Das Schwerkraftfeld der Erde[1]

Von

Franz Ackerl

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. November 1931)

I. Verzeichnis der relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten bis Ende Juli 1931.

II. Darstellung des Schwerkraftfeldes der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung.

Schon zu jener Zeit, da man begann, die Abplattung der Erde aus Schwerkraftmessungen auf Grund des Theorems von Clairaut zu bestimmen, drängte sich die Erkenntnis auf, daß die auf der physischen Erdoberfläche in verschiedenen Meereshöhen beobachteten Schwerebeschleunigungen auf ein und dieselbe Niveaufläche zu beziehen seien.

Wie auch heute noch üblich, beschränkte man sich darauf, die gemessenen Schwerkraftbeschleunigungen auf das Geoid zu reduzieren und dort mit Hilfe der Clairaut'schen Formel weiter zu verarbeiten.

Es ist das Verdienst H. Bruns[2] erstmalig darauf hingewiesen zu haben, daß außer der Reduktion auf das Geoid, auch noch die Übertragung auf jenes Niveausphäroid nötig ist, das den gleichen Arbeitswert besitzt wie das Geoid.

Vernachlässigt man diese Übertragung, den Term von Bruns, reduziert also nur auf das Geoid, dann muß die Wirkung der Oberflächengestaltung der physischen Erde in Erscheinung treten, sobald die theoretische Schwerkraft der Clairaut'schen Formel verglichen wird mit den auf das Geoid bezogenen beobachteten Schwerkraftwerten.

Dieser wichtige Hinweis von Bruns fand keine Beachtung.

Hierin liegt möglicherweise die alleinige Ursache, daß die Unterschiede zwischen den auf das Geoid reduzierten und den aus der Clairaut'schen Formel berechneten Schwerkraftwerten jenen vielerörterten Zusammenhang mit der Land- und Wasserverteilung auf der Erde zeigen.

---

[1] Diese Arbeit kann der hohen Kosten wegen derzeit in dem Umfang, wie sie ursprünglich der Akademie der Wissenschaften in Wien vorgelegt wurde, nicht gedruckt werden. Da die Akademie der Wissenschaften eine Subvention für die vollständige Drucklegung an anderer Stelle in Aussicht gestellt hat, wird hier nur ein kurzer Auszug gegeben.

[2] H. Bruns, Die Figur der Erde. Berlin 1878.

Die Folge der Nichtbeachtung des Terms von Bruns war der Versuch, die störenden Widersprüche durch Hypothesen über die Massenanordnung im Erdinneren zu erklären und durch entsprechend ausgewählte Rechenvorschriften zum Verschwinden zu bringen.

Hopfner hat die Arbeiten H. Bruns weitergeführt und hat hiebei wahrscheinlich gemacht, daß die Ursache der oben erwähnten Schwerkraftstörungen außer in der Vernachlässigung des Terms von Bruns auch noch in den derzeit üblichen Reduktionsverfahren zu suchen sein dürfte.

Die heute gebräuchlichen Reduktionsverfahren liefern nämlich nicht jene Randwerte, die zur Lösung der Frage nach der Figur der Erde benötigt werden.

Bei der Bestimmung der Niveauflächen aus Schwerkraftwerten liegt eine zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie von besonderer Eigenart vor. Die Niveaufläche in Meereshöhe ist wohl über den Ozeanen sehr nahe auch die Berandung des Erdkörpers, verläuft jedoch unter den Festländern im Inneren der Erdmasse.

Die Schwierigkeiten, die diese besondere zweite Randwertaufgabe einer praktischen Behandlung bietet, umgehen nun die gebräuchlichen Reduktionsverfahren dadurch, daß sie teils unbewußt, teils aber auch mit voller Absicht die erwähnte besondere Randwertaufgabe in eine solche für den Außenraum allein verwandeln.

