

# **Entwicklung der Hauptsätze der Krystallographie und Krystallphysik.**

Von **Aristides Brezina.**

---

*Separat-Abdruck aus dem III. Hefte d. Mineral. Mittheil. 1872  
gesammelt von Tschermak.*

# Entwicklung der Hauptsätze der Krystallographie und Krystalphysik.

Von **Aristides Brezina.**

---

## Einleitung.

Unter allen krystallographischen Methoden ist wohl keine so sehr auf die Specialisten beschränkt geblieben, als die Miller'sche; der Grund davon liegt nicht etwa in einer abstracten Behandlungsweise oder in schwierigen mathematischen Grundlagen, sondern hauptsächlich darin, dass dieselbe bisher nie getrennt von denjenigen Operationen behandelt wurde, welche zur Ableitung der einzelnen mathematischen Formeln aus den geometrischen Grundbegriffen dienen.

Gerade die Miller'sche Methode ist einer elementaren Behandlung fähig, welche fast ohne Anwendung des Calcüls nicht nur die rasche und sichere Entwicklung aller Combinationen auf dem Wege der Zonenbeobachtung, sondern auch die Erkenntniss der physikalischen Eigenschaften der Krystalle auf Grundlage ihrer Symmetrieverhältnisse ermöglicht.

Diese Eigenschaften der genannten Methode sind besonders werthvoll für den Mineralogen und den Petrographen, der sich mit mikroskopischen Beobachtungen befasst; für ersteren, weil er ohne viele Messungen und Rechnungen, nur aus dem Anblick des Krystalls den Zusammenhang der einzelnen Gestalten, somit die Lösung der Combination erhält; für letzteren, weil er durch die genaue Kenntniss der Symmetrieverhältnisse in den Stand gesetzt ist, in Dünnschliffen das Krystalssystem und die Elemente eines Krystalldurchschnittes zu erkennen; in beiden Fällen ohne Voraussetzung solcher mathematischer Kenntnisse, die ausser dem Bereiche des Mineralogen sowohl, als des Petrographen sind.

Allein nicht nur einfach und gründlich ist diese Methode, sondern auch in jeder Beziehung den übrigen gebräuchlichen von Weiss, Naumann und Lévy herrührenden, überlegen.

Einer der wichtigsten Vortheile derselben ist die Möglichkeit einer gleichzeitigen Entwicklung der krystallographischen und physicalischen Verhältnisse eines jeden Systems aus der gegebenen Symmetrie desselben; dieser Vorgang gewährt von Anfang an eine vollkommene Einsicht in das Wesen und die Eigenschaften desselben und bewahrt während der Entwicklung die Uebersicht über das ganze theoretische Gebäude. Während aber diese Ableitungsmethode für den krystallographischen

Theil erst durch von Lang <sup>1)</sup> durchgeführt wurde, ist ein wesentliches Moment der Miller'schen Methode die — von Whewell <sup>2)</sup> herrührende — Art der Flächenbezeichnung.

Das Miller'sche Zeichen besteht, wie später ausgeführt werden soll, aus drei Zahlen (Indices), welche den Abschnitten der Fläche an den drei Axen umgekehrt proportional sind, während die Zahlen der Weiss'schen diesen Abschnitten direct entsprechen, die Naumann'schen und Lévy'schen theils die Axenabschnitte selbst, theils die Verhältnisse zweier Abschnitte geben; die Vortheile der Miller'schen Zeichen sind nun sehr zahlreich; zunächst lässt sich durch sie jede einzelne Fläche darstellen, während im Naumann'schen und Lévy'schen Zeichen nur die Gestalt, also der Complex aller zusammengehörigen Flächen gegeben ist; will man jedoch nach Miller die ganze Gestalt repräsentiren, so wird das Symbol einer ihrer Flächen in runde Klammern geschlossen; man hat also den Vortheil, je nach Bedarf Fläche oder Flächencomplex genau und kurz bezeichnen zu können.

Das Miller'sche Zeichen ist ferner ausserordentlich einfach und bequem; während hier drei niedere (0.1 selten 2. . .) ganze Zahlen genügen, braucht man nach Weiss 3 oder 4 Brüche und 3 oder 4 Buchstaben, zu je dreien oder vieren durch Doppelpunkte getrennt, z. B.

$$\boxed{\frac{1}{2}a : b : \infty c} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{1}{2}a' : a' : 2 a' : c}$$

nach Naumann zwei Brüche und einen Buchstaben, eventuell bis vier Striche an letzterem, z. B.

$$2\check{P}_{\infty} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3}\check{P}_1^1 2;$$

auch das Lévy'sche Zeichen wird in vielen Fällen complicirt, so bei Pyramiden

$$b^{1/2} d^1 d^{1/2},$$

also drei Buchstaben und drei Brüche.

Das Naumann'sche und Lévy'sche Zeichen sind nicht symmetrisch bezüglich der krystallographischen Axen; d. h. während bei Miller der erste, zweite, dritte Index sich unabänderlich auf die erste, zweite, dritte Axe beziehen, ist bei Naumann nie, bei Lévy nur im complicirtesten Falle (den Pyramiden der Nebenreihen) jede Axe durch einen Index vertreten, und auch da wechseln die Axen ihre Stellung im Zeichen. Diese Symmetrie nach den Axen ist wichtig, weil sie die Transformation der Indices bei Axenveränderungen, sowie die Berechnung der Zonengleichungen ausserordentlich einfach und übersichtlich gestaltet. Sonderbarer Weise hat mangelnde diese Seite des Miller'schen Zeichens angefochten, indem nach Naumann und Lévy die Unterscheidung von Pyramiden, Prismen-Domen und Pinakoiden augenscheinlicher sein soll; dies ist jedoch entschieden unrichtig; bei Miller sind im Zeichen der Pyramide drei von 0 verschiedene Zahlen; im Symbol eines Prisma's oder Doma's ist ein Index = 0, ein

<sup>1)</sup> v. Lang, Krystallographie. Wien, Braumüller 1866.

<sup>2)</sup> Whewell, Phil. Trans. 1825. 87.

Pinokoid hat das Zeichen (100), (010) oder (001), also enthält zwei Nullen, gewiss eine augenfällige Verschiedenheit.

Gegenüber der Bezeichnung von Weiss hat die nach Miller ausser der oben erwähnten Kürze weiters den Vortheil, dass statt des Zeichens  $\infty$  die Null auftritt, da die Zahlen dieser beiden Systeme einander reciprok sind; welche grosse Wichtigkeit dieser Umstand bei der Berechnung der Zonengleichungen hat, soll sogleich gezeigt werden; auf der Leichtigkeit der Zonenentwicklung aber beruht die rasche und sichere Lösung der Combinationen.

Der Vorgang der Herstellung der Zonengleichung nach Miller ist folgender: gegeben sind 2 Flächen  $efg$  und  $pqr$ , das Zeichen der durch beide gebildeten Zone wird durch kreuzweise Multiplication und Subtraction gewonnen, wie folgt:

$$\begin{array}{r}
 e \ f \ g \ e \ f \ g \\
 \times \times \times \\
 p \ q \ r \ p \ q \ r \\
 \hline
 [fr - gq; gp - er; eq - fp] \\
 [u \qquad \qquad v \qquad \qquad w]
 \end{array}$$

$[uvw]$  ist das Symbol der Zone; nun sind  $efgpqr$  niedere ganze Zahlen; die Producte  $fr, gq, gp \dots$  daher ebenfalls, dasselbe gilt daher auch von ihren Differenzen, welche eben die Indices  $uvw$  der Zone darstellen.

Soll nun die Fläche  $xyz$  in der durch  $[uvw]$  dargestellten Zone liegen, so müssen die gleichstelligen Indices von Fläche und Zone multiplicirt und alle drei Producte addirt, die Summe 0 geben.

$$ux + by + wz = 0.$$

Ein numerisches Beispiel lässt die Kürze noch mehr hervortreten.

$$\begin{array}{r}
 abc \dots 210 \qquad \qquad 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \times \times \times \\
 pqr \dots 1\bar{1}1 \qquad \qquad 1 \ \bar{1} \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ 1 \\
 \hline
 1 \cdot 1 - 0 \cdot \bar{1}; 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1; 2 \cdot \bar{1} - 1 \cdot 1 \\
 1 - 0; \qquad 0 - 2; \qquad -2 - 1 \\
 \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad \bar{2} \qquad \qquad \qquad \bar{3} \\
 [uvw] \dots [1\bar{2}\bar{3}] \\
 xyz \dots 301 \qquad \qquad 1 \cdot 3 + \bar{2} \cdot 0 + \bar{3} \cdot 1 = 3 - 3 = 0
 \end{array}$$

also liegt die Fläche 301 in der durch 210 und  $1\bar{1}1$  gebildeten Zone  $[1\bar{2}\bar{3}]$ . Betrachten wir nun den Vorgang der Zonenberechnung nach Weiss <sup>1)</sup>. Gegeben zwei Flächen

$$\boxed{\alpha a : \beta b : nc} \quad \text{und} \quad \boxed{\alpha^1 a : \beta^1 b : nc}$$

die also bereits auf gleiche Coefficienten von  $c$  reducirt sind.

<sup>1)</sup> Weiss, Berlin Ac. Abh. 1820—21, pag. 169, 173.

Die durch dieselbe gebildete Zone ist

$$(nc; \alpha' a + \beta' b)$$

wobei

$$\alpha' = \frac{\alpha\alpha'(\beta - \beta')}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}; \beta' = \frac{\beta\beta'(\alpha - \alpha')}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Die Grössen  $\alpha\alpha'\beta\beta'$  sind dann negativ zu rechnen, wenn die Axe  $a$  oder  $b$ , vor der sie stehen, gestrichelt ist ( $a' b'$ ).

Soll die Fläche

$$\alpha'' a : \beta'' b ; nc$$

in dieser Zone liegen, so muss eine der Proportionen

$$\alpha'' : \beta'' = \alpha' : \left\{ \begin{array}{l} \beta'' - \beta' \\ \beta' - \beta'' \\ \beta'' + \beta' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha'' - \alpha' \\ \alpha'' + \alpha' \\ \alpha'' - \alpha'' \end{array} \right\} : \beta'$$

richtig sein.

Wie umständlich diese Methode ist, zeigt der Anblick; zunächst sind die Flächensymbole bezüglich einer Axe (im obigen Falle  $c$ ) auf gleichen Coefficienten zu reduciren; sodann durch Multiplication, Addition, respective Subtraction und Division die Grössen  $\alpha'$  und  $\beta'$  herzustellen, wobei zu bemerken, dass sowohl im Zähler als auch im Nenner dieser Grössen sich Brüche ( $\alpha\alpha'\beta\beta'$ ) befinden, die aber erst auf gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden müssen. Allerdings lässt sich die Rechnung (l. c. pag. 169) vereinfachen, wenn man die Flächensymbole in der Form

$$\frac{1}{x} a : \frac{1}{y} b : nc$$

schreibt; das heisst aber nichts anderes, als Miller'sche Symbole anwenden, die ja die Reciproken der Weiss'schen sind; und selbst dann noch bleibt die Rechnung umständlicher, weil die 3 Zeichen bezüglich  $c$  ausgeglichen sind und nicht symmetrisch nach den drei Axen.

Noch schleppender wird der Gang der Rechnung in hexagonalen Systeme, wo aus dem vierstelligen Symbol erst die dreistelligen Parameter berechnet und in die vorhin entwickelte Rechnung eingeführt werden müssen.

In etwas bequemerer Form, obwohl noch immer viel weitläufiger als bei Miller, wendet Quenstedt <sup>1)</sup> diese Symbole in den sogenannten Zonenpunktsformeln an. Sind

$$ma : nb : c, \quad pa : qb : c \quad \text{und} \quad xa : yb : c$$

drei Flächen, deren Tautozonalität geprüft werden soll, so bildet man für

<sup>1)</sup> Quenstedt, Mineralogie 1863, 44.

je zwei derselben die Zonenpunktformel und sieht, ob die so bezeichneten Zonen ident sind; und zwar für die Zone

$$\boxed{ma : nb : c} \text{ zu } \boxed{pa : qb : c}$$

$$\frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{mq} - \frac{1}{pn}} a : \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{mq} - \frac{1}{pn}} b$$

ebenso für die Zone

$$\boxed{ma : nb : c} \text{ zu } \boxed{xa : yb : c}$$

$$\frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{my} - \frac{1}{xn}} a : \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{my} - \frac{1}{xn}} b.$$

Daraus ergibt sich als Bedingung der Tautozonalität die Gleichheit der beiden Verhältnisse. In dieser Form wurde die Zonencontrole durch Quenstedt und C. Klein <sup>1)</sup> angewendet.

