systeme zwei, im hemiorthotypen drei, im hemianorthotypen vier, und im anorthotypen fünf Stücke gegeben sein, um die Aufgabe lösen zu können.

Für wie immer geartete abgeleitete Gestalten wird nebst der Grundgestalt auch noch **n** und **m** als bekannt vorausgesetzt.

Da die Basis der Grundgestalten in diesen Systemen entweder ein Rhombus oder ein Rhomboid ist, also stets ein unregelmässiges Viereck, so kann sie nie durch eine ihrer Linien allein bestimmt werden, sondern es sind zwei oder drei erforderlich, und da keine derselben einen besonderen Vortheil gewährt, so ist ihre Wahl freigestellt. Dass aber die Basis die Einheit liefern müsse, folgt aus der Bedeutung von **n** in krystallographischen Zeichen.

Bezüglich der Menge der erforderlichen Daten halte ich nicht für überflüssig, Nachstehendes zu bemerken. Es sei AX (Fig. 23) die Hauptaxe eines Anorthotypes, BB' die längere, CC'' die kürzere Diagonale desselben, AP das Perpendikel, PM das Mass der Abweichung für beide, PP' jenes für die längere, PP'' das für die kürzere Diagonale, AB, AC ..... die Axenkanten, BC, CB'... die Seitenkanten desselben. Wie bekannt sind sämmtliche Schnitte am Anorthotype Rhomboiden. Zur Kenntniss eines derselben z. B. der Basis $BCB'C'$ sind drei beliebige Stücke erforderlich; wird damit vorschriftsmässig ein Rhomboid construirt, so finden sich alle noch übrigen Winkel, Seiten und Diagonalen von selbst. Man gelangt aber hiedurch auch zur Kenntniss einer Grösse in den Hauptschnitten $ABXB'$ und $ACXC'$. Denn der Hauptschnitt $ABXB'$ hat mit $BCB'C'$ die Diagonale BB' gemein, man braucht folglich zu seiner Bestimmung nur mehr zwei neue Stücke, und kann ihn construiren, sobald diese gegeben sind, kommt aber durch diese Construction gleichzeitig zur Kenntniss einer Grösse von $ACXC''$, da beide Schnitte die AX gemein haben. Da nun für den letzten der genannten Schnitte ein Datum durch $BCB'C'$, nämlich CC'', das andere AX durch $ABXB'$ bereits gegeben sind, so wird nur mehr ein neues für die Construction desselben erforderlich. Die Nothwendigkeit von sechs Daten für das Anorthotyp ist folglich erwiesen. Stellt man sich nun vor, dass in der Basis der gezeichneten Gestalt BB' senkrecht auf CC' stehe, dass also $BCB'C'$ ein Rhombus wird, so kann sie ein Hemianorthotyp vorstellen, und die Basis eines solchen, d. i. ein Rhombus, fordert nur zwei Daten zu seiner Bestimmung, während für die beiden anderen Hauptschnitte dasselbe gilt, was für sie beim Anorthotyp gesagt wurde. Man braucht also für das Hemianorthotyp nur fünf bekannte Grössen. Geht man noch einen Schritt weiter, und nimmt man an, es sei auch $ACXC''$ ein Rhombus, daher die Gestalt ein Hemiorthotyp, so sind beide für ihn nothwendige Grössen in $BCB'C'$ und $ABXB'$ enthalten, es reduzirt sich daher die Anzahl der für ein Hemiorthotyp erforderlichen Daten auf vier. Wird endlich auch $ABXB'$ ein Rhombus und somit die Gestalt ein Orthotyp, so bedarf man für die Basis zwei, für beide Hauptschnitte aber nur ein Datum, und reicht folglich im Ganzen mit drei bekannten Grössen aus.

zeichnen, beschreibe man mit AM, AP' und MP' das Dreieck AMR (Fig. 31), verlängere MP' beiderseits, und schneide $MB' = MB = \frac{1}{2} BB'$ ab, verlängere auch AM über M, so dass $MX = AM = \frac{1}{2} AX$, und vollende den Hauptschnitt durch die Verbindung der Puncte A, B, X und B'. Um endlich den letzten Hauptschnitt zu erhalten, d. i. $ACXC'$, zeichne man vorläufig aus den oben gefundenen Linien AP und PP'' als Katheten das rechtwinkliche Dreieck APP'' (Fig. 32), und verwende dann dessen Hypothenuse AP'' mit AM und MP'' zur Construction des Dreieckes AMP'' (Fig. 33), wodurch man den Winkel erhält, unter dem sich AX und CC' schneiden. Das Rhomboid $ACXC'$ wird hierauf nach dem oben für den zweiten Hauptschnitt gegebenen Verfahen vollendet.

Die Basis eines Hemianorthotypes ist wie bekannt ein Rhombus, und da dessen Diagonalen BB' und CC' gegeben sind, so ist seine Construction keinen weiteren Schwierigkeiten unterworfen. Die zwei anderen Hauptscknitte aber sind Rhomboide, zu deren Construction ausser den zwei gegebenen Diagonalen derselben, noch der von ihnen eingeschlossene Winkel erforderlich ist. Stellt (Fig. 23) ein Hemianorthotyp vor, so sieht man leicht ein, dass der Winkel AMB' für den einen, der Winkel AMC' für den andern Hauptschnitt es sei, der gefunden werden muss. Der eine dieser Winkel liegt aber in dem Dreieck AMP', der andere in AMP'', mithin kann man sie finden, sobald man im Stande ist diese Dreiecke zu construiren. Diess wird möglich sein, sobald es gelingt, AP' für das erste oder AP'' für das zweite dieser Dreiecke zu erhalten, da in jedem die beiden anderen Seiten gegeben sind. Hiezu benöthigt man vor Allem das Parallelogramm $MP'PP''$, dessen Seiten gegeben sind, und die sich unter rechten Winkeln schneiden, um hiedurch MP zu finden, und mit dieser und der halben Hauptaxe das rechtwinkliche Dreieck AMP construiren zu können. Da sich auf diese Weise AP findet, so können auch die rechtwinklichen Dreiecke APP' und APP'' gezeichnet werden (weil AP nun bekannt, $PP' = MP''$ und $PP'' = MP'$ gegeben, und diese Linien die Katheten derselben sind). Das Ergebniss dieser Zeichnung ist die Auffindung ihrer Hypothenusen AP' und AP''. Man hat nun für die Dreiecke AMP' und AMP'' alle drei Seiten, kann sie folglich construiren, findet auf diese Art die Winkel, welche AX mit BB' und CC' bildet, und hat daher für beide Rhomboiden die

Diagonalen und den von ihnen eingeschlossenen Winkel. Das weitere Verfahren bedarf keines Beweises.