Die formale Lösung der für die Bestimmung des Geoides in Betracht kommenden zweiten Randwertaufgabe, die eine Stellung zwischen den äußeren und inneren Problemen der Potentialtheorie einnimmt, wurde von Hopfner gegeben.[1]

Setzt man die Kräftefunktion der Erde gleich einer gewissen Konstanten, so erhält man die Gleichung des Geoides. Die Ableitungen der Kräftefunktion nach der Normalen in einem Punkte des Geoides ergeben die Schwerkraftbeschleunigung dortselbst.

Sobald man die Kräftefunktion W anschreibt mit

$$W = V + \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2) = \text{konst.},$$

wobei V den Wert des Potentials der Anziehung in den Punkten des Geoids vorstellt, ist die besondere zweite Randwertaufgabe lösbar, wenn die Summe

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu}$$

aus den an der Erdoberfläche ausgeführten Messungen der Schwerkraft berechnet werden kann.

---

[1] F. Hopfner, Die Randwertaufgabe der Geodäsie. Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 27, 1930.

In der obigen Formel bedeutet $\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n}$ die Anziehung der im Außenraum des Geoides liegenden Massen auf den Punkt P am Geoid in der Richtung der äußeren Geoidnormalen. Hingegen stellt vor $\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu}$ die auf P wirkende Anziehung der innerhalb des Geoides befindlichen Massen in der Richtung der inneren Normalen ν von P.

Allgemein ist

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial n} = -g$$

und wenn beachtet wird, daß die Normale n für die Massen im Inneren des Geoides die äußere Normale ist, jedoch für die Massen außerhalb des Geoides als innere Normale gilt, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial V^{(2)}}{\partial n},$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial n}. \tag{1}$$

Setzen wir nun $\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} = b$ und nehmen an, daß im Punkte P' (Seehöhe h) der physischen Erdoberfläche die Schwerebeschleunigung g' beobachtet wurde, so kann $\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu}$ aus g' ermittelt werden.

Wir berechnen vorerst die Schwerkraftbeschleunigung im Punkte P indem wir die im Außenraum des Geoides liegenden Massen entfernen. Hiedurch vermindert sich die Schwerkraft g' in P' um den Betrag b' der Anziehung, mit der die eben entfernten Massen auf P' einwirken. Gleitet P' entlang der Lotlinie bis nach P, so ändert sich die Schwerkraft um $h \frac{\partial g'}{\partial n}$ und wir erhalten

$$g = g' - b' - h \frac{\partial g'}{\partial n}.$$

Berücksichtigt man nun den Einfluß der Fliehkraft, so ergibt sich die reine Anziehung für P in der Richtung n mit:

$$g + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial n} = g' - b' - h \frac{\partial g'}{\partial n} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial n},$$

beziehungsweise in der Richtung ν mit:

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu} = -g' + b' + h\frac{\partial g'}{\partial n} - \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial n}\,.$$

Schließlich findet man

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \nu} = -g' + b' + b + h\frac{\partial g'}{\partial n} - \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial n}$$

oder mit Bezug auf Gleichung (1) neben $\frac{\partial W}{\partial n} = -g$

$$g = g' - (b' + b) - h\frac{\partial g'}{\partial n}. \tag{2}$$

Legt man eine kugelförmige Erde (Radius R) zugrunde, so wird

$$\frac{\partial g'}{\partial n} = -\frac{2g'}{R} \quad \text{oder} \quad -h\frac{\partial g'}{\partial n} = 2\frac{g'}{R}h = \Delta$$

und die Gleichung (2) geht über in die von Prey[1] angegebene Formel

$$g = g' - (b' + b) + \Delta, \tag{3}$$

wobei Δ die Größe der Freiluftreduktion für einen Punkt P' mit der Seehöhe h bedeutet.

Das auf synthetischem Wege gewonnene Reduktionsverfahren von Prey liefert also jene Randwerte am Geoid, die zur Beantwortung der Frage »Erdfigur« benötigt werden.

Damit ist aber zugleich der Beweis erbracht, daß alle anderen heute gebräuchlichen Reduktionsmethoden für eine einwandfreie potentialtheoretische Lösung der Hauptaufgabe der Geodäsie, der Bestimmung des Geoids nicht geeignet sind.