Zunächst ist nun zu bemerken, dass diese Zonenpunktformeln sich wesentlich vereinfachen lassen, indem die Nenner beiderseits gleich sind; man erhält also

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right) a : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) b \text{ und } \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{n}\right) a : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x}\right) b.$$

Also die Bedingung:

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{n}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x}\right).$$

Allein auch diese Gleichung ist noch viel complicirter als die Miller'sche; in unserem früheren Beispiele haben wir

$$210 = \frac{1}{2}a : b : \infty c; 1\bar{1}1 = a : b' : c; 301 = \frac{1}{3}a : \infty b : c$$

Vertauschen wir, um die Coëfficienten von  $c$  gleich 1 setzen zu können, die Axen  $a$  und  $c$  an allen 3 Flächen, was auf die Tautozonalität keinen Einfluss hat, so erhalten wir

$$\infty a : b : \frac{1}{2}c; a : b' : c; a : \infty b : \frac{1}{3}c$$

oder

$$\infty a : 2b : c; a : b' : c; 3a : \infty b : c$$

nun wird

<sup>1)</sup> Klein Leonh. Jahrb. 1871. 480.

$$\frac{1}{m} = 0; \frac{1}{n} = \frac{1}{2}; \frac{1}{p} = 1; \frac{1}{q} = -1; \frac{1}{x} = \frac{1}{3}; \frac{1}{y} = 0.$$

Diess in die Gleichung substituirt gibt

$$\left(-1 - \frac{1}{2}\right) : (0 - 1) = \left(0 - \frac{1}{2}\right) : \left(0 - \frac{1}{3}\right)$$

oder

$$-\frac{3}{2} : -1 = -\frac{1}{2} : -\frac{1}{3}$$

die Proportion ist richtig, folglich die Zone vorhanden.

Man muss hier also nach den schon oben erwähnten Operationen noch die Zahlenwerthe in die Buchstabengleichung einsetzen und die Division ausführen, während nach Miller ohne Zubillfenahme von Buchstaben an den Indices selbst die so sehr einfache und symmetrische Rechnung mittelst kreuzweiser Multiplication und Subtraction ganzer Zahlen ausgeführt wird.

Noch umständlicher ist der Vorgang bei Naumann; erst müssen die Weiss'schen Parameter berechnet werden; sodann werden dieselben in die Gleichung

$$\frac{1}{ab'c''} + \frac{1}{bc'a''} + \frac{1}{ca'b''} = \frac{1}{ab''c'} + \frac{1}{bc''a'} + \frac{1}{ca''b'}$$

eingeführt, worin

$$abc, a'b'c, a''b''c''$$

die Parameter der 3 Flächen darstellen; werden diese Zahlen, wie im hexagonalen System häufig, zweiziffrig, so hat man 12 Multiplicationen, 6 Divisionen und die Addition auszuführen; die Division aber oft bis auf 4 Decimalen, zuweilen noch weiter, während nach der Miller'schen Methode immer die Bequemlichkeit der Rechnung mit ganzen Zahlen gewahrt bleibt.

Dieser umständliche Gang brachte es mit sich, dass die Anhänger der Naumann'schen und Weiss'schen Schule bis in die letzte Zeit sich mit der durch die Quenstedt'sche Methode gegebenen constructiven, also annäherungsweise Zonencontrole begnügten, während seit Begründung der Miller'schen Methode schon der Anfänger befähigt und gewohnt ist, alle Zonen durch das höchst einfache Berechnen der Zonengleichung zu verificiren.

In der That machte auch erst im Jahre 1866 v. Kokscharow <sup>1)</sup> neuerdings auf die rechnende Zonencontrole aufmerksam, welche seit den Arbeiten von Weiss fast ganz in Vergessenheit gerathen war; v. Rath <sup>2)</sup>, Hessenberg <sup>3)</sup> und C. Klein <sup>4)</sup> folgten, indem sie in besonders verwickelten Fällen die Construction durch die Rechnung ersetzten.

<sup>1)</sup> v. Kokscharow, Materialien zur Min. Russl. V., 216, 1866.

<sup>2)</sup> v. Rath, Pogg. Ann. CXXXII. 398. 1867.

<sup>3)</sup> Hessenberg, Min. Not. IX in Senckenb. Ges. Abh. VII. 259. 1870.

<sup>4)</sup> Klein l. c. pag. 481.

Sehr wichtig ist ferner die Verwendung der Winkel der Flächennormalen statt der inneren, körperlichen Winkel; zunächst mit Rücksicht auf Bequemlichkeit und Uebersichtlichkeit; während in der Regel die inneren Winkel grösser als  $100^\circ$ , also dreiziffrig sind, sind die Normalenwinkel meist zweiziffrig; ferner werden gegenwärtig die Winkel meist am Reflexionsgoniometer, also als Normalenwinkel gemessen; aber auch bei der blossen Schätzung eines Winkels nach dem Augenmasse schätzt man leichter den Supplementar- als den wirklichen Winkel, eben weil er meist der kleinere ist.

Der wichtigste Vortheil der Normalenwinkel besteht darin, dass sie unmittelbar in die Rechnung eingeführt werden können; dies macht sich besonders bei tautozonalen Flächen fühlbar, bei denen aus zwei Winkeln je zweier von drei tautozonalen Flächen der dritte einfach durch Addition oder Subtraction gewonnen wird, und zwar:

$$\sphericalangle ab + \sphericalangle bc = \sphericalangle ac; \quad \sphericalangle ac - \sphericalangle ab = \sphericalangle bc$$

was bei den von den Flächen selbst gebildeten Winkeln nicht der Fall ist.

Bei Auflösung von Combinationen wird eine rasche Orientirung wesentlich durch diese Methode gefördert.

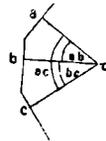
Endlich sind nur die Normalenwinkel zur Eintragung in die sphärische Projection geeignet, woselbst sie direct die Seiten der sphärischen Dreiecke bilden.

Damit ist anderseits bereits einer der Vorzüge der sphärischen Projection ausgesprochen, der namentlich der Quenstedt'schen fehlt; da ferner die ganze Berechnungsmethode Miller's auf der sphärischen Trigonometrie beruht, findet sie an dieser Projection die erläuternde Figur, die also gleichzeitig den Zonenverband der vorkommenden Gestalten und den Gang der Berechnung des Krystals repräsentirt.

Die sphärische Projection hat endlich den grossen Vortheil, eine begrenzte zu sein, so dass die geometrischen Orte aller Flächen wirklich darstellbar und zu einem compendiösen Bilde vereinigt sind, eine Eigenschaft, die sowohl der gnomonischen, als der Quenstedt'schen Projection fehlt; nur dadurch ist es möglich, die Projection zur Eintragung aller physicalischen Verhältnisse zu benutzen, welcher Umstand bei der immer grösseren Anwendung der letzteren ein sehr einflussreicher ist.

Ein Vorwurf, der zwar nicht ausdrücklich, doch stillschweigend dieser Projectionsmethode gemacht wird, ist der, dass zur Anlegung derselben Dreieck und Zirkel erforderlich seien, während zur Quenstedt'schen das Dreieck genüge. Dieser Vorwurf ist aber ganz unstichhältig, denn erstlich ist zu jeder genauen Projection der Zirkel nothwendig, wenn gleich nur der bequemere, mit zwei Stahlspitzen versehene; sodann sind für gewöhnlichen Gebrauch Zirkel und Dreieck ganz überflüssig, da wegen der ausserordentlichen Einfachheit der Zonenberechnungen der Anhänger der Miller'schen Methode die sphärische Projection nur zur Repräsentation, nicht aber zur Erforschung der vorhandenen Zonen zu verwenden braucht, daher sich die Mühe einer exacten Ausführung derselben, solange er keine Publication beabsichtigt, vollkommen ersparen kann.

Fig 1



Den vielfachen Vorzügen der Miller'schen Methode hat man bisher keine Nachtheile gegenüberzustellen vermocht; wenn trotzdem dieselbe in Deutschland und Frankreich sich nicht allgemein Bahn gebrochen hat, so liegt der Grund hievon wohl nur darin, dass Haüy, Weiss und Naumann in diesen Ländern gelehrt haben; wo aber so ausgebildete selbständige Theorien geboten werden, begnügt sich der Lernende meist mit der Kenntniss des vorgetragenen Systems, oder wenn er später darüber hinausgeht, ist ihm das frühere gewohnte doch geläufiger und seine Kenntniss darin gründlicher, so dass er viele Vorzüge des neuen Systems gar nicht kennen lernt.

Die Einführung der Whewell-Miller'schen Principien wurde in Deutschland durch Frankenheim, in Frankreich durch Bravais und Sénarmont versucht, jedoch ohne durchgreifenden Erfolg. Erst in neuerer Zeit beginnt die jüngere deutsche Schule, namentlich in Folge des Aufschwunges, den die physicalischen Untersuchungen an Krystallen in letzter Zeit genommen, sich einzelner Partien der Miller'schen Methode zu bemächtigen.

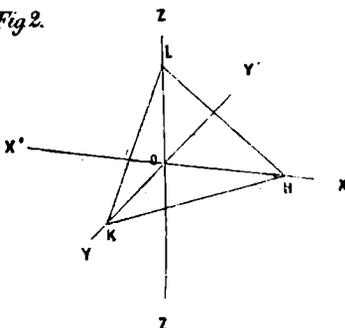
Zweck der nachfolgenden Seiten ist es nun, dasjenige übersichtlich zu entwickeln, was zum Lösen von Combinationen und zur Erkenntniss des physikalischen Wesens der Krystalle nothwendig ist. Wir werden nun im ersten Abschnitte nach dem Vorgange Miller's die rein geometrischen Verhältnisse der Krystalle behandeln, soweit sie zur Bestimmung der Combinationen erforderlich sind. Der zweite Abschnitt handelt von den möglichen Krystallsystemen und den ihnen entsprechenden Symmetrieverhältnissen; er ist auszugsweise dem Werke v. Lang's entnommen. Im dritten Abschnitt habe ich gezeigt, wie sich mit Zugrundelegung des optischen Verhaltens der Krystalle im allgemeinen die optischen Verhältnisse für die einzelnen Krystallsysteme aus ihrer Symmetrie ableiten lassen.

## I. Abschnitt.

### Die geometrischen Verhältnisse der Krystalle.

#### §. 1. Die Flächenbezeichnung nach Miller.

Fig. 2.



Die Lage einer Ebene ist bekanntlich eindeutig bestimmt, wenn ihre Abschnitte ( $oH$ ,  $oK$ ,  $oL$  Fig. 2) an drei nicht parallelen, aus einem Punkte  $o$  entspringenden geraden Linien ( $oX$ ,  $oY$ ,  $oZ$ ) gegeben sind; diese Geraden heissen die Axen, der Punkt  $o$  der Axenmittelpunkt, die Ebenen je zweier Axen,  $XoY$ ,  $YoZ$ ,  $ZoX$  die Axenebenen, die Abschnitte  $oH$ ,  $oK$ ,  $oL$  die Parameter der Fläche  $HKL$ .

Da jede Axe von  $o$  aus betrachtet zwei Seiten hat, unterscheidet

man dieselben als positive und negative Halbaxe; demgemäss bringt man die Axenabschnitte als  $+oH$  oder  $-oH$  . . . . in Rechnung.

Die Verbindungslinien je zweier Axenabschnitte einer Ebene ( $HK, KL, LH$ ) geben die Durchschnitte der Ebene  $HKL$  mit den 3 Axenebenen.

Multiplizieren wir die drei Parameter einer Fläche mit derselben Zahl, so bleibt die Richtung der Fläche unverändert, sie wird nur parallel sich selbst verschoben (Fig. 3).

Aus der Gleichheit der Verhältnisse:

$$\frac{oH'}{oH} = \frac{oK'}{oK} = \frac{oL'}{oL} = m$$

ergibt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke  $KoL$ , mit  $K'oL'$  u. s. w. und daraus der Parallelismus von  $HKL$  mit  $H'K'L'$ .

Ist (Fig. 4) noch eine Fläche  $ABC$  mit den Parametern zweiter  $oA, oB, oC$  gegeben, welche wir  $a, b, c$  nennen können, also

$$oA = a; oB = b; oC = c$$

so ist die Fläche  $HKL$  auch bestimmt, wenn uns die Verhältnisszahlen

$$h = \frac{oA}{oH} = \frac{a}{oH}; k = \frac{oB}{oK} = \frac{b}{oK}; l = \frac{oC}{oL} = \frac{c}{oL}$$

bekannt sind; ebenso ist eine 3. Fläche  $H'K'L'$  bestimmt durch ihre Verhältnisszahlen oder Indices  $h'k'l'$ , wobei

$$h' = \frac{a}{oH'}; k' = \frac{b}{oK'}; l' = \frac{c}{oL'}$$

Wir sehen also, dass, wenn 3 Ebenen  $XoY, YoZ, ZoX$  gegeben sind, deren drei Durchschnittslinien die Axen  $oX, oY, oZ$  repräsentiren; ferner eine vierte Fläche  $ABC$ , deren Abschnitte diesen Axen der Massstab für die Axenlängen; so ist jede beliebige Fläche in ihrer Richtung vollkommen bestimmt, wenn ihre Indices, d. h. die Verhältnisse zwischen den Parametern von  $ABC$  und ihren entsprechenden eigenen gegeben sind.