Anorthotypes System. Unter der Voraussetzung, dass dieselben Grössen wie beim Hemianorthotype, und dazu auch noch die Schiefe der Diagonalen gegeben wären, construire man zuerst mit MP' und MP'' einen Winkel $P'MP''$ (Fig. 34) gleich der bekannten Schiefe der Diagonalen, bilde daraus das Parallelogramm $MP'PP''$, und ziehe MP. Dann verfahre man genau so, wie oben für das Hemianorthotyp gelehrt wurde.

Da bei jedem Anorthotyp die Basis ein Rhomboid ist, so wird ausser der Länge der Diagonalen zur Construction desselben noch eine dritte Grösse erforderlich, d. i. im gegebenen Falle die Schiefe der Diagonalen. Durch Zeichnung des Parallelogrammes $MP'PP''$ ist man aber nicht nur in der Lage die Basis selbst construiren zu können (denn die MP' und MP'' geben ja den Winkel, unter welchen die beiden Diagonalen sich schneiden, und brauchen folglich beiderseits nur gehörig verlängert zu werden, um die Endpuncte der Diagonalen und hiedurch die Basis daraus zu erhalten), sondern man findet auch MP, welche Linie, wie oben bei dem Hemianorthotyp gezeigt wurde, für die Auffindung der beiden anderen Hauptschnitte von Wichtigkeit wird. — Wem das Auftragen eines Winkels zu unsicher dünkt, der kann aus MP' und MP'' und der Schiefe der Diagonalen, das Dreieck PMP'' berechnen, so MP finden, hierauf das genannte Dreieck zeichnen, und mit Hilfe desselben das Parallelogramm $MP'PP''$ construiren.

Zeichnung der Flächen von ungleichkantigen vierseitigen Pyramiden ähnlichen Querschnittes, ihrer Grenzen, Hälften und Viertel.

§. 49.

Um die Flächen von **P** zu finden, zeichne man zuerst seine drei Hauptschnitte nach §. 50, und construire mit je drei ihrer jedoch in verschiedenen Hauptschnitten liegenden Seiten für ein Orthotyp das Dreieck ABC (Fig. 23) für ein

Hemiorthotyp die Dreiecke ABC und ACB', für ein Hemianorthotyp und Anorthotyp die Dreiecke ABC, $AC'B'$, $AB'C''$ und $AC''B$. Diese Dreiecke werden die verlangten Flächen sein.

Denn bei jeder ungleichkantigen vierseitigen Pyramide sind die Flächen ungleichseitige Dreiecke, und die Seiten derselben auch Seiten der Hauptschnitte. Jede Seite des Dreieckes liegt aber in einem anderen Hauptschnitt. Da ferner an einem Orthotyp alle Flächen gleich sind, während an einem Hemiorthotyp zweierlei, und an einem Hemianorthotyp und Anorthotyp viererlei verschiedene Flächen vorkommen, so ist es klar, dass die Anzahl der zu zeichnenden Flächen von dem Systeme abhängt, wohin die gegebene Gestalt gehört. Um möglichen Irrungen bei Gestalten aus schiefaxigen Systemen vorzubeugen, d. h. um nicht etwa aus den richtig aufgefundenen Seiten unrichtige Dreiecke zu construiren, mache man sich zur Regel, von einem bestimmten Punct der Basis, z. B. von den mit $+$ bezeichneten auszugehen. Man ziehe zuerst eine horizontale Linie gleich jener Seite der Basis, die zwischen $+$ und **r** liegt, schreibe diese Vorzeichen an die beiden Enden der gezogenen Linie, und beschreibe nun über ihr mit jenen Seiten der zwei anderen Hauptschnitte, welche von den mit gleichen Vorzeichen versehenen Puncten der Basis ausgehen, die zur Construction des Dreieckes erforderlichen Kreissegmente dergestalt, dass man die Zirkelspitze stets an jenes Ende der horizontal gezogenen Linie einsetzt, welches mit der durch die Zirkelöffnung abgenommenen Seite des einen oder des anderen Hauptschnittes bezüglich des Vorzeichens übereinstimmt. Man nehme dann die in der Basis mit dem Vorzeichens **r** und — versehene Seite, und schreite so nach und nach über **l** nach $+$ zurück, wobei man stets die für die Construction der ersten Fläche angegebenen Vorschriften befolgt. Auf diese Art wird jeder Fehler sicher vermieden.

Die Flächen von $\mathbf{P \pm n}$ und $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\,\mathbf{P \pm n}$ werden gefunden, indem man zuerst nach Beschaffenheit des **n**, des vor ihn stehenden Zeichens und des Coefficienten die Axe der Grundgestalt verlängert oder verkürzt, dann aber das im §. 50 und 51 für die Grundgestalten aufgestellte Verfahren anwendet, wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass AP, MP, MP' und MP'' in demselben Verhältnisse abnehmen, oder wachsen wie AX.

Die Richtigkeit des Verfahrens folgt unmittelbar aus der Ableitung.

§. 50.