Bei Anwendung der Freiluftreduktion denkt man sich die im Außenraum des Geoides liegenden Massen M in den Innenraum verschoben, wo sie den dort angenommenen Massen-, beziehungsweise Dichtemangel ausgleichen sollen. Der Beobachtungsort P' wird entlang der Lotlinie in die Niveaufläche in Meereshöhe verschoben.

Im Wege der Reduktion nach Bouguer werden die Massen M abgehoben, jedoch nach Verschiebung des Punktes P' auf das Geoid nicht mehr hinzugefügt.

Bei Anwendung der isostatischen Verfahren werden die Massen M abgehoben und, nach Verlegung des Punktes P' auf das Geoid, wieder zugefügt, aber nicht in unveränderter Lagerung, d. h. nicht im Außenraum des Geoides, sondern man vereinigt sie zur Ausgleichung der

---

[1] Prey, Mainka, Tams, Einführung in die Geophysik, Berlin 1922; J. Springer.

im Innenraum angenommenen Massendefekte mit den Massen der Kontinentalsockel nach mehr minder wechselnden Gesichtspunkten. Bezeichnet man die von diesem Massengemisch ausgeübte Anziehung auf den am Geoid liegenden Punkt P mit β, so ist wesentlich, daß $b' > \beta > 0$.

Durch Vergleichung der Schwerkraftwerte

1. Prey: $g_1 = g' + \Delta - (b' + b)$,
3. Bouguer: $g_3 = g' + \Delta - b'$,
4. Isostasie: $g_4 = g' + \Delta - (b' - \beta)$,
2. Freiluft: $g_2 = g' + \Delta$,

erkennt man, daß: $g_1 < g_3 < g_4 < g_2$.

Aus dieser von Hopfner[1] aufgedeckten Beziehung folgt, daß die Verfahren 2, 3 und 4 je nach der Seehöhe der Station auf Niveauflächen verschiedenen Potentialwertes reduzieren, und dies ist ganz besonders bedeutungsvoll, wenn man beachtet, daß durch einen derartigen Vorgang naturgemäß Niveauverlagerungen bedingt werden, die sich durchaus einseitig auswirken. Die Methoden 2, 3 und 4 bezeichnen ihr Ergebnis als die Schwerkraft am Geoid, obwohl offensichtlich stets die Schwerkraftbeschleunigung auf verschiedenen tiefer gelegenen Niveauflächen dargestellt wird. Die einzige Ausnahme ist jener Fall, wo P' am Geoid liegt und alle vier Methoden den gleichen Wert g ergeben.

Die Verlegung dieser Niveauflächen ist abhängig von der Seehöhe der Station und überall dort, wo man die Schwerkraftwerte der Verfahren 2, 3 und 4 zur Bestimmung des Geoides verwendet, wird in Wirklichkeit nie das Geoid G ermittelt, sondern eine Fläche F, die unter den Festländern immer unterhalb der Niveaufläche G in Meereshöhe verläuft.

Tatsächlich ist also F gar keine Niveaufläche, d. h. eine Fläche von konstantem Arbeitswert, denn auf ihr liegen Punkte, die ganz verschiedenen Niveauflächen angehören.

Hieraus erkennen wir in aller Deutlichkeit, daß das Reduktionsverfahren nach Bouguer, die Freiluftreduktion und die isostatischen Reduktionsmethoden jeder potentialtheoretischen Grundlage entbehren.

Die drei Methoden erfüllen nicht den Zweck, zu dem sie erdacht worden sind, und ihre Verwendung muß notgedrungen zu falschen Ergebnissen und Schlüssen führen.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2] wurden die für eine praktische Anwendung des Reduktionsverfahrens von Prey maßgebenden Verhältnisse eingehend geschildert.

---

[1] F. Hopfner, Neue Wege zur Bestimmung der Erdfigur. Ergebnisse der kosmischen Physik, p. 322 ff., Akad. Verl. Ges., Leipzig.

Derselbe, Schwerereduktion und Dreiachsigkeit. Gerl. Beiträge, Bd. 26, 1930.