Fig. 3.

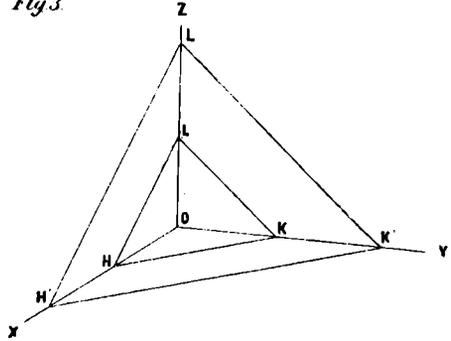
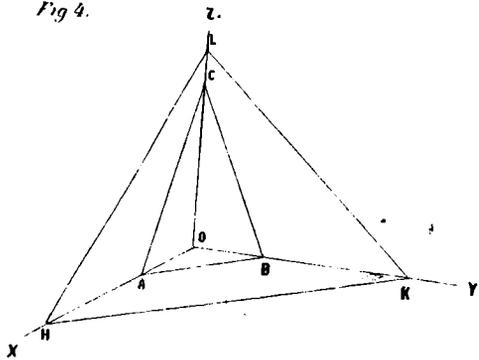


Fig. 4.



Die Grössen  $abc$  und die Axenebenen sind für einen und denselben Krystall constant; bezüglich der Indices  $hkl$  sind gewisse Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Alle drei Indices von  $o$  verschieden ( $h, k, l \geq o$ , Octaidflächen, Pyramidenflächen; der allgemeine Fall.

II. Ein Index, z. B.  $l=o$ ; die Fläche  $h, k, o$  ist ersichtlich der Axe  $oZ$  parallel, denn wir haben

$$l = \frac{oc}{oL} = \frac{c}{oL} = o,$$

Da  $oC = c$  constant ist, kann dieser Bruch nur  $o$  werden, wenn  $oL$  unendlich gross wird, wenn aber die Fläche  $hko$  die Axe  $oZ$  erst in unendlicher Entfernung schneiden soll, so heisst das, sie ist ihr parallel. Ebenso bezeichnen  $k=o \dots hol$  und  $h=o \dots okl$  derartige, der Axe der  $V$ , beziehungsweise  $X$  parallele Flächen; derartige Flächen aber heissen Dodecaid- oder Prismen- (Domen-) Flächen.

III. Zwei Indices  $= o k = l = o \dots 100$ ;  $l = h = o = 010$ ;  $h = k = 0 \dots 001$ . die Fläche  $100$  hat erstens den Index  $k=o$  und ist daher nach obigem der  $Y$ -Axe parallel, aber ebenso auch der  $Z$ -Axe, wegen  $l=o$ ; diese Fläche enthält also die beiden Axen  $YZ$ , sie ist somit parallel zur Axenebene  $YoZ$ ; wir nennen solche Flächen Pinakoide, sie sind diejenigen, durch deren Durchschnitlinien die Lage der Axen bestimmt wird.

Sind die Axenebenen parallelen Flächen  $XoY$ ,  $YoZ$ ,  $ZoX$ , sowie die Flächen  $ABC$  und  $HKL$  wirkliche oder mögliche Flächen eines Krystalls, so lehrt die Erfahrung, dass sich die Indices  $hkl$  einer jeden an diesem Krystall möglichen Krystallfläche jederzeit unter einander wie rationale Zahlen verhalten.

Dieses Gesetz, das erste Grundgesetz der Krystallographie, wird das Gesetz von der Rationalität der Indices genannt; es ist von grösster Wichtigkeit und gestattet die Ableitung eines grossen Theiles der übrigen krystallographischen Gesetze.

Wenn sich aber die Indices  $hkl$  einer jeden Krystallfläche wie rationale Zahlen verhalten, so ist es immer möglich, für dieselben drei ganze positive oder negative Zahlen zu setzen, da die Richtung einer Ebene ungeändert bleibt, wenn man ihre drei Indices mit derselben Zahl multiplicirt.

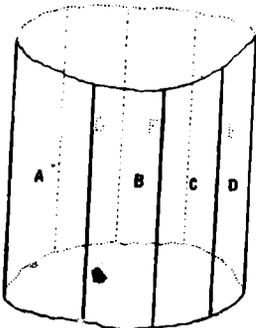
Die Erfahrung lehrt nun weiter, dass die Indices der häufiger auftretenden Flächen fast immer durch die einfachsten ganzen Zahlen 0 und 1, seltener 2 darstellbar sind, so dass die Rechnung mit denselben eine sehr einfache wird.

## §. 2. Zonenregeln.

Von der grössten Wichtigkeit für die Entwicklung der Combinationen ist die Berücksichtigung der an einem Krystall auftretenden Zonen.

Zwei Ebenen, die einander nicht parallel sind, schneiden sich, gehörig vergrössert, jederzeit in einer geraden Linie;

Fig 5



alle jene Ebenen nun, deren Durchschnittslinien untereinander derselben geraden Linie parallel sind, gehören einer Zone an und heissen tautozonale Flächen; die Gerade, der ihre Durchschnittslinien parallel sind, heisst Zonenaxe (Fig. 5).

Da die Zonenaxe allen Flächen der Zone parallel ist, wird eine zur Zonenaxe senkrechte Ebene  $P$  auch auf allen Flächen der Zone senkrecht stehen, und wenn man auf jede Zonenfläche eine senkrechte Gerade errichtet, so werden alle diese Normalen der erwähnten Fläche  $P$  parallel sein; von dieser wichtigen Eigenschaft tautozonaler Flächen, dass ihre Normalen alle in einer zur Zonenaxe senkrechten Ebene liegen, werden wir bei Erörterung der sphärischen Projection Gebrauch machen.

Nachdem die Richtung der Zonenaxe schon durch den Durchschnitt zweier einander nicht paralleler Ebenen bestimmt ist, muss es möglich sein, aus den bestimmenden Elementen dieser Ebenen, den Indices, solche Grössen zu berechnen, welche für die Axe der durch diese Ebenen gebildeten Zone charakteristisch sind:

Seien  $P (hkl)$  und  $Q (pqr)$  die beiden Ebenen, schreibt man ihre Indices doppelt übereinander

$$\begin{array}{cccccc}
 h & k & l & h & k & l \\
 & & & \times & \times & \times \\
 & & & p & q & r & p & q & r \\
 \hline
 kr & - & lq; & lp & - & hr; & hq & - & kp \\
 u & & & v & & & w & & 
 \end{array}$$

und multiplicirt nun kreuzweise, vom 2. oberen Index  $k$  beginnend und die Grössen, die durch Multiplication von rechts oben mit links unten erhalten werden, subtrahirend von denen, die von links oben nach rechts unten multiplicirt wurden, so erhält man drei ganze positive oder negative Zahlen ( $u v w$ ), die für die durch  $P, Q$  gebildete Zone bestimmend sind und Zonenindices genannt werden; zum Unterschiede von den Flächenindices schliessen wir sie in eckige Klammern.

Die Zonenindices einer Zone von mehr als zwei Flächen kann man natürlicherweise aus je zwei beliebigen, nichtparallelen Flächen der Zone berechnen; man erhält immer denselben Werth, abgesehen von einem constanten Factor aller drei Indices, mit dem wir ja alle drei Indices jederzeit multipliciren können, ohne die Richtung der dargestellten Fläche oder Linie zu verändern.

Soll nun in der obigen Zone  $PO$  eine dritte Fläche  $R (xyz)$  gelegen sein, so gibt es dafür ein einfaches Criterium, dessen Ausdruck sich daraus ergibt, dass die Zonenaxe  $[PR]$  oder  $[QR]$  dieselben Indices (bis auf einen constanten Factor) besitzen müsse, wie  $[PQ]$ ; dieses Criterium ist das Bestehen der Gleichung.

$$u \cdot x + v y + w z = 0.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so liegen die drei Flächen  $PQR$  in derselben Zone.

Sind die Symbole zweier Zonen  $[efg]$  und  $[uvw]$  gegeben, so wird das Symbol der in beiden Zonen gelegenen Fläche  $(xyz)$  abermals durch kreuzweise Multiplication gefunden:

$$\begin{array}{c}
 e f g e f g \\
 \times \times \times \\
 u v w u v w \\
 \hline
 fw - gv; gu - ew; ev - fu \\
 x \qquad y \qquad z
 \end{array}$$

auf dieselbe Weise wie das Zonensymbol aus den Indices zweier Flächen.

Am Schlusse dieses Abschnittes werden die wichtigsten speciellen Zonenregeln und einige Beispiele von Zonenentwickelungen gegeben.

§. 3. Sphärische Projection.

Fig 6.

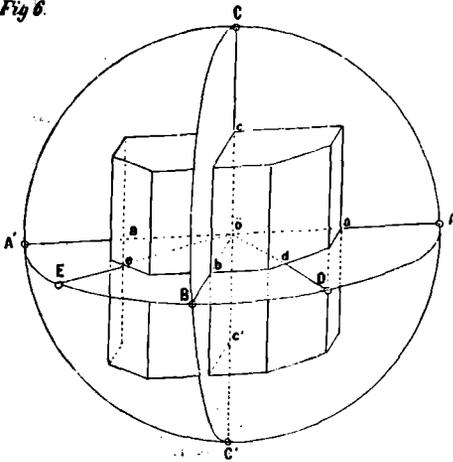
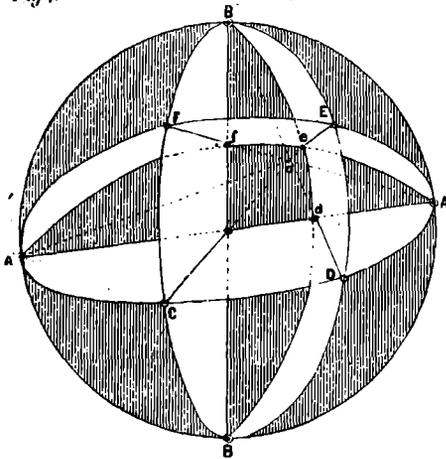


Fig 7.



Als einfachstes Mittel, die gegenseitige Lage der Flächen eines Krystalles darzustellen, dient die von Neumann eingeführte Kugelprojection; sie bietet den Vortheil, schon bei ganz roher Ausführung ein Bild des Zonenverbandes an einem Krystall zu gewähren, und die Bestimmung der Indices seiner Flächen nach Annahme einer Grundform meist ohne jede Messung zu gestatten.

Zu diesem Behufe denken wir uns aus einem Punkte *O* Fig. 6. im Innern des Krystalles senkrechte gerade Linien *oa oa' ob oc oc' od oe*, auf alle seine Flächen gezogen; nun construiren wir um den Punkt *O* als Centrum eine Kugel von beliebigem Radius und verlängern die genannten Senkrechten bis zu ihrem Durchschnitt mit der Kugel in den Punkten *AA' BCC' DE . . .* welche die Pole der betreffenden Flächen genannt werden.

Aus dieser Construction, in der Deutlichkeit halber nur die vordere Seite gezeichnet ist, sehen wir

ohnweiters, dass die Pole tautozonaler Flächen, z. B. *ADBEA'*, in einem grössten Kreise der Kugel gelegen sind, da ja die Normalen zu tautozo-

nalen Flächen in einer Ebene liegen, die durch  $o$  gehen muss, vom welehem Punkt aus alle Normalen gezogen wurden; eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene schneidet aber die Kugel in einem grössten Kreise, der folglich die Pole der tautozonalen Flächen enthält.

Um nun eine solche, die Pole der Krystallflächen enthaltende Kugel zu zeichnen, können wir verschiedene Projectionsmethoden wählen, von denen die durch Miller eingeführte stereographische die vortheilhafteste ist.

Als Projectionsebene wählen wir bei derselben (Fig. 7) eine durch den Kugelmittelpunkt  $o$  gehende Ebene, welche nach dem obigen die Kugel in einem grössten Kreise  $ABC$ , dem Grundkreise, schneidet; errichten wir einen zu demselben senkrechten Kugeldiameter  $OC$ , dessen Endpunkte  $o$  und  $C$  von jedem Punkte des Grundkreises um  $90^\circ$  abstehen, so soll der untere Pol  $O$  der Augpunkt sein; wir haben also nur jeden Pol auf der Kugel  $ABCDEF$ ... mit dem Augpunkte  $o$  durch eine gerade Linie zu verbinden; die Durchschnitte  $Abcdef$ ... dieser geraden Linien mit dem Grundkreise geben die stereographischen Projectionen der Pole  $ABCD$ ...

In der Regel wird der Grundkreis senkrecht zu den Flächen einer Zone angenommen, so dass die Projectionen dieser Flächen Punkte der Peripherie des Grundkreises werden.