Die Fläche von **P**$-\infty$ ist gleich der Basis der Grundgestalt, und wird folglich nach §. 50 gefunden. Dieselbe Fläche dient auch als Grundfläche eines Mittelstückes von **P**$+\infty$ aus derselben Krystallreihe; die Seitenflächen dieses Prismas aber sind Parallelogramme von beliebiger Höhe, deren Grundlinien mit den analogen Seiten der Basis von **P** gleiche Länge haben, und die im orthotypen System rechtwinklig, in den folgenden aber schiefwinklich sind. Zur Auffindung dieser schiefen Winkel ist folgendes Verfahren einzuschlagen: Man zeichne zuerst die Basis von **P**, z. B. $BCB'C'$ (Fig. 34), und bestimme in ihr den Punct P nach §. 50. Dann ziehe man durch P parallel mit CC' (oder BB') die Linie ST, durch M parallel mit CB' die Linie MR, und wenn Abweichung der Axe in der Ebene beider Diagonalen vorhanden ist, auch durch M parallel mit $C'B'$ die MR'. Ferner ziehe man eine verticale Linie AP (Fig. 35) gleich dem Perpendikel der Grundgestalt, errichte von P aus eine darauf Senkrechte, verlängere dieselbe beiderseits, mache PR und PR' gleich denselben Linien in Fig. 34, und ziehe AR und AR'. Endlich mache man CS (Fig. 36) $= MR$ (Fig. 34) und $C'T$ (Fig. 37) $= MR'$ (Fig. 34), beschreibe um C und C' mit dem Halbmesser AM, d. i. mit der halben Hauptaxe von **P**, um S mit dem Halbmesser AR, und um T mit dem Halbmesser AR' Kreise, und verbinde den Durchschnittspunct D mit C, den Durchschnittspunct F mit C', so ist DCS der bei C liegende Winkel jener Prismenfläche, welche an der Kante CB' erscheint, während $FC'T$ den bei C' liegenden Winkel für die an der Kante $C'B'$ vorkommende Prismenfläche angibt. — Wie nach Auffindung dieser Winkel die fraglichen Prismenflächen zu vollenden sind, ist bekannt.

Zur grösseren Deutlichkeit der Beweisführung stelle Fig. 38 ein Mittelstück von $\mathbf{P}+\infty$ aus dem hemianorthotypen oder anorthotypen Systeme vor, dessen Perpendikel gleich jenem der Grundgestalt. Die übereinstimmende Bezeichnung der verschiedenen Puncte und Linien an dieser Gestalt mit den analogen der vorausgehenden Figuren erklärt ihre Bedeutung hinlänglich. Man wird leicht einsehen, dass das Dreieck $DCS \cong AMR$, denn es ist vermöge Construction $MCSR$ ein Parallelogramm (weil $ST' \parallel CC'$ und $MR \parallel CS$ gezogen wurde), daher $MR \# CS$; ferner ist $AM \# DC$ (weil die Kanten von $\mathbf{P}+\infty$ jederzeit parallel zur Hauptaxe verlaufen, und parallele Linien zwischen parallelen Ebenen, d. i. den beiden Grundflächen des Prismas gleich lang sind). Folglich hat man in beiden Dreiecken zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, und da die Winkelöffnungen bei beiden nach derselben Seite hinsehen, so ist $AR \# DS$. Eben so lässt sich zeigen, dass das Dreieck $AMR' \cong FC'T$, folglich $AR' \# FT$. Die fraglichen Winkel können also durch Construction der Dreiecke AMR und AMR' gefunden werden. In jedem dieser Dreiecke sind zwei Seiten durch die halbe Axe von $\mathbf{P}$, nämlich AM, und durch die in der Basis gezogenen Linien MR und MR' gegeben. Man hat also nur AR und AR' zu suchen; letztere bilden aber die Hypothenusen der bei P rechtwinklichen Dreiecke APR und APR', von denen man die Kathete AP durch das Perpendikel der Grundgestalt gegeben hat, während die andere Kathete PR und PR', durch die Zeichnung der Parallelogramme $MRSC$ und $MR'TC'$ erhalten wird. Man kann also die Hypothenusen AR und AR' finden, und hat folglich alle drei Seiten, welche zur Construction der Dreiecke AMR und AMR' erforderlich sind, also auch die zur Zeichnung der Winkel DCS und $FC'T$ nothwendigen Daten, w. z. b. w. *).

---

*) Aus dem Begriffe eines vierseitigen Prismas, dessen Basis ein Parallelogramm ist, folgt, dass stets $DCB'E = GBC'F$, und $GBCD = FC'B'E$ sein müsse. Ob aber alle vier Flächen gleich sind, hängt von der Lage des Punctes P ab; denn zieht man von M parallel zu CB' und $C'B'$ Linien, welche die TS in R und R' schneiden, so sind PR und PR' gleich, wenn P in BB', hingegen ungleich, wenn P ausser BB' liegt, folglich auch AR ($= DS$) und AR' ($= FT$) und somit die Dreiecke DCS und $FC'T$ im ersten Falle gleich, im letzteren ungleich; daher auch die Winkel bei C und C' auf den Prismenflächen bald gleich bald ungleich. Ersteres findet im hemiorthotypen, Letzteres aber im hemianorthotypen und anorthotypen Systeme Statt.

§. 51.

Um die Flächen von $\frac{P}{2}$ zu erhalten, zeichne man in allen vier hieher gehörigen Systemen zuerst die Fläche von **P**. Dann ziehe man, wenn **P** in das orthotype System gehört, durch die Winkelpuncte seiner Fläche parallel zu den gegenüberliegenden Seiten Linien, bis sie sich gegenseitig schneiden, und das neu entstehende ungleichseitige Dreieck wird die verlangte Fläche sein. Gehört aber **P** in eines der schiefaxigen Systeme, so ist das zuerst gezeichnete Dreieck die Hälfte des zu construirenden Parallelogrammes (und zwar bildet die Kante an der Basis die Grundlinie, jene Axenkante von **P**, die in $\frac{P}{2}$ ihrer Grösse und Lage nach erhalten bleibt, die Seite, und die dritte Axenkante die Diagonale des zu zeichnenden Parallelogrammes); man braucht also nur das Parallelogramm zu vollenden, um für ein Mittelstück von $\frac{P}{2}$ die Seitenflächen zu finden, wozu **P** — ∞ die Grundflächen liefert.