[2] F. Ackerl, Das Geoid, I (vorbereitende Untersuchungen). Gerl. Beiträge. Bd. 29, 1931.

Alle derzeit verfügbaren Schwerkraftmessungen mittels Pendelapparaten wurden gesammelt und nach dem Verfahren von Prey auf das Geoid reduziert.

Dieser Stationskatalog kann aus den in der ersten Fußnote angegebenen Gründen hier nicht abgedruckt werden. Das Verzeichnis bot die Grundlagen zur Herstellung von Detailkarten, die den Verlauf der Linien gleicher Schwerkraft in Einzelheiten erkennen lassen. Über diese Karten ist in der Arbeit »Das Geoid« ausführlich berichtet worden. Durch Zusammensetzung der Detailblätter entstand eine Erdkarte mit den Linien gleicher Schwerkraft, die gleichfalls in der erwähnten Arbeit veröffentlicht ist.

Allen solchen erstmaligen Versuchen haften Mängel an. Oft sind gerade solche Mängel nicht nur Anlaß zur Kritik, sondern auch Anlaß zu weiteren Messungen.

Im Sinne der heute geltenden Ansichten sind auf den Inseln starke »Störungen« der Schwerkraft vorhanden. Es muß indessen bemerkt werden, daß eine wahrheitsgetreue Darstellung des Verlaufes der Schwerkraft alles das zu enthalten hat, was durch Beobachtungen festgestellt wurde. Auch die auf den Inseln gemessenen Werte der Schwerkraft sind von der Natur vorgegebene Werte und dürfen daher nicht außer acht gelassen werden.

Sofern man nun aus Insel-Schwerkraftwerten die g-Linien auf dem freien Meer zwischen zwei Inseln interpoliert, begeht man gewiß einen Fehler. Nur die tatsächliche Ausführung von Schweremessungen auf der Interpolationslinie, also auf freiem Meere kann die Größe des Fehlers aufdecken. Durch das Hinzutreten von neuen Schwerkraftmessungen auf den Weltmeeren kann die Erdkarte der g-Linien in ihrer heutigen Form fortlaufend verbessert werden. Nach einigen Jahrzehnten dürfte dann vielleicht eine auch über den Ozeanen fehlerfreie Darstellung des Verlaufes der Linien gleicher Schwerkraft vorliegen.

Erst zu diesem Zeitpunkt wird eine nochmalige Herstellung der Kugelfunktionen-Entwicklung, die nachfolgend kurz angedeutet ist, zu einer endgültigen Lösung der Frage nach dem Gesamtbilde des Schwerkraftfeldes der Erde führen.

Wenn für einzelne Punkte (φ, λ) einer Kugeloberfläche die Werte irgendeiner endlichen und stetigen Funktion gegeben sind, dann kann diese Funktion durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen dargestellt werden.

Bezeichnet man die Nordpoldistanz des Punktes (φ, λ) mit $\vartheta = 90-\varphi$ und setzt $\cos\vartheta = \mu$, so nimmt die Entwicklung nach Kugelfunktionen die folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
f(\mu, \lambda) = {} & A_0^0 P_0(\mu) \\
& + A_1^0 P_1(\mu) + (A_1^1 \cos\lambda + B_1^1 \sin\lambda)\, P_{11}(\mu) \\
& + A_2^0 P_2(\mu) + (A_2^1 \cos\lambda + B_2^1 \sin\lambda)\, P_{21}(\mu) + \\
& \qquad + (A_2^2 \cos 2\lambda + B_2^2 \sin 2\lambda)\, P_{22}(\mu)
\end{aligned}
$$

$$+ A_n^0 P_n(\mu) + (A_n^1 \cos\lambda + B_n^1 \sin\lambda)\, P_{n1}(\mu) +$$
$$+ (A_n^2 \cos 2\lambda + B_n^2 \sin 2\lambda)\, P_{n2}(\mu)$$
$$+ \dots \qquad + (A_n^n \cos n\lambda + B_n^n \sin n\lambda)\, P_{nn}(\mu)$$

oder auch

$$f(\mu, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i,$$

wobei

$$y_i = A_i P_i(\mu) + (A_i^1 \cos\lambda + B_i^1 \sin\lambda)\, P_{i1}(\mu) + \dots +$$
$$+ (A_i^i \cos i\lambda + B_i^i \sin i\lambda)\, P_{ii}(\mu).$$