Die wichtigsten Eigenschaften einer solchen Projection sind nun folgende:

1. Jeder Kreis auf der Kugel wird als Kreis oder als Durchmesser projectirt.

2. Jeder Grosskreis auf der Kugel wird als Kreisbogen projectirt, der den Grundkreis in den Endpunkten eines Durchmessers desselben schneidet oder als Durchmesser selbst; in einem solchen Kreisbogen liegen daher auch die Pole tautozonaler Flächen, z. B.  $AcfA'$ ;  $BdeB'$ ;  $BcfB'$ ;  $AdcA'$  Fig. 7.

3. Nennt man Pol eines Zonenkreises  $HK$ , Fig. 8, jenen Punkt  $P$ , der auf der Kugel von allen Punkten dieses Kreises um  $90^\circ$  absteht (also die Projection einer zu den Zonenflächen senkrechten Fläche), so gilt der Satz:

Der Normalenwinkel zweier Flächen  $H$  und  $K$  ist gleich dem Kreisbogen  $hk$ , der von den verlängerten geraden Linien  $PH$  und  $PK$  am Grundkreise abge schnitten wird.

Fig. 8

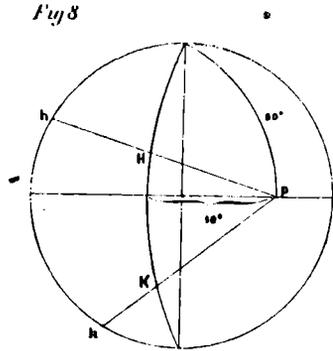
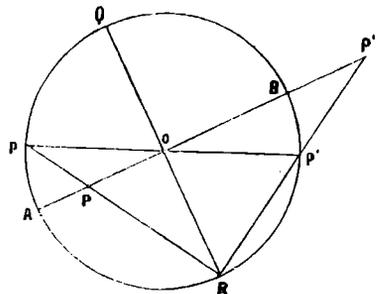


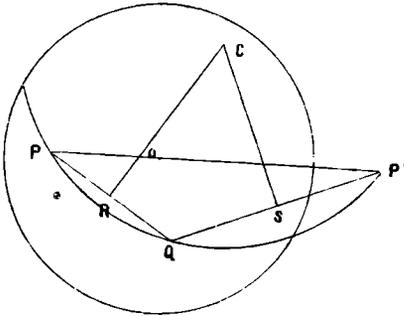
Fig. 9.



Aus diesen drei Eigenschaften ergeben sich alle Regeln zur Construction der stereographischen Projection.

Zunächst sieht man sofort, dass die Normalenwinkel aller durch Punkte des Grundkreises projectirten Flächen durch die zwischen den Polen eingeschlossenen Kreisbögen gegeben sind; dass alle durch das Centrum des Grundkreises gehenden Zonen als Durchmesser projectirt werden; dass ferner der Pol einer solchen Zone wiederum in den Grundkreis fällt und zwar an einen der Endpunkte des zur Zone senkrechten Durchmessers.

Fig 10

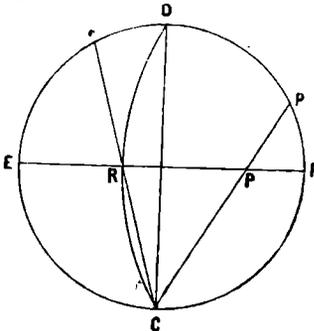


Ist die Projection  $P$  eines Poles gegeben (Fig. 9) und die der parallelen Gegenfläche gesucht, so ist zunächst klar, dass dieselbe ausserhalb des Grundkreises gelegen sein muss; legt man durch  $P$  und den Mittelpunkt  $o$  des Grundkreises eine Zone, so muss der Gegenpol  $P'$  in derselben liegen, da ja eine jede Zone, in der eine Fläche gelegen ist, auch die zu dieser Fläche parallele Gegenfläche enthalten muss; auf dieser Zone  $PO$  haben wir jetzt nur mehr den um  $180^\circ$  von  $P$  abste-

henden Punkt aufzusuchen, um  $P'$  zu erhalten; zu diesem Behufe haben wir nach der obenerwähnten dritten Eigenschaft der Projection von einem der Punkte  $R$  oder  $Q$ , die nach dem früheren die Pole der Zone  $PO$  darstellen, z. B.  $R$ , eine gerade  $RPp$  bis zum Durchschnitt mit dem Grundkreis zu ziehen, suchen den Punkt  $p'$  des Grundkreises auf, der um  $180^\circ$ , den verlangten Winkel, von  $p$  absteht, und ziehen nun eine Gerade,  $Rp'P'$  deren Durchschnitt mit der Zone  $PO$  den Gegenpol von  $P$  gibt.

Sind zwei Pole  $PQ$  gegeben, Fig. 10, und die durch dieselbe gehende Zone gesucht, so sucht man zu einer derselben den Gegenpol, z. B.  $P'$ , der ja ebenfalls in der Zone  $PQ$  liegen muss; durch die drei Punkte  $PQP'$  legt man nach bekannter Methode (Errichtung von Senkrechten in den Halbierungspunkten der Verbindungslinien je zweier Punkte) einen Kreisbogen, der die verlangte Zone darstellt.

Fig 11



Um den Pol einer gegebenen Zone  $CR$  zu finden (Fig. 11) ist zu berücksichtigen, dass derselbe von jedem Punkte des Zonenkreises um  $90^\circ$  abstehen muss; sind nun  $C, D$  die Durchschnittspunkte der Zone mit dem Grundkreise, so ziehen wir den Durchmesser  $CD$  und einen zu diesem senkrechten  $EF$ , und es ist klar, dass der gesuchte Pol in der Zone  $EF$  liegen muss; da er nun von jedem

Punkte der Zone, also auch von  $R$ , um  $90^\circ$  abstehen soll, der Pol der Zone  $EF$  aber einer der Punkte  $C$  oder  $D$  ist, so ziehen wir die Geraden  $CRr$  und  $CPp$  so, dass der Bogen  $rp = 90^\circ$ , und finden dadurch den Pol  $P$  der Zone  $CRD$ .

Damit sind alle diejenigen Hilfsmittel gegeben, die zur Construction und Benützung der Projection benöthigt werden; in der Regel reicht man jedoch mit den einfachsten derselben aus, insbesondere da es bei dieser Projectionsmethode nicht auf die erreichbare grösste Genauigkeit, sondern lediglich auf ein anschauliches Bild des Flächenzusammenhanges ankommt.

Als Schluss dieses Abschnittes mögen noch einige aus dem Zonen-gesetz abgeleitete specielle Regeln und ein Beispiel einer vollständigen Entwicklung gegeben werden.

1. Zone durch zwei Pinakoide

$$\begin{array}{r} 100 \ 100 \\ 010 \ 010 \\ \hline 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1; \ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0; \ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \\ \phantom{0} \phantom{0} \phantom{1} \end{array}$$

[001], also das Zeichen des dritten Pinakoids. Soll eine Fläche  $hkl$  in dieser Zone liegen, so muss

$$h \cdot o + k \cdot o + l \cdot 1 = 0$$

sein, also

$$l = 1$$

das allgemeine Zeichen einer in der Zone  $100 \cdot 010 = [001]$  liegenden Fläche wird daher  $hko$ .

2. Zone durch ein Pinakoid und eine beliebige Fläche

$$\begin{array}{r} hkl \ hkl \\ 100 \ 100 \\ \hline k \cdot o - l \cdot o; \ l \cdot 1 - h \cdot o; \ h \cdot o - k \cdot 1. \\ \phantom{k} \phantom{l} \phantom{k} \\ \phantom{k} \phantom{l} \phantom{k} \end{array}$$

Soll eine dritte Fläche  $xyz$  in dieser Zone  $[oltk]$  liegen, so muss

$$x \cdot o + y \cdot l - k \cdot z = 0$$

oder

$$yl = kz; \quad \frac{y}{z} = \frac{k}{l}.$$

Geht daher eine Zone durch ein Pinakoid, so ist für alle Flächen dieser Zone das Verhältniss jener zwei Indices, die im Zeichen des Pinakoides  $o$  sind, constant.

3. Die unter 1 und 2 gegebenen Regeln sind specielle Fälle einer allgemeineren; und zwar: Zwei Flächen  $(hkl)$  und  $(pqr)$  gegeben, worin

$$\frac{k}{l} = \frac{q}{r};$$

solche zwei Flächen können immer so dargestellt werden, dass ihre Zeichen die Form

$$(euw) \text{ und } (xuv)$$

bekommen, da man ja die drei Indices einer Fläche mit derselben Zahl multipliciren kann, ohne das Zeichen zu verändern.

Für die Zone erhalten wir

$$\frac{euw \quad eww}{xuv \quad xuv} \\ \frac{u \cdot v - v \cdot u; \quad vx - e \cdot v; \quad eu - x \cdot v}{o \quad v(x - e); \quad u(e - x)}$$

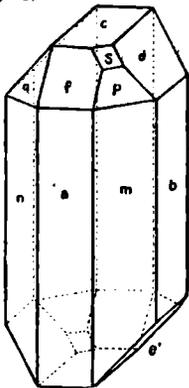
oder, wenn wir durch  $(x - e)$  die drei Zonenindices dividiren  $[ov\bar{u}]$ ; eine Fläche  $(rst)$  liegt in dieser Zone, wenn

$$o \cdot r + v \cdot s - u \cdot t = 0$$

also

$$\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$$

Fig. 12.



Lassen sich also zwei Flächen einer Zone unter dem Zeichen  $(xuv)$  und  $(euw)$  darstellen (oder allgemein, haben zwei gleichstellige Indices in beiden Flächen dasselbe Verhältniss), so lassen sich alle Flächen dieser Zone in der Form  $[pqr]$  darstellen.

Dass auch Regel 2 sich unter die letztere subsumiren lässt, ist klar, da ja das Verhältniss  $o$  unbestimmt ist und daher jeder Zahl entsprechen kann.

Als Beispiel einer Entwicklung durch Zonen wählen wir den Fig. 12 dargestellten Krystall.

Da wir annehmen, dass keine Messungen an demselben vorliegen, sondern nur die Angaben der Zonen, werden wir in der Projection Fig. 13 (auf folgender Seite) denselben als trielin voraussetzen; in diese Projection tragen wir die Flächen nach der

Reihenfolge ein, in der sie bestimmt werden.

Zur Bestimmung mögen gegeben sein die Zonen :

*bman; bdec; afc; apd; bpfq; cspm; dsfu; cqn; aqe.*

Das Vorhandensein derselben wird hauptsächlich an dem Parallelismus der betreffenden Kanten wahrgenommen; wo eine körperliche Kante fehlt, wie bei dem Winkel *aq*, hilft man sich durch Drehung des Krystals um die vorausgesetzte Zonenaxe; alle Flächen, die bei einer Drehung um dieselbe Axe einspiegeln, sind tautozonal.

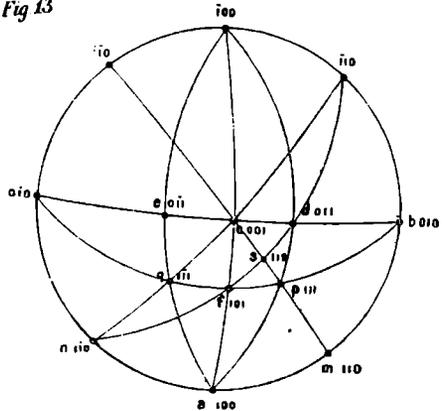
Um nun die Combination aufzulösen, ist es zuerst nothwendig, ein Axensystem anzunehmen; man wird dabei auf die wirkliche oder scheinbare Symmetrie des Krystalles Rücksicht nehmen in der Weise, dass, wo ein minder symmetrisches System in Ausbildung und Flächenneigung sich einem höher symmetrischen nähert, diese Analogie möglichst gewahrt bleibt.

Wir wählen also die drei Flächen *a b c* zu Axenebenen, deren Durchschnittslinien die krystallographischen Axen geben; und projeciren dieselben (Fig. 13) derart, dass die Zone *ab* in den Grundkreis fällt.

Dabei kommt es auf Genauigkeit der Winkelverhältnisse natürlich nicht an, wenn es sich nur um Lösung der Combinationen handelt. Die Flächen tragen wir in die Projection in der Reihenfolge ein, in der sie bestimmt werden, also zunächst *abc*.

Die Flächen *abc* erhalten nun die den Pinakoiden zukommenden Zeichen 100 010 001.

Fig 13



Zur Fixirung einer Grundgestalt haben wir noch die Axenverhältnisse zu bestimmen; diess möge durch die Annahme von *p* als (111) geschehen; die Axenabschnitte der Fläche *p* liefern uns also die Grössen *oA oB oC*, auf welche die Parameter jeder anderen Fläche bezogen werden.