Da $\frac{P}{2}$ im orthotypen Systeme so entsteht, wie im tessularen $\frac{O}{2}$ aus **O**, so wird bezüglich der Beweisführung auf §. 5 verwiesen. Was aber das angegebene Verfahren für die Flächen der Hälften aus schiefaxigen Systemen betrifft, so ist bekannt, dass diese Hälften durch Vergrösserung eines Paares von Flächen der oberen Spitze und des ihnen gleichen Paares der unteren Spitze entstehen. Somit bleibt in $\frac{P}{2}$ jene Axenkante von **P** erhalten, in der zwei zu vergrössernde Flächen der einen Spitze sich schneiden. Da ferner diese Hälften schiefen ungleichkantigen vierseitigen Prismen gleichen, die einerlei Querschnitt mit **P** haben, so müssen die Seitenflächen eines Mittelstückes derselben ungleichwinkliche Parallelogramme sein, in welchen die früher bemerkte Axenkante die Richtung einer Seite angibt, während die Seitenkante der Grundgestalt mit Beibehaltung ihrer Lage und Länge zur Grundlinie derselben wird, und folglich auch der von diesen Linien eingeschlossene Winkel unverändert in die Fläche von $\frac{P}{2}$ übergeht. Man hat also durch die Fläche von

P, die zur Zeichnung des fraglichen Parallelogrammes nothwendigen Grössen gegeben, w. z. b. w. *)

§. 52.

Die im hemianorthotypen und anorthotypen Systeme vorkommenden $\frac{P \pm n}{4}$ und $\frac{P + \infty}{2}$ können als zwei parallele Flächen nur in Combinationen erscheinen, und die Figur ihrer Flächen ist daher von den übrigen in einer bestimmten Combination enthaltenen Gestalten abhängig. Da man gewohnt ist in allen Combinationen aus diesen Systemen die zu einem und demselben $\mathbf{P \pm n}$ gehörigen nicht parallelen Flächen als Viertel zu bezeichnen, so kann jedes $\mathbf{P \pm n}$ als Combination aus $\mathbf{r}\frac{P \pm n}{4} . \mathbf{l}\frac{P \pm n}{4} . - \mathbf{r}\frac{P \pm n}{4} . - \mathbf{l}\frac{P \pm n}{4}$ betrachtet werden, und man hat dadurch, dass man eine der verschiedenen Flächen von $\mathbf{P \pm n}$ nach den früher angegebenen Regeln construirt, die Aufgabe für einen speciellen Fall gelöst, d. h. die Fläche des Viertels von einem Hemianorthotyp oder Anorthotyp, sowie es in einer bestimmten Combination erscheint, gezeichnet. Ebenso kann man das Mittelstück jeder hieher gehörigen Hälfte als eine Combination aus $\mathbf{P} - \infty$ mit zwei Vierteln ansehen, und hat also, indem man jene zeichnet, die Figur der Flächen dieser für einen zweiten speciellen Fall gefunden. Endlich dient das Mittelstück von $\mathbf{P} + \infty$ dieser Systeme als Beispiel einer Combination von $\mathbf{P} - \infty . \mathbf{r}\frac{P + \infty}{2} . \mathbf{l}\frac{P + \infty}{2}$.

---

*) Weil im hemiorthotypen System die zu vergrössernden Flächen einer Spitze gleich sind, so sind es auch die Flächen von $\frac{P}{2}$. Im hemianorthotypen und anorthotypen System dagegen sind diese Flächen ungleich, und folglich muss für jede das entsprechende Parallelogramm besonders gezeichnet werden.

Zeichnung der Flächen von ungleichkantigen vierseitigen Pyramiden unähnlichen Querschnittes zur Grundgestalt, ihrer Grenzen, Hälften und Viertel.

§. 53.

Um die Flächen von $(\mathbf{P} \overset{\smile}{\bar{\pm}} \mathbf{n})^{m}$, $(\mathbf{P} \overset{\smile}{\bar{+}} \infty)^{m}$, $\frac{(\mathbf{P} \overset{\smile}{\bar{\pm}} \mathbf{n})^{m}}{2}$, $\frac{(\mathbf{P} \overset{\smile}{\bar{\pm}} \mathbf{n})^{m}}{4}$ zu erhalten, dividire man jene Diagonale der Grundgestalt, welche im Zeichen ausgedrückt ist, durch **m**, und construire dann mit der so gefundenen neuen Diagonale und mit den übrigen unverändert belassenen Daten von $\mathbf{P} \pm \mathbf{n}$ die fraglichen Flächen genau so, wie dieses in den vorausgehenden Paragrafen für die Glieder aus Reihen von ähnlichem Querschnitt mit der Grundgestalt gelehrt wurde.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Ableitung, welche zeigt, dass, wenn Hauptaxe, längere und kürzere Diagonale an der Grundgestalt sich verhalten wie $a : b : c$, dieses Verhältniss an der zur längeren Diagonale gehörigen ungleichkantigen vierseitigen Pyramide unähnlichen Querschnittes sich in $am : b : cm$, hingegen in der zur kürzeren Diagonale gehörigen in $am : bm : c$ umwandelt. Es ist aber $am : b : cm = a : \frac{b}{m} : c$, und $am : bm : c = a : b : \frac{c}{m}$, folglich das angegebene Verfahren richtig.

§. 54.

Wünscht man die Flächen der hieher gehörigen Combination $(\mathbf{P} \overset{\smile}{\pm} \mathbf{n})^{m} . (\mathbf{P} \bar{\pm} \mathbf{n})^{m}$ zu erhalten, so wende man auf $\mathbf{P} \pm \mathbf{n}$ aus diesen Systemen dasselbe Verfahren an, welches §. 41 gelehrt wurde.

Denn die Ableitung lehrt, dass diese Hilfsgestalt auf gleiche Art entsteht, wie eine ungleichkantige achtseitige Pyramide, und dass sie mit einer solchen Aehnlichkeit hat. Man wird daher auf die angegebene Art die Basis und die übrigen zur Construction der fraglichen Flächen erforderlichen Schnitte finden.