Für die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten A_i^k, B_i^k hat F. Neumann[1] zwei Methoden angegeben, unter der Voraussetzung, daß die Funktionswerte für ganz bestimmte Punkte der Kugeloberfläche bekannt sind oder aus den Funktionswerten von benachbarten Punkten interpolatorisch abgeleitet werden können.

A. Prey[2] hat in seinem inhaltsreichen Werke eingehend die Vor- und Nachteile der beiden Verfahren besprochen und zur »Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde« die zweite Methode gewählt.

Die höchste Ordnung der Kugelfunktionen, die bei einer praktischen Entwicklung gerade noch mitgenommen werden kann, ist vor allem durch die zu leistenden Rechenarbeiten bestimmt.

Nach der von Prey in seinem Werke näher begründeten Annahme gewährleistet die Wahl der 16. Ordnung in den letzten mitzunehmenden Kugelfunktionen eine befriedigende Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde und die Rechenarbeiten der Entwicklung steigen dabei noch nicht ins Ungemessene.

In diesem Falle setzt die Anwendung der zweiten Methode voraus, daß die darzustellenden Funktionswerte für 17 Parallelkreise bekannt sind, und zwar auf 32 gleichmäßig über den Umfang eines Parallelkreises verteilten Punkten. Die Lage der Parallelkreise ist nicht willkürlich, sondern die entsprechenden Nordpoldistanzen sind gegeben durch die 17 Wurzeln der Gleichung $P_{17} = 0$.

Diese Wurzeln und die aus ihnen ableitbaren Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung einschließlich, hat Prey in mühevoller Arbeit berechnet und in seinem oben erwähnten Werke veröffentlicht.

Wenn schon der komplizierte Bau der Erdoberfläche durch die von Prey ausgeführte Entwicklung in durchaus befriedigender Weise dargestellt werden konnte, so durfte angenommen werden,

---

[1] C. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von F. Neumann, Leipzig 1887.

[2] A. Prey, Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung. Abh. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. N. F., Bd. XI/1.

j		P_{0j}	P_{1j}	P_{2j}	P_{3j}	P_{4j}	P_{5j}	P_{6j}	P_{7j}	P_{8j}
0		97984·67	−7·20	+330·07	+10·56	−4·11	−3·54	+15·07	+1·16	−11·02
1	cos λ sin λ		−0·61 −7·21	− 1·12 + 2·42	+ 1·27 + 0·25	−0·79 −1·27	+2·25 −0·10	− 0·07 + 0·52	+0·39 −0·32	+ 0·04 − 0·07
2	cos 2λ sin 2λ			+ 0·28 + 0·32	+ 1·43 − 1·00	+0·43 +0·19	−1·17 +0·20 10^{-1}	+0·17 +0·86 10^{-1}	−0·41 +1·70 10^{-1}	−0·04 +1·46 10^{-1}
3	cos 3λ sin 3λ				+ 0·16 − 0·32	−0·40 +1·12 10^{-1}	−3·10 +0·17 10^{-2}	−0·90 +0·21 10^{-2}	−1·22 +0·55 10^{-2}	+0·63 −1·01 10^{-2}
4	cos 4λ sin 4λ					+1·06 −5·37 10^{-2}	−1·44 +2·46 10^{-2}	+1·66 +0·86 10^{-3}	+1·02 +0·23 10^{-3}	−0·05 +0·19 10^{-3}
5	cos 5λ sin 5λ						+1·41 −0·18 10^{-3}	+0·19 +1·48 10^{-3}	−0·50 −2·01 10^{-4}	+0·22 −0·24 10^{-4}
6	cos 6λ sin 6λ							0·00 +0·13 10^{-3}	+0·25 −0·66 10^{-4}	−2·10 −0·85 10^{-5}
7	cos 7λ sin 7λ								+1·62 +0·19 10^{-5}	−0·28 +0·30 10^{-5}
8	cos 8λ sin 8λ									−0·09 +1·33 10^{-6}