Dass die Indices von *p* 111 sein müssen, erhellt aus den Gleichungen (pag. 141), worin die Indices einer Fläche *hkl* bestimmt werden zu

$$h = \frac{oA}{oh} \quad k = \frac{oB}{ok} \quad l = \frac{oC}{ol}.$$

Durch Substitution der Abschnitte *oA oB oC* in dieser Gleichung erhalten wir

$$h = k = l = 1. .$$

Nachdem so die Grundform und die Axen des Krystals bestimmt sind, können die Zeichen der Flächen entwickelt werden.

Bestimmung von  $m$ .

$m$  liegt in den Zonen  $bman$  und  $c...pm$ . Damit eine Fläche in ersterer Zone liege, ist es nothwendige und hinreichende Bedingung, dass sie das Zeichen

$$h k o$$

besitze, d. h. der Axe  $c$  parallel sei, wie sich auch aus Herstellung der Zonengleichung ergibt.

Für die zweite Zone haben wir die Bedingung

$$\frac{k}{h} = 1,$$

da, wie wir gesehen, die Gleichheit desselben Indexverhältnisses in zwei Flächen einer Zone die Gleichheit desselben für alle Flächen der Zone bedingt, also

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{1} = \frac{0}{0}.$$

Diess ergibt sich auch aus der Zonengleichung, denn

$$\begin{array}{r} 111 \quad 111 \\ 001 \quad 001 \\ \hline 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1; 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \end{array}$$

gibt  $[1\bar{1}0]$  als Zonengleichung, oder

$$1 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \text{ oder } x = y$$

als Bedingung für die Tautozonalität einer Fläche  $xyz$  mit 001 und 111. das Zeichen  $hko$  von  $m$  verwandelt sich durch diese Bedingung in  $(1\bar{1}0)$ .

Ebenso wird für  $d$  die Lage in den Zonen  $bdc$  und  $apd$  zu Grunde gelegt; erstere Zone gibt als Bedingung den ersten Index = 0, also  $okl$ ; die zweite die Gleichheit des zweiten und dritten Index

$$\frac{k}{l} = \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = 1;$$

also das Zeichen  $(011)$ .

Endlich wird auf dieselbe Weise die Fläche  $f$  durch die Zone  $afc$  als  $hol$  und durch die Zone  $bpf$  als 101 bestimmt wegen

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = 1.$$

Dabei ist natürlich festzuhalten, dass der Quotient  $\frac{0}{0}$  jeden beliebigen, rationalen Werth erhalten kann, der erst durch die zweite Fläche fixirt wird.

Für die Fläche  $n$  haben wir die Zonen  $bman$ , wodurch das Zeichen  $kko$  wird und  $dfn$ , für letztere erhalten wir

$$\begin{array}{r} 011 \ 011 \\ 101 \ 101 \\ \hline 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1; 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1; 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{array}$$

oder  $[11\bar{1}]$ , also als Bedingung

$$h \cdot 1 + k \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 0 \text{ oder } h = -k;$$

dieser Bedingung genügen  $1\bar{1}0$  und  $\bar{1}10$ , wovon ersteres Zeichen für die vordere, letzteres für die entgegengesetzte rückwärtige Fläche gehören.

Zur Bestimmung von  $q$  haben wir die Zonen  $eqn$  und  $bpfq$ , erstere gibt (wenn  $hkl$  das Zeichen von  $q$ )

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{-1} = \frac{0}{0} = -1 \text{ also } (h\bar{h}l)$$

letztere

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ oder } (h\bar{h}h)$$

was abgekürzt,  $1\bar{1}1$  gibt.

Fläche  $e$  liegt in den Zonen  $bdce$ , weshalb  $h = 0$ ; und in  $age$ , wodurch

$$\frac{k}{l} = \frac{-1}{1} = \frac{0}{0} = -1$$

also hat  $e$  das Zeichen  $(0\bar{1}1)$ .

Nun ist noch  $s$  in den Zonen  $mpsc$  und  $dsfn$  zu bestimmen; erstere Zone gibt

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

also allgemeines Zeichen  $hhl$ , letztere hat als Zonenindices  $[1\bar{1}\bar{1}]$  also,

$$h + h - l = 0 \text{ oder } 2h = l,$$

welcher Bedingung durch (112) genügt wird.

Somit sind die sämtlichen Formen dieser Combination bestimmt.

Es können nun allerdings Fälle vorkommen, wo die vorhandenen Zonen nicht ausreichen, alle Flächen einer Combination zu bestimmen, doch sind dieselben selten und treten fast nur bei wenigen Substanzen auf.

Statt der obigen Wahl einer die sämtlichen Axenverhältnisse bestimmenden Fläche (111) kann man natürlich auch zwei Domen in zwei Pinakoidzonen anwenden, z. B.  $110$ , wodurch  $a : b$ , und  $101$ , wodurch  $a : c$  bestimmt werden.

Bei den einfacheren und häufiger vorkommenden Flächen wird, wie wir oben gesehen haben, selbst die sehr einfache Berechnung des Zeichens aus zwei Zonensymbolen durch kreuzweise Multiplication überflüssig, indem sich zum mindesten die Bedingung für die eine der Zonen

unmittelbar in dem allgemeinen Zeichen der Fläche ausdrücken lässt, so dass durch Substitution in die Gleichung

$$hx + ky + lz = o$$

die Indices  $hkl$  vollständig bestimmt werden.

## II. Abschnitt.

### Die Symmetrie der Krystallsysteme.

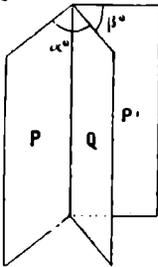
§. 1. Ableitung der Systeme aus dem Gesetze der Rationalität der Indices.

Die Rationalität der Indices ist für die Möglichkeit einer Krystallfläche nicht nur, wie oben erwähnt, nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingung.

Es ist also jede Fläche eine mögliche, deren Indices rationale Zahlen sind.

Ein Complex von Flächen nun, der dem Gesetz der Rationalität der Indices gehorchen soll, muss aber auch allen Folgerungen entsprechen, welche aus diesem Gesetz auf mathematischem Wege ableitbar sind.

Fig. 13a

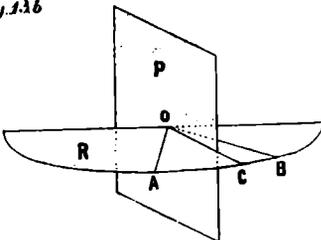


Die Durchführung dieser Deduction, welche hier nur angedeutet werden kann, führt auf die verschiedenen Elemente der Symmetrie, insbesondere den Begriff: Symmetrieebene.

Eine Symmetrieebene hat die Eigenschaft, dass die physikalischen Verhältnisse auf beiden Seiten von ihr gleich sind.

Die Identität der physikalischen Eigenschaften zweier Flächen oder Linien wird also bedingt durch die Gleichheit ihrer Lage gegen die Symmetrieebene; und zwar ist bei zwei Ebenen diese Bedingung erfüllt, wenn sie mit der Symmetrieebene *tautozonal* und zu beiden Seiten derselben gelegen, gleiche Winkel mit derselben bilden — Fig. 13 a — wo die Winkel  $P : Q = \alpha^\circ$  und  $P' : Q = \beta^\circ$  einander gleich sind.

Fig. 13b



Zwei Linien  $oA$  und  $oB$ , Fig. 13 b, genügen der Bedingung, wenn sie, zu beiden Seiten der Symmetrieebene  $P$  gelegen, mit derselben gleiche Winkel einschliessen und durch dieselben eine zur Symmetrieebene senkrechte Ebene  $R$  gelegt werden kann,  $arc AC = arc CB$ .

Die Ableitung der Krystallsysteme geschieht nun nach folgender Methode:

Angenommen, zwei mögliche Flächen eines Krystalls seien symmetrisch nach einer Ebene; es wird untersucht, ob nicht daraus auch die Symmetrie nach einer andern Ebene folgt; angenommen, eine Zone sei symmetrisch nach einer oder mehreren Flächen (d. h. zu jeder Fläche dieser Zone ist auch eine mit ihr symmetrische möglich); es wird gefragt, ob daraus nicht auch die Symmetrie nach andern Ebenen folgt; d. h. ob nicht zu jeder möglichen Fläche der gegebenen Zone auch eine andere Fläche möglich ist, die nach den präsumtiven, aufzusuchenden Ebenen mit ihr symmetrisch ist.

Das Kriterium der Möglichkeit einer Fläche ist dabei immer die Rationalität ihrer Indices.

Auf diesem Wege fortschreitend erkennen wir, dass nur jene Komplexe von Ebenen krystallographisch möglich sind, welche einem der sieben, durch die Anzahl und Lage ihrer Symmetrieebenen charakterisirten Krystalssysteme angehören; dabei verstehen wir unter Symmetrieebene eines Krystalls eine Ebene, nach der alle möglichen Flächen des Krystalls symmetrisch sind, so dass es zu jeder möglichen Krystallfläche noch eine solche gibt, welche bezüglich der Symmetrieebene mit ihr symmetrisch ist.

Es zeigt sich nun, dass nur folgende Komplexe möglich sind:

1. Keine Symmetrieebene vorhanden, Triklines System.

2. Eine Symmetrieebene *B*: Fig. 14, Monoklines System.

3. Drei aufeinander senkrechte, von einander verschiedene Symmetrieebenen *A*, *B*, *C*, Fig. 15: Rhombisches System.

4. Drei tautozonale, unter  $120^\circ$  resp.  $60^\circ$  gegeneinander geneigte, gleichwerthige Symmetrieebenen *AA'*, Fig. 16: Rhombödrisches System.

5. Fünf Symmetrieebenen; vier davon tautozonal, unter  $90^\circ$  und  $45^\circ$  gegeneinander geneigt, je zwei unter  $90^\circ$  abstehende gleichwerthig, *AA'* und *BB'* Fig. 17; die fünfte *C*, zu allen vieren senkrecht, mit ihnen ungleichwerthig: Tetragonales System.

6. Sieben Symmetrieebenen; sechs davon tautozonal, unter  $30^\circ$  und  $60^\circ$  gegeneinander geneigt, je drei unter  $60^\circ$  abstehende gleichwerthig, *AA'A''* und *BB'B''* Fig. 18; die siebente *C* zu allen sechs senkrecht, mit ihnen ungleichwerthig: Hexagonales System.

7. Neun Symmetrieebenen; drei davon, *AA'A''*, Fig. 19, zu einander senkrecht, gleichwerthig; die übrigen sechs untereinander

Fig. 14

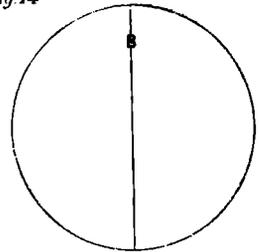


Fig. 15

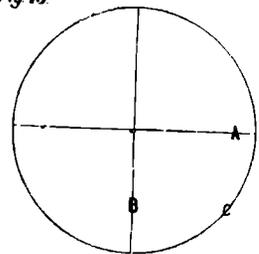


Fig. 16

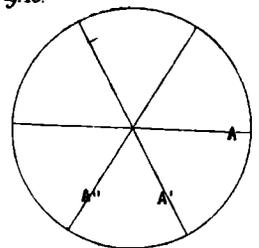


Fig. 17.

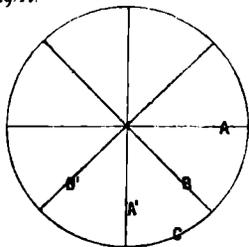


Fig. 18.

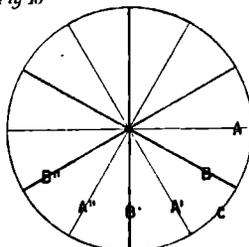
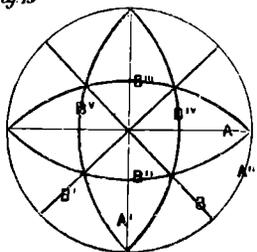


Fig. 19.



gleichwerthigen  $BB'B'' \dots B^V$  zu je zwei tautozonal und unter  $45^\circ$  in die Zone je zweier  $A$  eingeschaltet: Tesserales System.

§. 2. Eigenschaften der Systeme.

Aus der obigen Angabe der Symmetrieverhältnisse in den einzelnen Krystallsystemen wollen wir zunächst die zu einer Form gehörigen einzelnen Flächen sowie die zweckmässigsten Annahmen bei Wahl der Krystallaxen ableiten.

Zu Axen können wir drei beliebige Kanten oder Zonenaxen wählen, die durch drei mögliche, miteinander nicht tautozonale Flächen des Krystalls gebildet werden.

Wir werden jedoch wegen des Vorhandenseins von Symmetrieebenen die Axen so wählen, dass sie womöglich ebenfalls symmetrisch zu den Symmetrieebenen gelegen sind, wodurch dann, wie wir sofort sehen werden, alle Flächen einer Form durch verschiedene Anordnung derselben numerischen Indices erhalten werden; unter Form begreifen wir nämlich den Complex aller jener Flächen, die mit einander nach den Symmetrieebenen des betreffenden Krystalls symmetrisch sind, die also sämmtlich die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzen.