Zeichnung der Flächen von horizontalen Prismen, ihrer Grenzen und Hälften.

§. 55.

Um die Flächen von $\mathbf{Pr}\overset{\smile}{\pm}\mathbf{n}$ zu erhalten, zeichne man die drei Hauptschnitte jener ungleichkantigen vierseitigen Pyramide, aus dem dieses horizontale Prisma entstanden ist, und nehme jenen Hauptschnitt, in welchem die unveränderte Diagonale und die Hauptaxe liegen, als Grundfläche eines Mittelstückes von einem verticalen oder schiefen vierseitigen Prisma an, dessen Seitenflächen genau nach §. 50 gefunden werden, und die zu zeichnenden Flächen des horizontalen Prismas sind.

Von horizontalen Prismen gilt dasselbe, was Anfangs der Anmerkung zu §. 21 gesagt wurde. Mittelstücke von ihnen erscheinen aber als Combinationen, die durch die Zeichen $\mathbf{Pr}\overset{\smile}{\pm}\mathbf{n}\,.\,\mathbf{Pr}\bar{+}\infty$ oder $\mathbf{Pr}\bar{\pm}\mathbf{n}\,.\,\mathbf{Pr}\overset{\smile}{+}\infty$ ausgedrückt werden können. Als solche sind sie nur dadurch von den Combinationen $\mathbf{P}-\infty\,.\,\mathbf{P}+\infty$ zu unterscheiden, dass ihre unendlich lange Axe horizontal liegt, statt vertical oder schief. Bringt man sie also in eine Stellung, wodurch $\mathbf{Pr}\overset{\smile}{+}\infty$ horizontal, also scheinbar zu $\mathbf{P}-\infty$ wird, so haben die Flächen von $\mathbf{Pr}\overset{\smile}{\pm}\mathbf{n}$ das Ansehen der Seitenflächen eines Mittelstückes von $\mathbf{P}+\infty$, und können folglich auf gleiche Weise wie diese gefunden werden.

§. 56.

Sollten die Flächen der Combination $\mathbf{Pr}\overset{\smile}{\pm}\mathbf{n}\,.\,\mathbf{Pr}\bar{\pm}\mathbf{n}$, der sogenannten Hilfsgestalt, gezeichnet werden, so ziehe man durch die Winkelpuncte der Basis von $\mathbf{P}\pm\mathbf{n}$, z. B. $BCB'C'$ (Fig. 39), parallele Linien zu den gegenüberliegenden Diagonalen, und verlängere sie bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, um so das Parallelogramm $HJKL$ zu erhalten. Dann verbinde man die Winkelpuncte dieses Parallelogrammes mit P durch gerade Linien, und construire aus jeder der Linien PH, $PJ\ldots$ als der einen, und aus AP als der anderen Kathete die rechtwinklichen Dreiecke APH, APJ, APK und APL (Fig. 40). Werden nun mit je zwei Hypothenusen dieser Dreiecke und mit je einer der an der Basis der Hilfsgestalt liegenden Seiten, welche von denselben Winkelpuncten wie die zwei Hypothenusen ausgeht, Dreiecke beschrieben, so sind diese die verlangten Flächen der Combination.

Die Entstehungsweise der in Rede stehenden Hilfsgestalt, und dass ihre Flächen Dreiecke sind, ist aus der Ableitung bekannt, folglich auch, dass sie mit derjenigen ungleichkantigen vierseitigen Pyramide, aus der sie entstanden ist, die Spitze, das Perpendikel u. s. w. gemein hat. Die von den Winkelpuncten der Basis zu dem Einfallspuncte des Perpendikels gezogenen Linien HP, $JP\ldots$ bilden mit AP rechte Winkel, daher müssen die von diesen Winkelpuncten zur Spitze verlaufenden Combinationskanten die Hypothenusen von rechtwinklichen Dreiecken sein, in welchen AP bekannt, und HP, $JP\ldots$ durch Einzeichnung dieser Linien in das Parallelogramm $HJKL$ leicht erhalten werden können. Man ist daher im Stande aus diesen Linien als Katheten rechtwinkliche Dreiecke zu construiren, und findet so ihre Hypothenusen, d. i. die Combinationskanten. Da nun die Kanten von $\mathbf{Pr}\breve{\pm}\mathbf{n}$ und $\mathbf{Pr}\bar{\pm}\mathbf{n}$ durch die Seiten des um die Basis der Grundgestalt beschriebenen Parallelogrammes $HJ = KL$ und $JK = LH$ gegeben sind, so kennt man alle drei Seiten der zu zeichnenden Flächen, und kann sie folglich construiren, w. z. b. w. *)

*) Die relative Beschaffenheit der Flächen der Hilfsgestalt hängt von dem System ab, wohin sie gehört. Denn man sieht leicht ein, dass, wenn P auf M zu liegen kommt, die Dreiecke APH, APJ u. s. w. congruent sein müssen; liegt aber P in der Ebene der Diagonale BB' oder CC', so sind nur je zwei dieser Dreiecke congruent, fällt endlich P zwischen beide Diagonalen, wie es in der gezeichneten Figur dargestellt wurde, so sind alle ungleich. Da nun stets $HJ \# LK > JK \# LH$, so sieht man leicht ein, dass im orthotypen System die abwechselnden Flächen der einen Spitze gleich sein werden, während im hemiorthotypen nur jene Flächen der einen Spitze gleich sein können, die parallel zu der Diagonale verlaufen, in welcher die Abweichung liegt, und im hemianorthotypen und anorthotypen endlich alle Flächen einer Spitze ungleich sein müssen.

§. 57.

Die Flächen von $\mathbf{Pr}\breve{+}\infty$ lassen sich gleichfalls nur als integrirende Bestandtheile einer Combination zeichnen, wozu jene gewählt werden soll, die mit $\mathbf{P}-\infty\,.\,\mathbf{Pr}\breve{+}\infty.\ \mathbf{Pr}\bar{+}\infty$ bezeichnet wird, und die zum Theil als ein unmittelbares Resultat der Ableitung betrachtet werden kann, wie die Hilfsgestalt selbst.