j		P_{9j}	P_{10j}	P_{11j}	P_{12j}	P_{13j}	P_{14j}	P_{15j}	P_{16j}
0		+5·95	+4·46	+2·02	−4·72	−2·35	+8·40	−5·43	−4·79
1	cos λ sin λ	−0·61 +0·05	+2·15 −1·97 10^{-1}	+1·47 +0·40 10^{-1}	+3·97 +2·94 10^{-1}	−4·72 +4·66 10^{-1}	−1·59 −1·51 10^{-1}	+0·46 −4·76 10^{-1}	−2·18 +1·44 10^{-1}
2	cos 2λ sin 2λ	−0·21 −0·82 10^{-1}	+0·26 −0·06 10^{-1}	−1·73 +3·60 10^{-2}	+0·86 +3·84 10^{-2}	+0·04 +1·91 10^{-2}	−1·02 −0·61 10^{-2}	−1·11 +0·56 10^{-2}	−1·05 −0·12 10^{-2}

3	cos	3 λ	+0·26	10^{-2}	–0·30	10^{-2}	–1·60	10^{-3}	+0·41	10^{-3}	+1·35	10^{-3}	–0·19	10^{-3}	–0·17	10^{-3}	–0·15	10^{-3}
	sin	3 λ	–0·29		+0·34		–0·13		+0·70		–1·53		–0·55		+0·79		+0·07	
4	cos	4 λ	+0·11	10^{-3}	–0·11	10^{-3}	–0·49	10^{-4}	+1·85	10^{-4}	+0·48	10^{-4}	–0·32	10^{-4}	–0·20	10^{-4}	–0·18	10^{-4}
	sin	4 λ	–0·86		–0·29		–0·97		+1·37		+0·33		–0·07		–0·38		–0·77	
5	cos	5 λ	–0·28	10^{-4}	–0·05	10^{-4}	+0·07	10^{-4}	+1·38	10^{-5}	+0·34	10^{-5}	–0·50	10^{-5}	–0·36	10^{-5}	+0·21	10^{-5}
	sin	5 λ	–0·16		–0·16		+0·20		–0·10		–0·36		–0·25		+0·02		+0·01	
6	cos	6 λ	–0·09	10^{-5}	+0·31	10^{-5}	–0·08	10^{-5}	+0·53	10^{-6}	+0·86	10^{-6}	–0·10	10^{-6}	–0·24	10^{-6}	+0·05	10^{-6}
	sin	6 λ	–1·04		+0·09		+0·06		–0·47		–0·24		–0·39		–0·24		–0·14	
7	cos	7 λ	+0·11	10^{-6}	+0·27	10^{-6}	+0·51	10^{-7}	+0·43	10^{-7}	–0·32	10^{-7}	–0·10	10^{-7}	0·00	10^{-7}	+0·10	10^{-7}
	sin	7 λ	–0·03		+0·01		+0·42		+0·80		+0·59		+0·19		–0·09		–0·07	
8	cos	8 λ	–0·82	10^{-7}	0·00	10^{-7}	–0·20	10^{-7}	0·00	10^{-8}	0·20	10^{-8}	–0·20	10^{-8}	0·00	10^{-8}	+0·51	10^{-9}
	sin	8 λ	+5·70		+1·22		+0·17		–0·51		–0·41		+0·12		+0·07		0·00	
9	cos	9 λ	–0·31	10^{-7}	+0·29	10^{-8}	0·00		–1·80	10^{-9}	–0·10	10^{-9}	0·00	10^{-9}	–0·10	10^{-9}	0·00	10^{-10}
	sin	9 λ	+0·68		–0·39		0·00		+0·63		–0·28		–0·01		–0·11		+0·07	
10	cos	10 λ			–2·97	10^{-9}	–0·41	10^{-9}	–1·70	10^{-10}	–0·53	10^{-10}	–0·07	10^{-10}	–0·16	10^{-11}	–0·40	10^{-11}
	sin	10 λ			+2·80		–0·77		–0·94		+0·17		–0·08		–0·20		+0·01	
11	cos	11 λ					–0·38	10^{-10}	–0·42	10^{-10}	+0·04	10^{-11}	+0·24	10^{-11}	+1·27	10^{-12}	+0·33	10^{-12}
	sin	11 λ					+1·68		–0·21		+0·49		+0·08		–0·88		+0·13	
12	cos	12 λ							+0·31	10^{-11}	–0·92	10^{-12}	+0·21	10^{-12}	+0·25	10^{-13}	–0·11	10^{-13}
	sin	12 λ							+0·03		+0·38		+0·43		–0·51		–0·18	
13	cos	13 λ									+0·35	10^{-13}	–0·53	10^{-13}	+1·09	10^{-14}	–0·90	10^{-14}
	sin	13 λ									–1·75		+0·29		+0·03		–0·17	
14	cos	14 λ											–0·73	10^{-14}	–2·45	10^{-15}	–0·38	10^{-15}
	sin	14 λ											–0·67		+0·32		–0·22	
15	cos	15 λ													+1·08	10^{-16}	–0·20	10^{-16}
	sin	15 λ													–2·10		+0·20	
16	cos	16 λ															+0·46	10^{-17}