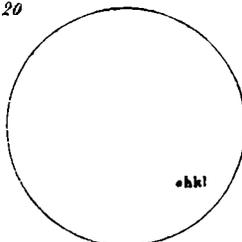
Bezüglich der Axenwahl bemerken wir nur noch, dass es aus theoretischen Gründen, die zuerst durch Frankenheim entwickelt wurden, nothwendig erscheint, die Axen so zu wählen, dass jeder spitze Axenwinkel grösser als  $60^\circ$ , jeder stumpfe kleiner als  $120^\circ$  wird, was jederzeit möglich ist.

1. Triklinen System. Keine Symmetrieebene. Die Wahl der Axen ist willkürlich, ebenso die der Fläche 111, wodurch die Axenlängen bestimmt werden.

$$a \geq b \geq c; \quad \xi \geq \eta \geq \epsilon$$

5 Elemente sind unbestimmt (zwei Axenverhältnisse, drei Axenwinkel). Weil keine Symmetrieebene vorhanden ist, bildet eine Fläche  $hkl$  Fig. 20, mit ihrer parallelen zusammen eine Form.

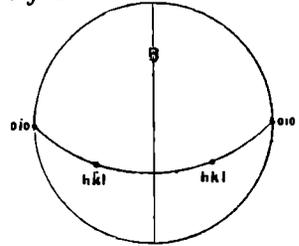
Fig. 20.



Bei der Wahl der Axen wird man nur in den Fällen, wo Aehnlichkeit der Winkel und der Flächenausbildung mit höher symmetrischen Systemen, z. B. dem monoklinen oder rhombischen, vorhanden ist, diese Analogie berücksichtigen.

2. Monoklines System. Eine Symmetrieebene, *B* Fig. 21. Zunächst wählen wir diese Ebene zu einer der Axenebenen und zwar zur *XZ*-Ebene, wodurch sie das Zeichen 010 erhält. Zu jeder Fläche *hkl* ist nun eine zweite möglich, die mit ihr symmetrisch gegen die Symmetrieebene 010 gelegen ist, daher, wie leicht ersichtlich, das Zeichen  $\bar{h}kl$  erhält; diese zwei Flächen mit ihren beiden Gegenflächen bilden zusammen die allgemeine Form im monoklinen System. Durch je zwei solche Paare von Flächen ist eine Zonenaxe bestimmt, welche, wie ebenfalls leicht einzusehen, in der Symmetrieebene liegen muss, da ja 010 in der Zone [(*hkl*) ( $\bar{h}kl$ )] liegt; nimmt man zwei solche Zonenaxen zu Axen *X, Z*, so ist sofort klar, dass die Axenwinkel werden

Fig 21

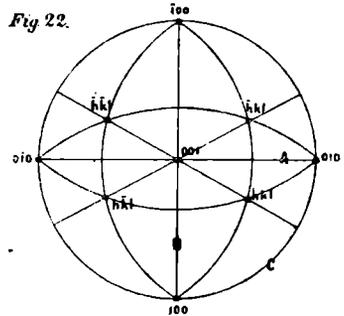


$$XY = \zeta = 90^\circ; YZ = \xi = 90^\circ; (XZ = \eta) \geq 90^\circ;$$

eine vierte Fläche gibt die Axenabschnitte  $a \geq b \geq c$  und wir haben in diesem System drei unbekannte Elemente, zwei Axenverhältnisse und einen Axenwinkel.

3. Rhombisches System. Drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen *ABC* Fig. 22, welche wir zu Axenebenen mit den Zeichen 100, 010, 001 wählen. Dadurch werden die drei Axen auf einander senkrecht und wir haben nun noch durch eine vierte Ebene die Axenlängen zu bestimmen, so dass

Fig 22.



$$a \geq b \geq c; \xi = \eta = \zeta = 90^\circ$$

werden; in diesem Systeme haben wir daher zwei unbekannte Elemente,

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c};$$

gleichwerthig werden die vier Flächen

$$hkl; \bar{h}kl; h\bar{k}l; h\bar{k}\bar{l}$$

und ihre Gegenflächen, so dass die allgemeine Form eine achtfächige, rhombische Pyramide ist.

Ueber die Wahl der drei Pinakoide bestehen vielfache Annahmen; Grailich und von Lang nahmen  $a > b > c$ ; Schrauf wählt bei optisch untersuchten Substanzen 001 senkrecht zur Bisectrix, 100 und 010 so, dass  $a > b$ ; andere Autoren binden sich an kein Princip, sondern folgen der ersten Aufstellungsweise.

4. Rhomboëdrisches System. Drei tautozonale, gleichwerthige, unter  $60^\circ$  gegeneinander geneigte Symmetrieebenen *A A' A''*,

Fig 23

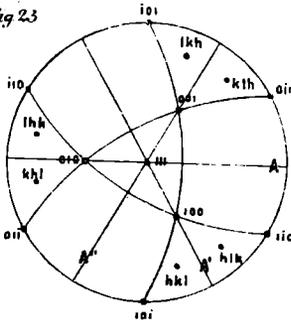


Fig. 23. In diesem Falle ist es nicht zulässig, die Symmetrieebenen zu Axenebene zu wählen, weil sie tautozonal sind; um die Symmetrie der Bezeichnungsweise zu wahren, wählen wir drei Flächen des Krystalls, die bezüglich der Symmetrieebenen symmetrisch liegen, also eine Form bilden, zu Axenebenen; und zwar sollen die Flächen 100, 010, 001 zu je einer Symmetrieebene senkrecht sein, weil nur eine derartige Form aus nur drei Flächen (mit ihren Gegenflächen) besteht, jede andere aus sechs, respective zwei. Zur Bestimmung der Axenlängen wählen wir die zur Zonenaxe der Symmetrieebenen senkrechte, in Folge dessen gegen die drei Axenebenen gleich geneigte Fläche als 111; dadurch wird

$$a = b = c; (\xi = \eta = \zeta) \cong 90$$

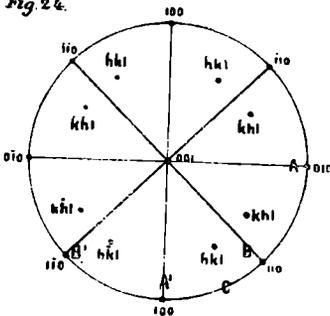
eine einzige Grösse, nämlich die der Axenwinkel, unbestimmt.

Die drei Symmetrieebenen erhalten die Zeichen:

$$10\bar{1} = A; 01\bar{1} = A'; \bar{1}10 = A'';$$

das Zeichen einer jeden, mit den Symmetrieebenen tautozonalen Fläche (Prisma nach gewöhnlicher Bezeichnung, abweichend vom Gebrauche in den anderen Krystallsystemen) unterliegt der Bedingung  $h + k + l = 0$ , da das Zeichen der Symmetriezone [111] ist. Die übrigen Formen sind Skalenoëder, allgemeinste Form dieses Systems mit 6 Flächen  $hkl$  (siehe Figur) und ihren 6 Gegenflächen; Rhomboëder, deren Flächen je einer Symmetrieebene senkrecht sind; Basis 111.

Fig 24.



Es ist ersichtlich, dass der Axenwinkel  $\xi$  dem ebenen Flächenwinkel an der Spitze des Grundrhomboëders (100) gleich ist.

5. Tetragonales System. Vier tautozonale Symmetrieebenen, unter  $45^\circ$  gegeneinander geneigt, je zwei abwechselnde  $AA'$  und  $BB'$ , Fig. 24, gleichwerthig. Eine fünfte zu ihnen senkrecht, ungleichwerthig  $C$ . Zu Axenebenen wählen wir zwei auf einander senkrechte, gleichwerthige Symmetrieebenen, z. B.  $AA'$ , und die zu ihnen senkrechte einzelne Symmetrieebene  $C$ , letztere als Ebene der  $XY$ , 001. Zur Bestimmung der Axenlängen wählen wir eine zu einer der intermediären Symmetrieebenen senkrechte Fläche 111. Dadurch werden die Elemente

senkrechte Fläche 111. Dadurch werden die Elemente

$$\xi = \eta = \zeta = 90^\circ; (a = b) \cong c,$$

daher nur eine Unbekannte,  $\frac{a}{c}$ .





Tritt daher ein Lichtstrahl von beliebigem Schwingungszustand in ein solches isotropes Medium ein, so kann sich wohl, entsprechend dem Einfallswinkel, seine Fortpflanzungsrichtung und entsprechend seiner Farbe und der Molecularconstante, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ändern; der Schwingungszustand jedoch bleibt erhalten. Der Schwingungszustand des Lichtstrahls heisst vollständig, theilweise polarisirt oder unpolarisirt, je nachdem das ganze Licht, ein Theil desselben in einer constanten Bahn schwingt, oder diese Bahn in einem unendlich kurzen Zeitraume alle möglichen transversalen Lagen annimmt; im ersteren Falle, wo das ganze Licht eine constante Schwingungsbahn besitzt, sagen wir wiederum, das Licht sei geradlinig, circular oder elliptisch polarisirt, je nachdem seine Oscillationsbahn eine zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte gerade Linie, Kreislinie oder Ellipse ist.

Es ist also die Lichtbewegung in einem isotropen Medium abhängig von der des einfallenden Lichtes, dem Einfallswinkel und einer Molecularconstante.

In einem krystallisirten Medium, worin die Dichte mit der Richtung variabel gedacht werden kann, können sich (im allgemeinen Falle) in jeder bestimmten Richtung nur zwei Lichtstrahlen von bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit (für jede Farbe) und bestimmter Schwingungsrichtung fortpflanzen; umgekehrt wird ein in ein krystallinisches Medium eintretender Lichtstrahl nicht nur von seiner Richtung abgelenkt, sondern in zwei abgelenkte Strahlen getheilt, von denen jede nach der Richtung im Krystall veränderliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsrichtung besitzt.

Ebenso, wie nun beim Durchgange durch ein isotropes Medium die Intensität des Lichtes geschwächt wird, und zwar verschieden stark für die verschiedenen Farben, ebenso ist dies auch bei krystallinischen Medien der Fall, nur hängt hier die für verschiedene Farben ungleiche Absorption auch noch von der Richtung im Krystalle ab; es gilt hier daselbe wie von der Schwingungsweise und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Derselben Richtung im Krystalle entsprechen also zwei bestimmte Strahlen mit bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Schwingungsrichtung und Absorption; und ein in einen Krystall eintretender Lichtstrahl zerfällt in zwei von bestimmter verschiedener Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit, Schwingungsrichtung und Absorption.

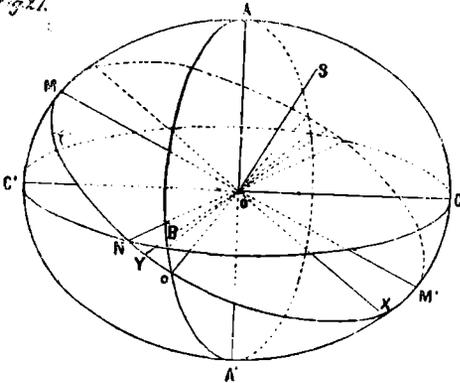
### §. 2. Polarisationsellipsoid.

Das Gesetz, nach welchem sich die ganze Lichtbewegung in Krystallen bestimmt, lässt sich, soweit es für die vorliegenden Zwecke nöthigt wird, in Folgendem aussprechen:

In jedem Krystalle lässt sich ein dreiaxiges Ellipsoid construiren von der Art, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Schwingungsrichtung der zwei Lichtstrahlen, welche sich in einer gegebenen Richtung im Krystalle bewegen können, durch die grosse und kleine Axe jener Ellipse gegeben sind, welche entsteht, wenn man im Mittelpunkt des Ellipsoides eine Ebene senkrecht zu der gegebenen Fortpflanzungsrichtung der beiden Lichtstrahlen errichtet und dieselbe bis zum Durchschnitte mit dem Ellipsoid vergrössert.

Sind also  $oA$ ,  $oB$ ,  $oC$  Fig. 27 die zu einander senkrechten Hauptaxen des Ellipsoides,  $So$  die durch den Mittelpunkt gelegte Richtung, in

Fig. 27.



der sich die beiden Lichtstrahlen bewegen sollen, so legen wir durch  $O$  eine zu  $oS$  senkrechte Ebene, welche das Ellipsoid in den Punkten  $MNoM'$  . . . schneidet, welche Punkte einer Ellipse angehören, deren grosse und kleine Halbaxe  $oX$  und  $oY$  sind; von den beiden Strahlen, die sich nach  $So$  fortpflanzen, hat nun der eine die Schwingungsrichtung  $oX$  und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\frac{1}{0}$ ,

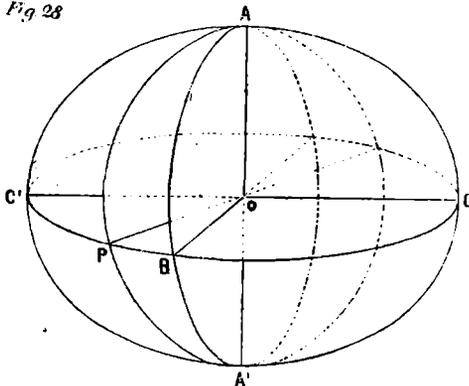
der andere ebenso  $oY$  und  $\frac{1}{0}$ .