Um die Flächen dieser Combination zu erhalten, zeichne man die Basis der Hilfsgestalt, d. i. *HJKL* (Fig. 39), ferner beide Hauptschnitte von $\mathbf{P}+\infty$ aus derselben Krystallreihe, d. i. *BGEB'* und *CDFC'* (Fig. 38), und es wird die gezeichnete Basis die Fläche von $\mathbf{P}-\infty$, der erste Hauptschnitt jene von $\mathbf{Pr}\breve{+}\infty$, und der zweite die von $\mathbf{Pr}\bar{+}\infty$ geben.

Man kann sich diese Combination dadurch entstanden denken, dass die Hauptaxe der Hilfsgestalt unendlich lang wird, in welchem Falle je eine Fläche der oberen Spitze mit jener der unteren zusammenfällt, die mit ihr dieselbe Seitenkante hat. Auf diese Art gewinnt die Gestalt das Ansehen eines verticalen oder schiefen vierseitigen Prismas, und es gilt von ihr dasselbe, was §. 21 über Prismen überhaupt, und §. 50 über solche aus den letzten vier Systemen insbesondere gesagt wurde. Da Prismen mit den endlichen Gliedern der Reihe, die sie begrenzen, den Querschnitt gemein haben, so folgt von selbst, dass *HJKL* die Grundfläche eines Mittelstückes von diesem Prisma, d. i. die Fläche von $\mathbf{P}-\infty$ in der gegebenen Combination sein muss, und dass die Seiten dieses Parallelogrammes zugleich die Grundlinien der Seitenflächen geben. Von den Endpuncten dieser Grundlinien gehen aber die Seitenkanten des Prismas aus, und da parallele Linien zwischen parallelen Ebenen gleich lang sind, und die Winkel, die von parallelen Linien gebildet werden, wenn ihre Oeffnungen einerlei Richtung haben, ebenfalls gleich sind, so gibt *BGEB'* jene Seitenfläche des Prismas, welche in den Puncten *C* und *C'* erscheint, d. i. die Fläche von $\mathbf{Pr}\bar{+}\infty$, *CDFC'* aber die andere, in *BB'* liegende und dem $\mathbf{Pr}\breve{+}\infty$ entsprechende Fläche. Die Construction der Flächen *BGEB'* und *CDFC'* unterliegt aber keinem Anstand, da man bereits durch die Grundgestalt die beiden Hauptschnitte von

P kennt, und folglich nur von den Winkelpuncten derselben parallele Linien zu den gegenüberliegenden Diagonalen zu ziehen braucht, um obige Parallelogramme zu erhalten, deren Beschaffenheit sich übrigens nach den Systemen richtet. Im orthotypen System, wo alle Axen auf einander senkrecht stehen, sind sie Rechtecke, im hemiorthotypen werden nur jene Rechtecke sein, die an den Endpuncten der Diagonale erscheinen, in welcher die Abweichung liegt, die anderen sind Rhomboiden, im hemianorthotypen und anorthotypen aber sind alle Rhomboiden. Es versteht sich übrigens von selbst, dass, weil $BB' > CC'$ angenommen wurde, stets nur die gegenüberliegenden, d. h. zu demselben horizontalen Prisma von unendlich grosser Axe gehörigen Flächen congruent sein können.

§. 58.

Bezüglich der Flächen von $\frac{\mathbf{Pr} \overset{\smile}{\pm} \mathbf{n}}{2}$ gilt dasselbe, was §. 52 über die Viertel der Hemianorthotype und Anorthotype gesagt wurde. Man betrachtet jede Hilfsgestalt aus dem hemiorthotypen System als eine Combination von $\mathbf{Pr} \overset{\smile}{\overline{\pm}} \mathbf{n}$. $\frac{\mathbf{Pr} \overset{\overline{\smile}}{\pm} \mathbf{n}}{2}$. — $\frac{\mathbf{Pr} \overset{\overline{\smile}}{\pm} \mathbf{n}}{2}$, jede aus dem hemianorthotypen und anorthotypen als Combination von $\frac{\mathbf{Pr} \overset{\smile}{\overline{\pm}} \mathbf{n}}{2}$. $\mathbf{r}\,\frac{\mathbf{Pr} \overset{\overline{\smile}}{\pm} \mathbf{n}}{2}$. — $\frac{\mathbf{Pr} \overset{\smile}{\overline{\pm}} \mathbf{n}}{2}$. $\mathbf{l}\,\frac{\mathbf{Pr} \overset{\overline{\smile}}{\pm} \mathbf{n}}{2}$, und hat daher, indem man die Flächen dieser Hilfsgestalten zeichnet, für gewisse specielle Fälle die Flächen von halben horizontalen Prismen construirt.