daß für die Darstellung des weitaus ruhigeren Verlaufes der Schwerkraftwerte eine ähnliche Entwicklung zum Ziele führt. Aus diesem Grunde und im Hinblick auf jene wesentliche Vereinfachung der Rechenarbeiten, die sich bei Benutzung der von Prey hergestellten Entwicklungsgrundlagen ergibt, wurde für die Darstellung des Schwerkraftfeldes der Erde ebenfalls eine Kugelfunktionen-Entwicklung bis zur 16. Ordnung in Aussicht genommen.

Auf eine eingehendere Besprechung des Arbeitsvorganges muß hier verzichtet werden; sie bleibt jener Darstellung vorbehalten, die mit Subvention der Akademie der Wissenschaften in Wien später erscheinen wird.

Die Funktionswerte $f(\mu, \lambda)$ wurden an den durch die Annahme der zweiten Methode von Neumann bedingten und von Prey berechneten Bezugspunkten durch Interpolation zwischen den g-Linien der Erdkarte ermittelt.

Entsprechend den von Hopfner angegebenen Gründen, wonach für eine erste Untersuchung nicht mehr angestrebt werden braucht, als eine Genauigkeit von 0·01 $cm sec^{-2}$ wurden die Schwerkraftwerte der Stützpunkte mit dieser Genauigkeit interpoliert.

Die Berechnung der Entwicklung führte unter Zuziehung zahlreicher Kontrollen zu der in der folgenden Tabelle enthaltenen Darstellung des Schwerkraftfeldes (Einheit $=$ 0·01 $cm sec^{-2}$).

Aus den in der Tabelle ersichtlichen Zahlenwerten kann im vorhinein kein Schluß auf die Konvergenz der Entwicklung gezogen werden. Ohne Angaben von Einzelheiten wird hier lediglich bemerkt, daß die ausgeführten Konvergenzbetrachtungen eine deutliche Abnahme der Amplituden erkennen lassen. Schon von den Gliedern 10. Ordnung ab sind die Amplituden so klein, daß sie im Bereich des Fehlers der Angaben $f(\mu, \lambda)$ liegen.

Das Vorhandensein von Gliedern 1. Ordnung zeigt an, daß der Erdschwerpunkt nicht mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

Die Darlegung jener zahlreichen, an Hand der vorliegenden Kugelfunktionen-Entwicklung lösbaren Fragen über die Figur der Niveaufläche in Meereshöhe muß weiteren, bereits in Ausführung befindlichen Arbeiten vorbehalten bleiben.