Die Lage und Länge der Hauptaxen dieses Ellipsoides ist im Allgemeinen für jede Farbe eine andere. Auch die Absorption des Lichtes in einer beliebigen Richtung lässt sich aus der der Hauptaxen bestimmen. Mit den Absorptionscoefficienten der Hauptaxen construiren wir wiederum ein Ellipsoid, dessen Axen mit denen des Polarisationsellipsoides übereinstimmen. Die Absorptionscoefficienten für die zwei einer Richtung entsprechenden Lichtstrahlen werden abermals durch die Durchschnittsellipse, diesmal mit dem Absorptionsellipsoid bestimmt; die grosse und kleine Axe dieser Ellipse coincidiren zwar nicht genau, doch näherungsweise mit denen der Schwingungsrichtungen.

Im allgemeinen Falle, den wir zunächst besprechen wollen, sind die drei Axen des Ellipsoides von ungleicher Länge; sie werden Polarisationsaxen oder Elasticitätsaxen genannt; unter letzteren versteht man auch speciell ihre reciproke Länge, und zwar,

$$a = \frac{1}{oA}; b = \frac{1}{oB}; c = \frac{1}{oC}$$

Fig. 28



wobei  $a > b > c$  gewählt wird; es sind daher die Längen  $oA, oB, oC$  selbst den Hauptbrechungsquotienten proportional.

Eine Axenebene, zwei Elasticitätsaxen enthaltend, heisst Hauptschnitt und ist zur dritten Axe senkrecht.

Eine zu einer Axe, z. B.  $oC$  Fig. 28 parallele Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse  $CPC'$ , deren eine Axe mit der genannten Elasticitätsaxe  $oC$  coincidirt, deren

andere Axe  $oP$  dazu senkrecht im Hauptschnitt  $ABo$  liegt.

Eine zu allen drei Elasticitätsaxen geneigte Ebene Fig. 27 *MNO* schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Axen keiner Elasticitätsaxe parallel sind.

Im allgemeinen Falle  $a > b > c$  existirt im Hauptschnitt *AoC* Fig 29 jederzeit ein Radius *Ob*, dessen Länge der mittleren Elasticitätsaxe *OB* gleich ist; legt man eine Ebene *Bob* durch letztere und diesen Radius, so ist deren Durchschnitt mit dem Ellipsoid ein Kreis; die Normale *oa* zu dieser Kreisfläche liegt im Hauptschnitte der grössten und kleinsten Elasticitätsaxen *OAC* und wird optische Axe genannt.

Das dreiaxige Ellipsoid besitzt zwei optische Axen, die in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticitätsaxen symmetrisch zu diesen beiden gelegen sind, *oa* und *oa'* Fig. 29.

Die optischen Axen bilden mit einander zwei supplementäre Winkel, einen spitzen  $2Va$  und einen stumpfen  $2Vo$ , wobei

$$2Va = 180 - 2Vo$$

welche durch die Axen *a* und *c* halbirt werden, und zwar wird jene Axe, welche den spitzen Axenwinkel halbirt, erste Mittellinie (*Bissectrix*), die den stumpfen Winkel halbirende zweite Mittellinie genannt, wobei wieder zwei Fälle möglich sind.

- |                              |                           |                    |
|------------------------------|---------------------------|--------------------|
| 1. Mittellinie $\frac{a}{c}$ | 2. Mittellinie <i>c</i> ; | negativer Krystall |
| „ $\frac{c}{a}$              | „ <i>a</i>                | positiver „        |

Der erstere Fall ist in Fig. 29 angenommen; Fig. 30 gibt eine Skizze des letzteren.

Nachdem das Wesen der Doppelbrechung in einer Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungsrichtung der zwei in derselben Richtung fortpflanzbaren Lichtstrahlen besteht, ist ohne weiters klar, dass längs der optischen Axen die Doppelbrechung verschwinden muss; die Normalebene auf einen Lichtstrahl nämlich, der in der Richtung einer optischen Axe sich fortpflanzt, schneidet das Ellipsoid in einem Kreise; die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtstrahlen, durch zwei Radien des Kreises gegeben, werden einander gleich; die

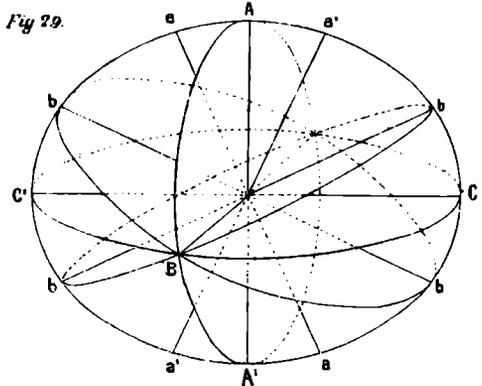
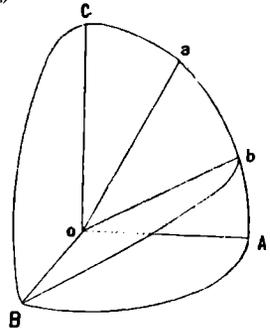


Fig.30

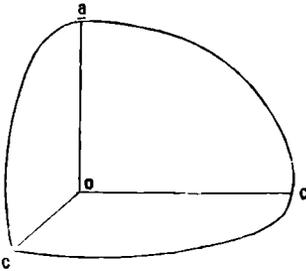


werden einander gleich; die

Schwingungsrichtungen werden unbestimmt, d. h. bleiben ungeändert, wie sie vor Eintritt in das krystallinische Medium waren.

Besitzt ein Krystall eine Symmetrieebene, so muss dieselbe für jede Farbe mit einem Hauptschnitt des Ellipsoides zusammenfallen, da ein dreiaxiges Ellipsoid nur nach seinen Hauptschnitten symmetrisch ist; diese Coincidenz muss jedoch nicht für alle Farben denselben Hauptschnitt treffen; so kann beispielsweise für rothes Licht der Hauptschnitt  $bc$ , für blaues  $ac$  in die Symmetrieebene fallen. Werden zwei Elasticitätsaxen desselben Ellipsoides einander gleich, so wird ihr Hauptschnitt ein Kreis und die beiden optischen Axen reduciren sich auf eine, nämlich die zu jenem Hauptschnitte senkrechte dritte Elasticitätsaxe, das Ellipsoid wird ein Rotations-Ellipsoid.

Fig. 31.

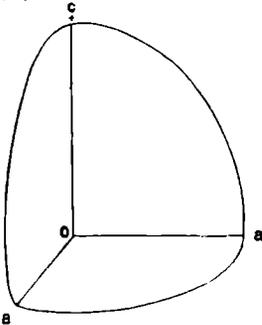


geneigt sind. Einaxige Ellipsoide oder abgeplattete, je nachdem

$b = c$ ;  $\overline{a}$  optische Axe; negative Krystalle Fig. 31.  
 $\overline{a} = b$ ;  $\overline{c}$  „ „ positive „ Fig. 32.

Werden alle drei Elasticitätsaxen des Ellipsoides einander gleich, so reducirt sich dasselbe auf eine Kugel; jeder Durchschnitt mit einer Ebene wird ein Kreis, alle Axen derartiger Kreise werden einandergleich; ein derartiger Krystall besitzt also nur einfache Brechung und keine bestimmten Schwingungsrichtungen, das heisst, es bleibt die Schwingungsrichtung des in den Krystall eintretenden Lichtstrahles unverändert.

Fig. 32.



Wie oben schon erwähnt, lassen sich auch die Absorptionsverhältnisse im ganzen Krystall bestimmen, wenn sie für die drei Elasticitätsaxen gegeben sind; wenn man aus den drei Haupt-Absorptionsconstanten (einer bestimmten Farbe) als Axen ein Ellipsoid construirt, so findet man genau wie am Polarisationsellipsoid die Absorptionswerthe für eine bestimmte Richtung im Krystall durch Legung einer Normalebene und Bestimmung der Axen der dadurch entstehenden Durchschnittsellipse.

Bestimmung der Axen der dadurch entstehenden Durchschnittsellipse.

### §. 3. Optisches Verhalten planparalleler Platten.

Es soll zunächst das Verhalten planparalleler Krystallplatten in geradlinig polarisirtem, parallelen Lichte bei senkrechter Incidenz betrachtet werden.

Durch irgend eine Vorrichtung (Nicol'sches Prisma, Herapathit, Turmalinplatte) sei das einfallende, parallele Licht geradlinig polarisirt; dasselbe falle senkrecht auf eine planparallele Krystallplatte. In Folge der senkrechten Incidenz tritt dieser Lichtstrahl (als solchen können wir paralleles Licht immer behandeln) ungebrochen in den Krystall ein; nach dieser bestimmten Richtung können sich aber im Krystall nur zwei Strahlen fortpflanzen, deren Schwingungsrichtungen nach §. 2 dieses Abschnittes bestimmt werden, indem wir die Plattenebene, die ja zum Wege des Lichtstrahles senkrecht ist, mit dem Polarisationsellipsoid zum Durchschnitt bringen.

Nach diesen zwei auf einander senkrechten Geraden muss nun der eintretende Lichtstrahl in zwei Componenten zerlegt werden, welche nun denselben Weg durch den Krystall hindurch verfolgen, nach dem Austritt aus demselben aber auf eine zweite polarisirende Vorrichtung fallen, welche wie der Polarisirer nur nach einer bestimmten Geraden schwingendes Licht durchlässt, den Analyseur.

Hier werden die beiden Lichtstrahlen derart zerlegt, dass von jedem nur die in die Schwingungsebene des Analyseurs fallende Componente aus letzterem heraustritt; diese beiden Componenten endlich sind nun beide geradlinig polarisirt, haben gleiche Schwingungsrichtung und dieselbe Bahn, und setzen sich daher zu einem einzigen, geradlinig polarisirten Lichtstrahl mit derselben Schwingungsrichtung wie Componenten und Analyseur, zusammen.

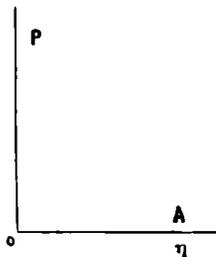
Wir nehmen nun an, dass Polarisirer und Analyseur so gestellt sind, dass ihre Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, welche Stellung ein für allemal vorausgesetzt werden möge.

Drehen wir nun die Krystallplatte in ihrer eigenen Ebene, bis ihre Schwingungsrichtungen die eine  $o\xi$  Fig. 33 mit der des Polarisirer  $oP$  die andere  $o\eta$  mit der des Analyseur  $oA$  zusammenfallen, so ergiebt sich Folgendes:

Aus dem Polarisirer tritt geradlinig polarisirtes, nach  $oP$  schwingendes Licht; beim Eintritt in den Krystall wird dasselbe in seine Componenten nach  $o\xi$  und  $o\eta$ , den Schwingungsrichtungen des letzteren, zerlegt, dabei entfällt ersichtlicherweise in die Richtung  $o\eta$  gar keine Componente, sondern der Strahl geht, nach  $o\xi$  schwingend, durch die Platte und tritt aus demselben mit der Schwingungsrichtung  $o\xi$  aus; fällt auf den Analyseur; wird hier zerlegt in zwei Componenten, von denen jedoch nur die parallel  $oA$  durchgelassen wird; parallel  $oA$  gibt jedoch  $o\xi$  gar keine Componente; das heisst, aus dem Analyseur tritt in diesem Falle gar kein Licht aus.

Wir sehen also, dass eine beliebige planparallele Krystallplatte zwischen gekreuzten Polarisireuren dunkel erscheint, sobald ihre

Fig 33



Schwingungsrichtungen mit denen des Analyseur und Polariseur coïncidiren.

Um die Absorption zu beobachten, haben wir in der Dunkelstellung der Platte entweder Analyseur oder Polariseur zu entfernen; in diesem Falle erscheint nur die der einen Schwingungsrichtung der Platte entsprechende Farbe; der Vorgang hierbei erklärt sich ganz analog dem Vorhergehenden.

Es ist ohneweiters klar, dass eine zu einer optischen<sup>a</sup> Axe senkrechte Platte in allen Stellungen gegen die gekreuzten Polariseure dunkel erscheint.

Bezüglich des Verhaltens planparalleler Platten in einem monochromatischen Lichtkegel bei gekreuzten Polarisuren bemerken wir nur, dass optische Axen durch ein System von nahezu concentrischen Ringen angezeigt sind, durch deren Mittelpunkt ein dunkler, geradliniger oder hyperbolischer Balken oder ein dunkles Kreuz erscheint.