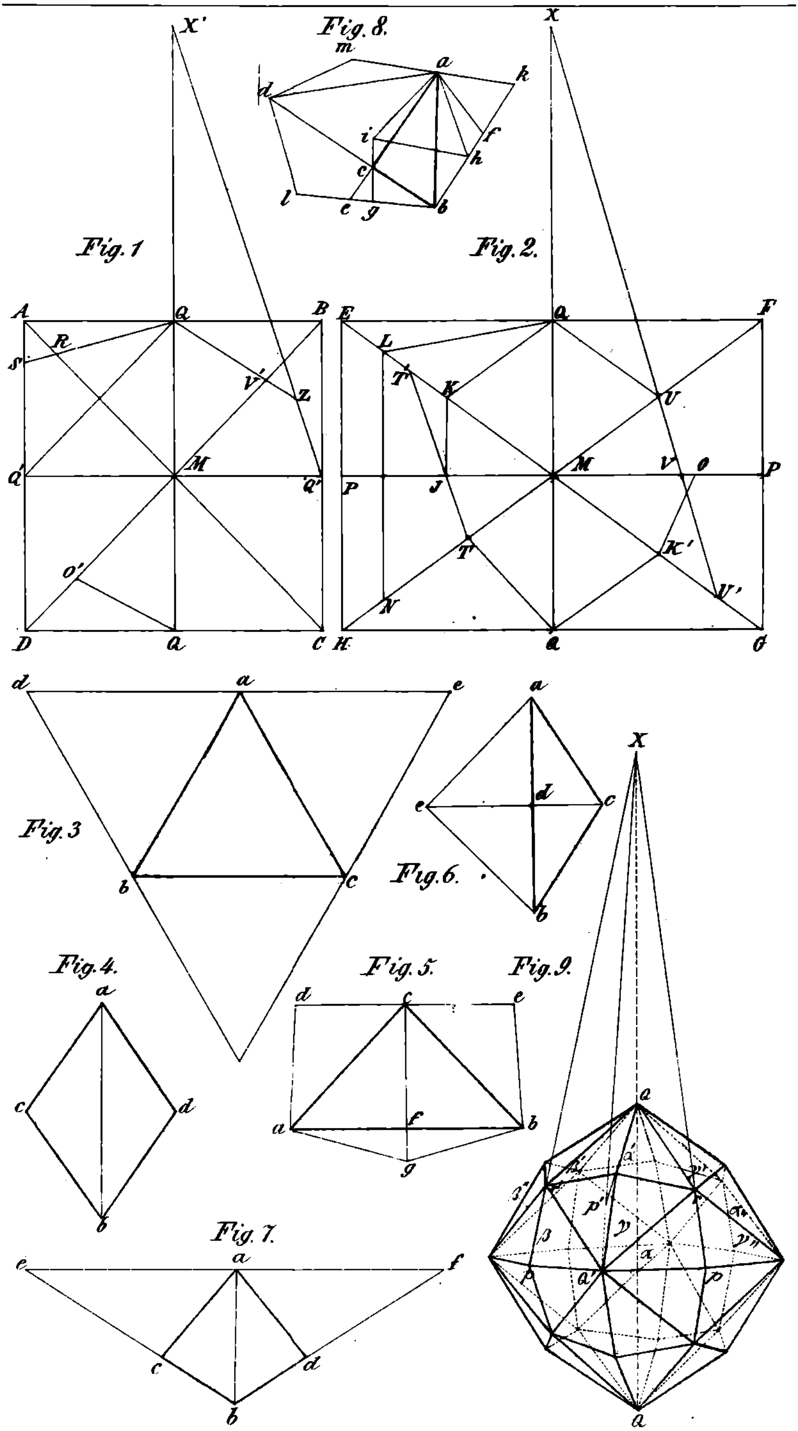
ANHANG.

Uebersichts-Tabelle

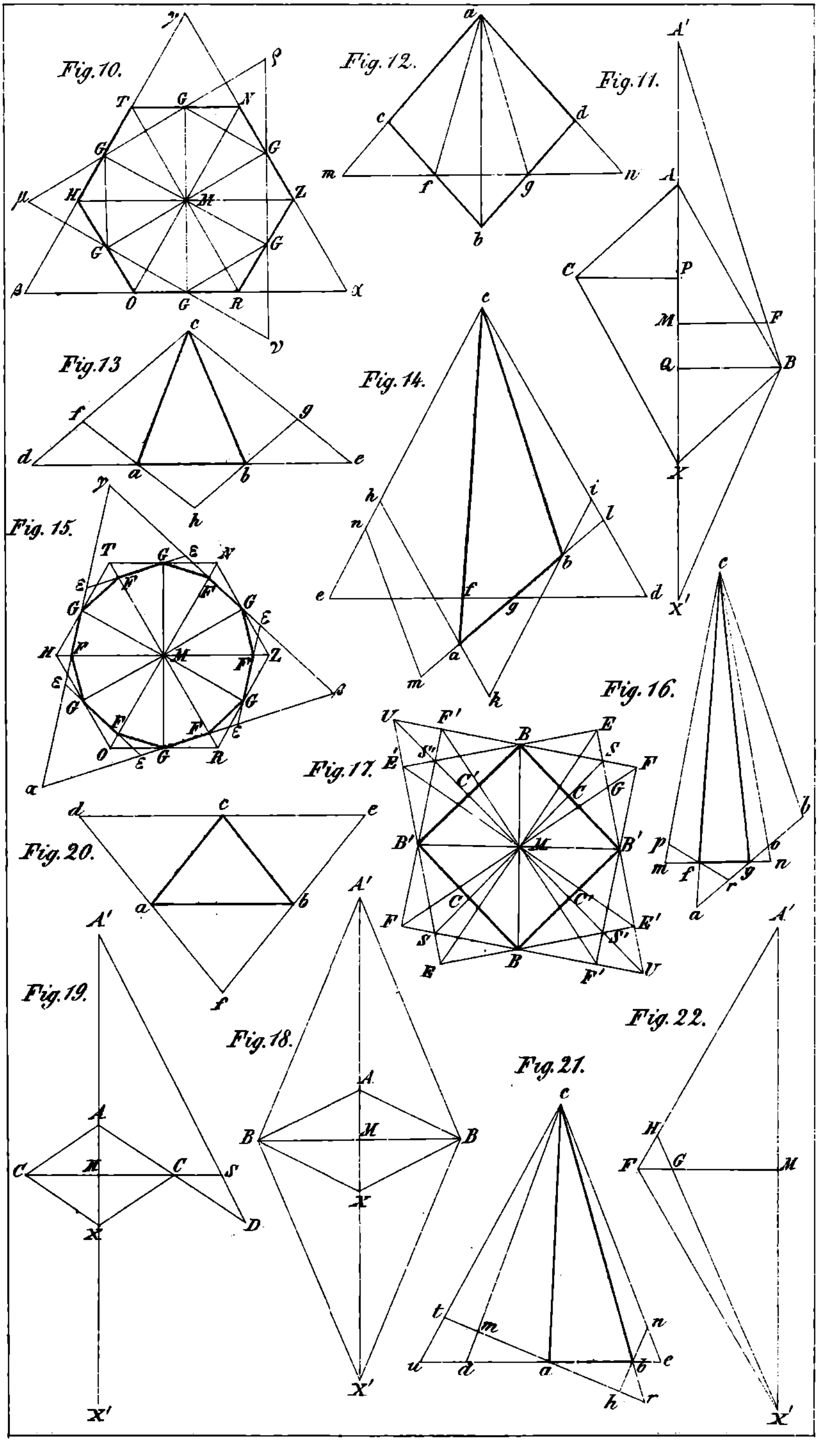
der

ıxenverhältnisse an den bekannteren Varietäten der ollflächigen Gestalten des tessularischen Systemes.