Die Erscheinungen im weissen Lichte werden bei den einzelnen Systemen besprochen werden.

#### §. 4 Optisches Verhalten in den einzelnen Krystallsystemen.

Wie oben schon erwähnt wurde, ist die Lage der optischen Hauptschnitte und die Grösse der Elasticitätsaxen für die verschiedenen Farben eine verschiedene. Eine Coïncidenz findet nur in dem Falle der Existenz einer oder mehrerer Symmetrieebenen statt, da eine solche jederzeit ein optischer Hauptschnitt sein muss.

##### 1. Triklines System. Keine Symmetrieebene.

Ueber die Lage des Polarisations-Ellipsoïdes für die verschiedenen Farben lässt sich gar nichts a priori bestimmen; die Elasticitätsaxen sind gegen die Krystallaxen geneigt; alle optischen Hauptschnitte sind dispergirt, d. h. haben für jede Farbe eine andere Lage. Im allgemeinen ist die Dispersion der Hauptschnitte sowohl hier wie im folgenden Krystallsystem gering und übersteigt selten  $1-2^{\circ}$ . Die Farbenerscheinungen planparalleler Platten, welche die optischen Axen erkennen lassen, sind im monochromatischen Lichte folgende: eine Platte senkrecht zur Bissectrix zeigt bei gekreuzten Polarisuren ein schwarzes Kreuz Fig. 34, auf dessen einem Arme die elliptischen Ringe der optischen Axen erscheinen, von Lemniscaten umgeben, wenn die Hauptschnitte der Platte mit denen der Polariseure zusammenfallen; hingegen Hyperbeln durch die Axenringe Fig. 35, wenn die Hauptschnitte der Platte um  $45^{\circ}$  gegen die der Polariseure geneigt sind.

Fig. 34.

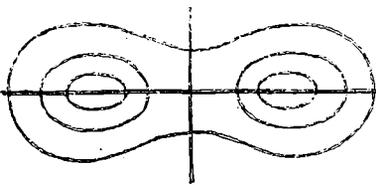
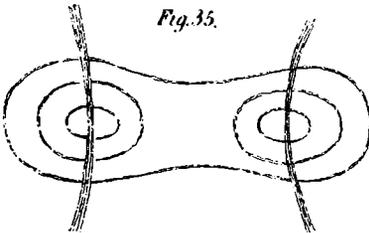


Fig. 35.



Im weissen Lichte lagern sich die Ringe der einzelnen Farben übereinander; wegen der Dispersion der Hauptschnitte werden sowohl die zwei Axenbilder als auch die Farbenvertheilung in jedem derselben unsymmetrisch gegen die nunmehr durch etwas verwaschene schwarze Balken markirten Hauptschnitte.

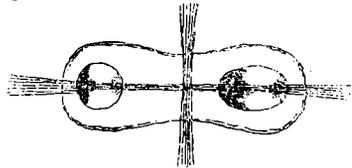
Das Detail dieser Axenbilder lässt sich am einfachsten dahin angeben, dass eine Vereinigung der im folgenden Krystallsysteme auftretenden Dispersionsfälle in wechselnder Stärke zu beobachten ist.

II. Monoklines System. Eine Symmetrieebene.

Ein optischer Hauptschnitt einer jeden Farbe muss mit der Symmetrieebene coïncidiren, somit eine Elasticitätsaxe einer jeden Farbe mit der zur Symmetrieebene senkrechten Krystallaxe  $oY$  zusammenfallen. Die beiden übrigen Hauptschnitte, sowie die zwei in der Symmetrieebene liegenden Elasticitätsachsen sind dispergirt für die verschiedenen Farben. Hier sind nun drei Fälle möglich:

1. Der die optischen Axen enthaltende Hauptschnitt  $ac$  einer Farbe coïncidirt mit der Symmetrieebene; geneigte Dispersion (*Dispersion inclinée Descloizeaux*). Der gewöhnliche Fall ist der, dass die analogen Hauptschnitte für alle Farben nahezu dieselbe Lage haben; in diesem Falle liegen die optischen Axen für alle Farben in der Symmetrieebene; das Bild einer zu einer Bissectrix senkrechten Platte (convergentes Licht) bei Uebereinstimmung der Schwingungsrichtungen von Platte und Polarisuren ist symmetrisch bezüglich des die beiden Axenbilder verbindenden schwarzen Balkens, Fig. 36.

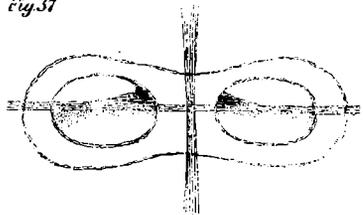
Fig. 36.



2. Der Axenhauptschnitt  $ac$  ist zur Symmetrieebene senkrecht; die Bissectrix liegt in der Symmetrieebene; horizontale Dispersion (*dispersion horizontale Descloizeaux*). In diesem Falle coïncidirt bei positiven Krystallen  $c b$ , bei negativen  $a b$  mit der Symmetrieebene.

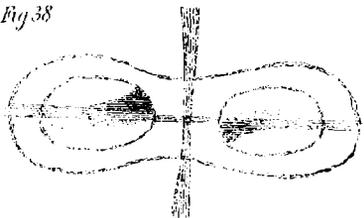
Wenn hier wieder der gewöhnliche Fall der näherungsweise Coïncidenz der gleichnamigen Hauptschnitte für die verschiedenen Farben angenommen wird, sehen wir dass hier die Ebenen der optischen Axen dispergirt sind. Das Axenbild erscheint symmetrisch nach dem zu der Linie der optischen Axen senkrechten Balken, Fig. 37.

Fig. 37



3. Der Axenabschnitt  $ac$  und die Bissectrix sind zur Symmetrieebene senkrecht; mit der Symmetrieebene coïncidirt daher der Hauptschnitt  $ab$  bei positiven,  $cb$  bei negativen Krystallen; gekreuzte Dispersion (*Dispersion croisée Descloizeaux*); die Axenebenen sind dispergirt.

Fig. 38



Unter denselben Voraussetzungen wie früher wird das Axenbild symmetrisch nach gar keiner Linie; die Axenebenen erscheinen um die Plattenormale (zweite Krystallaxe  $oY$ , Bissectrix) fächerförmig dispergirt, Fig. 38.

### III. Rhombisches System.

Drei zu einander senkrechte, ungleichwerthige Symmetrieebenen.

Jede Symmetrieebene muss mit einem Hauptschnitt coïncidiren; hier ist die Lage der optischen Hauptschnitte vollkommen bestimmt und nur mehr die Grösse und Lage der Elasticitätsaxen unbestimmt. Meistens fallen die gleichnamigen Hauptschnitte aller Farben zusammen, somit auch die Elasticitätsaxen  $a$ ;  $b$ ;  $c$ .

Das Axenbild ist unter den früheren Voraussetzungen symmetrisch nach den beiden schwarzen Balken; es erscheint auch im weissen Lichte ähnlich Fig. 34, nur sind in diesem Falle die schwarzen Ellipsen durch farbige ersetzt.

Die optischen Hauptschnitte sind nicht dispergirt, wohl aber die optischen Axen, d. h. es ist der Axenwinkel verschieden für die verschiedenen Farben, ebenso wie in den beiden vorhergehenden Systemen.

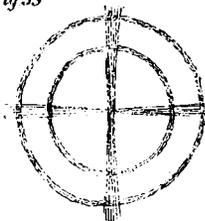
IV. Rhomboëdrisches System. Drei tautozonale, gleichwerthige, unter  $60^\circ$  geneigte Symmetrieebenen. Jede derselben muss ein Hauptschnitt des Ellipsoides sein; diess ist nur möglich, wenn alle dieser Zone angehörigen Ellipsoideschnitte einander gleich, d. h. das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid wird; der zur Zone der Symmetrieebenen senkrechte Hauptschnitt wird ein Kreis; die Axe der Symmetriezone wird optische Axe für alle Farben.

Hier sind, wie schon erwähnt, zwei Fälle möglich, je nachdem  $b=c$  oder  $a=b$ , negativer oder positiver Krystall.

Wenn wir wiederum die Voraussetzung machen, dass für alle

Farben die gleichnamigen Elasticitätsaxen coïncidiren, so erhalten wir als Bild einer zur optischen Axe senkrechten Platte zwischen gekreuzten Polarisireuren ein schwarzes Kreuz mit concentrischen farbigen Ringen. Fig. 39.

Fig. 39



V. Tetragonales System. 5 Symmetrieebenen, davon 4 tautozonal unter  $45^\circ$  gegeneinander geneigt, je zwei abwechselnde gleichwerthig, die 5. zu den ersteren 4 senkrecht.

Ein optischer Hauptschnitt ist parallel der letzteren, als 001 angenommenen Symmetrieebene. Alle zu ihr senkrechten Ellipsoideschnitte müssen einander gleich werden, weil in dieser Zone 4 Symmetrieebenen vorhanden sind, welche alle Hauptschnitte des Ellipsoides sein müssen. Das tetragonale System verhält sich daher optisch genau so wie das rhomboëdrische.

VI. Hexagonales System. 7 Symmetrieebenen, 6 tautozonal, um  $30^\circ$  geneigt, je 3 abwechselnde gleichwerthig, 1 zu ihnen senkrecht. Letztere als ein Hauptschnitt genommen, ergibt wie in den zwei

früheren Systemen, alle dazu senkrechten Schnitte einander gleich, wegen der Symmetrie nach den 6 tautozonalen Symmetrieebenen, daher abermals dieselben optischen Verhältnisse.

Basis III ist senkrecht zur optischen Axe.

VII. Tesserales System. 9 Symmetrieebenen; 3 zu einander senkrecht, gleichwerthig, die übrigen 6 unter  $45^\circ$  zwischen je 2 der ersteren tautozonal eingeschaltet.

Nehmen wir die ersteren 3 Symmetrieebenen den 3 Hauptschnitten parallel, so ergibt sich aus der Existenz der übrigen Symmetrieebenen sofort, dass das Polarisationsellipsoid eine Kugel sein muss, deren Radius für die verschiedenen Farben verschieden ist. Eine Kugel hat nur Kreisschnitte, daher in allen Richtungen einfache Brechung stattfindet.

---

Wir haben in obigem nur die Fälle berücksichtigt, wo die gleichnamigen Hauptschnitte aller Farben nahe coincidiren; in der That sind die Ausnahmen von diesem Gesetze sehr selten und bieten keinerlei Schwierigkeiten; die Beobachtung mittelst monochromatischer Gläser oder Lichtquellen gestattet jederzeit eine rasche Orientirung.

Ebenso haben wir von der obigen Besprechung die circularpolarisirenden einaxigen Krystalle ausgeschlossen, da sie, trotz des grossen theoretischen Unterschiedes, praktisch genau wie die übrigen einaxigen Krystalle angesehen werden können, mit Ausnahme des Axenbildes, das innerhalb der Ringe das schwarze Kreuz durch eine gleichmässige, von der Plattendicke abhängige Färbung ersetzt zeigt.

---

Es ist nun nicht mehr notwendig, das specielle Verhalten von Platten verschiedener Krystalle bezüglich Orientirung der Schwingungsrichtungen zu besprechen. Die Orientirung des Ellipsoides gegen die Krystallaxen, respective Symmetrieebenen, ist in obigem gegeben; ist daher die krystallographische Orientirung einer Platte bekannt, so kann man sofort die Art des Schnittes am Ellipsoid, somit die Schwingungsrichtungen bestimmen. Umgekehrt liefert die experimentell leicht zu bestimmende Lage der Schwingungsrichtungen einer Platte von bekannter krystallographischer Orientirung einen Anhaltspunkt zur Bestimmung des Systemes.

---

Ueberblicken wir noch einmal den Entwicklungsgang des vorliegenden Entwurfes, so sehen wir als Ausgangspunkt den Erfahrungssatz, dass bei Wahl einer bestimmten Bezeichnungsweise die Zeichen von Flächen und Zonen aus einfachen ganzen Zahlen bestehen, deren Verhältnisse unter einander also rationale Zahlen sind.

Aus der Rationalität dieser Zahlen folgt nun auf einem Wege, den wir nur kurz andeuten konnten, dass nur solche Flächencomplexe mög-

lich sind, welche einer von 7 verschiedenen Symmetriearten angehören, den 7 Krystalssystemen.

Aus den allgemeinen Gesetzen für die Bewegung des Lichtes in Krystallen ergab sich uns das Polarisationsellipsoid zur Ableitung aller speciellen Regeln.

Die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Krystalssysteme gestatteten uns, die Beschaffenheit des Polarisationsellipsoides und damit die optischen Eigenschaften eines jeden Systemes auf sehr einfache Weise zu ermitteln, womit wir den Vorwurf dieser Arbeit erschöpft haben.