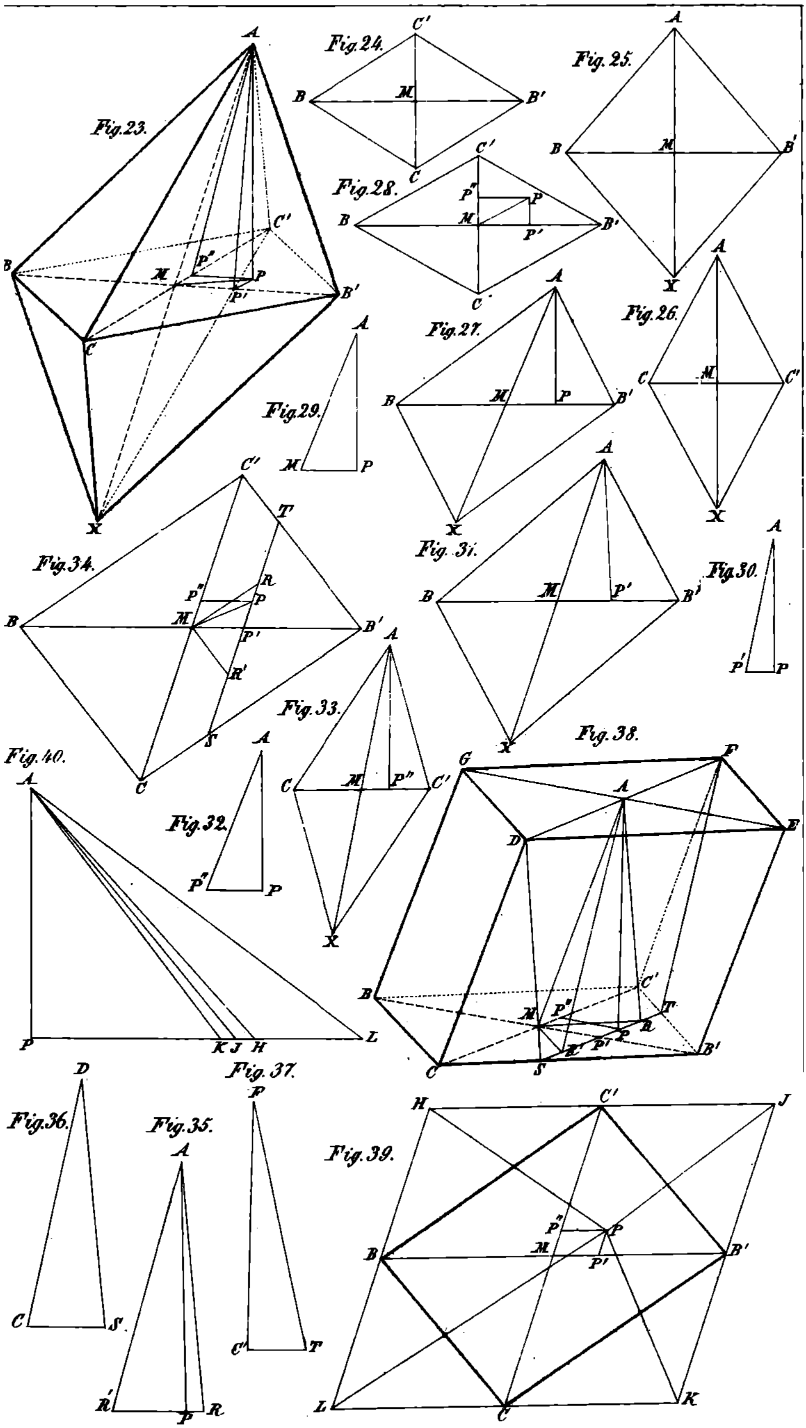
Benennung	Zeichen	Halbe Axen		
		Pyrami-dale	Prismati-sche	Rhomboe-drische
Iexaeder	**H**	1	$1\sqrt{2}$	$1\sqrt{3}$
)ktaeder	**O**	1	$1/2$ . .	$1/3$ . .
Einkantiges Tetragonal-Dodekaeder .	**D**	1	$1/2$ . .	$1/2$ . .
Iexaedrische Trigonal-Ikositetraeder				
Erste Varietät	**A** 1	1	$3/5$ . .	$3/5$ . .
Zweite Varietät	**A** 2	1	$2/3$ . .	$2/3$ . .
Dritte Varietät	**A** 3	1	$3/4$ . .	$3/4$ . .
)ktaedrische Trigonal-Ikositetraeder				
Erste Varietät	**B** 1	1	$1/2$ . .	$2/5$ . .
Zweite Varietät	**B** 2	1	$1/2$ . .	$3/8$ . .
Zweikantige Tetragonal-Ikositetraeder				
Erste Varietät	**C** 1	1	$2/3$ . .	$1/2$ . .
Zweite Varietät	**C** 2	1	$3/4$ . .	$3/5$ . .
Tetrakontaoktaeder				
Erste Varietät . . .	**T** 1	1	$3/5$ . .	$1/2$ . .
Zweite Varietät	**T** 2	1	$5/8$ . .	$5/9$ . .
Dritte Varietät	**T** 3	1	$2/3$ . .	$4/7$ . .



V. S. Aichhorn del. Gedr. b. A. Hartinger. A. Strehl sc.



Dr. Aichhorn del. Gedr. b. A. Hartinger. A. Strehl sc.



Dr. Aichhorn del. Gedr. b. A. Hartinger. A. Strehl sc